This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

C10.6
M42

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in

Hamburg.

Band I.

(Enthaltend Heft 1—9.)

Harvard College Library

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.
1889.

F.

153157

STANFORD LIBRARY

Inhaltsangabe von Band I.

Seite

I. Bericht über die Versammlungen 1. 17. 89. 57. 97. 117. 195. 229. 267

II. Abhandlungen.

Beiträge zur Geschichte der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1690—1790 von Bauinspektor J. F. Bubendey 8

Zur Theorie der atmosphärischen Wirbel von Dr. Sprung 27

Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformation der Ebene von Dr. Schubert 31

Über eine gewisse Familie von Configurationen von Dr. Schubert . . . 82

Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen des dreidimensionalen Satzes, dafs es zwei Strahlen giebt, welche vier gegebene Strahlen schneiden, von Dr. Schubert 87

Lösungen der Elasticitätsgleichungen von der Form:
$f(t, x, y, z) \cdot \cos(at + a_1 x + a_2 y + a_3 z)$ von Dr. Jaerisch 88

Lösung des Charakteristikenproblems für lineare Räume beliebiger Dimension von Dr. Schubert 134

Über das Gleichgewicht einer elastischen Kugel von Dr. Jaerisch. . . . 155

Über das Gleichgewicht des elastischen Kreiscylinders v. Dr. Jaerisch. . 167

Über eine neue zahlentheoretische Funktion von Dr. Bock 187. 201

Zur Theorie der Laméschen Funktionen von Dr. Jaerisch 212

Das Potential des Ellipsoids von Dr. Liebenthal 237

Eine Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln der Kongruenz $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, für einen reellen Primzahlmodul p von Dr. Keferstein 256

Zur Theorie der Elasticität isotroper Rotationskörper v. Dr. Jaerisch . . 275

Über den optischen Einfluss sehr kleiner Stoffteilchen v. Prof. Kiefsling 289

Über Räume zweiten Grades von Prof. Schubert 290

III. Ausführlichere Referate über Vorträge.

Die Bewegung von Massenpunkten nach dem Newtonschen Gesetz von Dr. Schrader 6

Über die Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel von Dr. Schubert . . 18

Über die Berechnung von Volumina von Rotationskörpern und speziell über die Faßberechnung von Th. Sinram 20

Die Entwicklung des Imaginären in der Analysis von Prof. Kiefsling . . 24

Über die Verbindung der Dreiecksketten in Spanien und Algier von F. H. Reitz 39

Über die Attraktion zweier homogenen Körper von Dr. Liebenthal . . 43

Seite

Die Wiederauffindung des Planeten Sylvia, von Dr. Plath 45
Der Hohmann-Coradi'sche Flächenintegrator von F. H. Reitz 48
Kritik der Anwendbarkeit der Gleichungen der Elasticitätstheorien auf endliche Körper von Dr. P. Jaerisch 54
Die bequemste Auffindung des Wochentages eines gegebenen Datums nach dem Gregorianischen Kalender von Dr. Schubert 58
Kritik der Dispersionstheorien von Dr. Jaerisch 59
Über das Periheliotrop von F. H. Reitz 61
Die Beziehung der elliptischen Funktionen zur Geometrie von H. Ahlborn 63
Über die Abbildung ebener Kurven- u. Flächenstücke von Dr. Wagner . 64
Über die Verwertung der Resultate photometrischer Messungen v. Dr. Krüfs 73
Die Entwicklung von Funktionen in unendliche Produkte von Dr. Bock . 76
Historische Mitteilungen zur Elektricitätslehre und Potentialtheorie von Dr. Hoppe 97
Der Mareograph für den Hafen von Marseille von F. H. Reitz 99
Ein elementarer Beweis des Satzes, dafs jede Primzahl von der Form $4n+1$ gleich der Summe zweier ganzer Quadratzahlen ist, von Dr. Bock. . 101
Die Reihe $\sum_{1}^{\infty} \sin(n!\,x\pi)$ von Dr. Köpcke 106
Hydrodynamik nach dem Hamiltonschen Prinzip von Dr. Bock 108
Zur Geschichte der Hypergeometrischen Reihe von Schulze 108
Beitrag zur Theorie des Billardspiels von Dr. Keferstein 113
Potentialwerte verschiedener Kräfte und Folgerungen daraus von Dr. Bock 119
Über die Differenzierbarkeit und Anschaulichkeit willkürlicher Funktionen von Dr. Köpcke 128
Durch 5 Punkte eine Kurve zweiter Ordnung zu legen v. Dr. Böger. . . 131
Über einige Entwicklungen aus der Theorie der Deviation des Kompasses an Bord eiserner Schiffe von Kapitän Koldewey 232
Über einige mathematische Aufgaben der Lebensversicherungstechnik von W. Lazarus 273
Über empirische und idealisierende Raumauffassung von Dr. Köpcke . . 274

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 1. Ausgegeben im Mai. 1881.

Berichte über die Versammlungen.

In der Versammlung vom 11. September 1880 machte der Jahrverwalter die Mittheilung, dass der infolge eines früheren Beschlusses angefertigte Fragekasten nunmehr im Flur des Patriotischen Gebäudes angebracht sei.

Herr Dr. Schubert trug in dieser Versammlung vor:

„Die trilineare Verwandtschaft zwischen drei einstufigen Grundgebilden".

Der Vortragende machte darauf aufmerksam, dass die Methode der neueren synthetischen Geometrie eine fruchtbare Erweiterung erfährt, wenn man ausser der projectiven oder bilinearen Verwandtschaft auch die trilineare Verwandtschaft*) als Forschungsmittel benutzt.

Drei einstufige Grundgebilde heissen zu einander *trilinear*, wenn ihre Elemente einen derartigen Zusammenhang haben, dass man erst auf zweien von den drei Grundgebilden je ein Element willkürlich annehmen muss, um dadurch auf dem dritten Grundgebilde ein einziges entsprechendes Element hervorzurufen, und wenn ausserdem dieser Zusammenhang *algebraisch* ist, d. h. durch eine Gleichung von der Form:

1) $xx'x'' + a\cdot x'x'' + a'\cdot x''x + a''\cdot xx' + b\cdot x + b'\cdot x' + b''\cdot x'' = c$

dargestellt werden kann, wo $a, a', a'', b, b', b'', c$ 7 Constante sind, und wo x, x', x'' drei Veränderliche sind, welche beziehungsweise auf den drei Grundgebilden die Lage der veränderlichen Elemente be-

*) Dieselbe erwähnte der Vortragende schon in Crelle's Journal, Bd. 88, S. 342 unter dem Namen Ein-ein-ein-Deutigkeit.

stimmen. Dabei kommt es, wie eine leichte Discussion der Gleichung 1) ergiebt, immer zweimal vor, dass einem Elemente auf einem von den drei Grundgebilden und einem zugeordneten Elemente auf einem zweiten Grundgebilde *jedes* Element auf dem dritten Grundgebilde entspricht. Zwei so zugeordnete Elemente zweier Grundgebilde, denen auf dem dritten Grundgebilde jedes Element entspricht, sollen ein *singuläres Paar*, und jedes einzelne *singulär* heissen. In jedem Grundgebilde liegen aber nur zwei singuläre Elemente, weil jedes zweien singulären Paaren angehört. Man bezeichnet daher zweckmässig die 6 singulären Elemente dreier trilinearen Grundgebilde mit p, q, p', q', p'', q'', so dass

$$p \text{ und } q', \quad p' \text{ und } q'', \quad p'' \text{ und } q$$
$$q \text{ und } p', \quad q' \text{ und } p'', \quad q'' \text{ und } p$$

singuläre Paare bilden.

An diese Definitionen schloss der Vortragende den Nachweis, dass die Lage der 6 singulären Elemente mit der Lage zweier Tripel entsprechender Elemente a, a', a'', b, b', b'' immer durch die Relation

$$2) \qquad (pqab) \cdot (p'q'a'b') \cdot (p''q''a''b'') = 1$$

verbunden ist, wo die Klammern, wie üblich, Doppelverhältnisse bezeichnen. Diese Relation ist für die trilineare Beziehung von derselben Bedeutung, wie die Gleichheit des Doppelverhältnisses bei der bilinearen Verwandtschaft. Betrachtet man nicht alle singulären Elemente, und dafür mehr als 2 Tripel entsprechender Elemente in ihrer Abhängigkeit von einander, so gelangt man zu 12 anderen Relationen, welche complicirter sind, als die Gleichung 2). Z. B. werden die singulären Elemente auf g' und g'' mit 4 Tripeln entsprechender Elemente a, a', a'', b, b', b'', c, c', c'', d, d', d'' durch die folgende Relation verbunden:

$$3) \quad (abcd) = \frac{(p'q'a'c') \cdot (p''q''a''c'') - 1}{(p'q'b'c') \cdot (p''q''b''c'') - 1} : \frac{(p'q'a'd') \cdot (p''q''a''d'') - 1}{(p'q'b'd') \cdot (p''q''b''d'') - 1}.$$

In dem speziellen Falle, wo zwei von den vier Punkten a, b, c, d in die singulären Punkte p und q fallen, entsteht aus der Relation 3) die Relation 2).

Wie nun die *lineare* Construction eines neuen Paars projektiver Elemente durch Vermittelung einer spezielleren projektiven Beziehung, nämlich der *perspectiven*, bewerkstelligt wird, so ist man auch bei der linearen Construction eines neuen Tripels von Elementen, die einer trilinearen Beziehung angehören sollen, auf die Benutzung einer besondern trilinearen Beziehung angewiesen, die der Vortragende die *geradlinigte* nannte. Es heissen nämlich drei in einer und derselben

Ebene befindliche gerade Punktreihen geradlinigt auf einander bezogen, wenn je drei in gerader Linie liegende Punkte als einander entsprechend angesehen werden. Der Vortragende stellte dann für die geradlinigte Beziehung einige wichtige Sätze auf, mit deren Hilfe es ihm für gewisse Fälle gelingt, die lineare Construction eines neuen Tripels entsprechender Elemente zu bewerkstelligen.

Unter den Anwendungen der trilinearen Verwandtschaft wurde namentlich die auf die *allgemeine Fläche dritter Ordnung* hervorgehoben. Die letztere ist nämlich der Ort der Schnittpunkte der entsprechenden Ebenen von drei trilinear bezogenen Ebenenbüscheln. Die oben angeführten Doppelverhältniss-Relationen liefern für die Fläche dritter Ordnung einige Resultate, welche sich auf drei der Fläche angehörige windschiefe Gerade beziehen. Ferner zeigte der Vortragende die durch seine Untersuchung ermöglichte, ziemlich einfache *lineare Construction* der Fläche dritter Ordnung in den folgenden beiden Fällen:

a) wenn sie durch einen gegebenen Punkt, durch drei windschiefe Gerade und durch diejenigen sechs Geraden gehen soll, von denen jede nur zwei von den drei windschiefen Geraden schneidet;
b) wenn sie durch drei gegebene Punkte, durch drei windschiefe Gerade und durch diejenigen beiden Geraden gehen soll, deren jede gewisse zwei von den drei windschiefen Geraden schneidet, die dritte aber nicht.

In beiden Fällen kommt man auf *sämmtliche* Punkte der Fläche, weil man auf jeder *beliebigen* Geraden, welche zwei der drei gegebenen, windschiefen Geraden schneidet, den dritten, der Fläche angehörigen Punkt linear construiren kann.

Ausführlicher ist das besprochene Thema von Herr Dr. Schubert in einer Note behandelt, welche in den Math. Ann., Bd. 17, S. 457 erschienen ist, und auf welche hierdurch verwiesen wird.

Versammlung vom 9. October 1880.

Es wurde beschlossen, die bisher autographirten „Mittheilungen" der Gesellschaft in Zukunft durch Druck herauszugeben und zur Ausführung eine Redactions-Commission einzusetzen. — Herr Dr. Böddicker zeigte seinen Uebertritt in die Zahl der auswärtigen Mitglieder der Gesellschaft an, da er seinen Wohnsitz nach Parsonstown (Irland) verlege.

Herr Lazarus hielt einen Vortrag „über Näherungsformeln", indem er über die Abhandlung von J. P. Gram, Om Rækkeudvik-

linger, bestemte ved Hjælp af de mindste Kvadraters Methode, Kopenhagen 1879, berichtete.

Versammlung vom 13. November 1880.

„Die mathematischen Grundlagen der Militärdienstversicherung" wurden von Herrn Franz Fischer zum Gegenstand eines Vortrages genommen.

Die Militärdienstversicherung bezweckt die pecuniäre Unterstützung der zum Militärdienste eingestellten Personen durch im Voraus festgesetzte Versicherungssummen auf Kosten der vom Militärdienste Befreiten. Der Vortragende wies nach, dass die Grundlagen fehlen, um solche Versicherungen leisten zu können. Die Anstalten setzen unter den Versicherten dasselbe Sterblichkeits- und Einstellungsverhältniss voraus, wie unter der allgemeinen Bevölkerung. Diese Voraussetzungen könnten nur dann zutreffen, wenn die Militärdienstversicherung eine *zwangsweise* wäre; da sie aber eine freiwillige ist, so werden nur „ausgewählte Leben", d. h. gesunde und kräftige Kinder und zwar aus den wohlhabenden Klassen der Bevölkerung versichert werden, und für diese ist die Wahrscheinlichkeit, das militärpflichtige Alter zu erreichen und für den Soldatenstand tauglich zu sein, eine weit grössere, als für die allgemeine Bevölkerung. Wie gross der Einfluss dieser „Selection" sein wird, lässt sich nur durch direkte Beobachtung während eines längeren Zeitraumes constatiren. Der Vortragende leitete unter der Voraussetzung einer zwangsweisen Militärdienstversicherung die Prämienformeln ab; zu Grunde gelegt werden: a. Die Bedingung der Hamburger Militärdienstversicherungs-Anstalt, b. Neue Preussische Absterbe-Ordnung, c. Tabellen über Ersatzergebnisse des deutschen Reiches aus den Jahren 1875/1876, 1876/1877, d. Zinsfuss 4%.

z_1, z_2, z_3 bedeuten die Wahrscheinlichkeiten, im I., II., III. Gestellungsjahr in das Militär eingestellt zu werden.

c_1, c_2, c_3 „ die Wahrsch., in die Ersatzreserve gestellt zu werden.

n_1, n_2, n_3 „ „ „ ausgemustert zu werden.

a_1, a_2, a_3 „ „ „ ausgeschlossen zu werden.

$$c_1 + n_1 + a_1 = k_1 \text{ u. s. w.}$$

q_1, q_2, q_3 bedeuten Wahrsch., zurückgestellt zu werden.

$^{n}\mathfrak{p}(x)$ jährl. Nettoprämie der Militärdienstversicherung ohne Rückgewähr der Prämien.

$^{n}\mathfrak{p}r(x)$ jährl. Nettoprämie der Militärdienstvers. mit Rückgewähr der Prämien.

${}^n br(x) = \alpha \,.\, {}^n pr(x)$ jährl. Bruttoprämie der Militärdienstvers. mit Rückgewähr der Prämien.

${}^n \mathfrak{P}(x)$ einmalige Nettoprämie der Erlebungsvers.

$P_n(x)$ „ „ der temporären Ablebungsvers.

$R_n(x)$ temporäre $n$fache laufende Leibrente.

I. Formel für Versicherungen ohne Rückgewähr der Prämien:

$$ {}^n p(x) = $$

$$ \frac{\frac{\varrho^4 - 1}{\varrho - 1}\left\{z_1 \cdot {}^n\mathfrak{P}(x) + z_2 \cdot {}^{n+1}\mathfrak{P}(x) + z_3 \cdot {}^{n+2}\mathfrak{P}(x)\right\} - \frac{1}{3}\left\{z_1 \cdot P_1(x+n) + z_2 \cdot P_1(x+n+1) + z_3 \cdot P_1(x+n+2)\right\}}{R_{n+1}(x)} $$

Näherungsweise:

$$ {}^n p(x) = \frac{\Sigma z \cdot \varrho^{\frac{3}{2}} \cdot \left\{\frac{1}{4}\,\frac{\varrho^4 - 1}{\varrho - 1} \cdot {}^n\mathfrak{P}(x) - \frac{1}{3} \cdot P_1(x+n)\right\}}{R_{n+1}(x)}. $$

II. Formel für Versicherungen mit Rückgewähr:

$$ {}^n pr(x) = \frac{R_{n+1}(x) \cdot {}^n p(x)}{R_{n+1}(x) - \alpha \cdot \psi(x_1 n)}, \text{ wobei} $$

$$ \psi(x_1 n) = (n-1)\, P_n(x) - \sum_{y=1}^{y=n-1} P_y(x) + (n-1)\, k_1 \cdot \mathfrak{P}(x) + $$

$$ + n\left\{k_2 \cdot {}^{n+1}\mathfrak{P}(x) + k_3 \cdot {}^{n+2}\mathfrak{P}(x)\right\} + n \cdot \left\{q_1 \cdot P_1(x+n) + q_2 \cdot P_1(x+n+1)\right\}. $$

Die hiernach berechneten Tarife fallen um 25% höher aus, als die der Hamburger und der Bremer Militärversicherungs-Anstalt; um wie viel mehr werden die Tarife der Anstalten zu niedrig sein, wenn die vorausgeschickte Annahme der zwangsweisen Militärdienstversicherung fortfällt?

Der Gegenstand des Vortrages ist ausführlich in einer Brochüre:

Kritische Untersuchungen über Militärdienstversicherung. Jena: Gustav Fischer, vorm. Friedr. Mauke, 1881,

vom Vortragenden behandelt worden.

Versammlung vom 11. December 1880.

Nachdem auf Antrag des Herrn Sinram eine Besprechung des höchst lückenhaften Bestandes der hiesigen Stadtbibliothek an rein mathematischen Werken stattgefunden, wurde eine Commission, bestehend aus den Herren Schubert, Sinram, Sprung und Hoppe, eingesetzt, welche geeignete Vorschläge zur Abhülfe dieses Missstandes zu verabreden habe.

Herr Dr. Schrader hielt einen Vortrag über „die Bewegung von Massenpunkten nach dem Newton'schen Gesetz".

Der Redner vertagte den Schluss seines Vortrages auf die nächste Versammlung, da derselbe noch einige Mittheilungen zu machen hatte in Bezug auf die gegen Ende des Jahres hieselbst zu beobachtenden Verfinsterungen des Mondes und der Sonne.

Versammlung vom 15. Januar 1881.

Herr Dr. Schrader vollendete seinen Vortrag über „die Bewegung von Massenpunkten nach dem Newton'schen Gesetz".

Es seien gegeben n Massenpunkte mit den Coordinaten $x_n y_n z_n$ bezogen auf ein rechtwinkliges Coordinatensystem; der Punkt n habe die Masse m_n concentrirt; je zwei Punkte α und β mögen sich anziehen nach dem Newton'schen Gesetz, d. h. mit einer Kraft $= \frac{c m_\alpha m_\beta}{r_{\alpha\beta}^2}$, wobei $r_{\alpha\beta}$ die Entfernung der Punkte α und β und c eine Constante bedeuten.

Alsdann gelten für die Bewegung des Systems $3n$ Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die z. B. für den Punkt α folgende sind:

$$\frac{d^2 x_\alpha}{dt^2} = \sum' \frac{-c m_n}{r_{\alpha n}^2} \frac{x_\alpha - x_n}{r_{\alpha n}}$$

$$\frac{d^2 y_\alpha}{dt^2} = \sum' \frac{-c m_n}{r_{\alpha n}^2} \frac{y_\alpha - y_n}{r_{\alpha n}}$$

. . . . . .

Dabei ist die Summirung über alle Punkte 1 bis n ausser α selbst vorzunehmen.

Durch eine einfache Betrachtung lässt sich nun zeigen, dass der Massenmittelpunkt eine gleichförmige geradlinige Bewegung im Raume besitzt, wie es bekanntlich bei den Bewegungen aller Punktsysteme gilt, bei denen nur gegenseitige innere Kräfte wirken.

Ferner existirt für die Bewegungsgleichungen eines jeden Punktes ein Potential, dessen partielle Differentialquotienten gleich sind den Componenten der Kraft, so dass das Prinzip der lebendigen Kraft auf jene Gleichungen angewandt werden kann.

Weitere Integrationen lassen sich jedoch in dem allgemeinen Falle nicht ausführen, so dass man bei der Behandlung eines praktischen Beispiels, etwa der Bahnbestimmung eines Körpers in unserm Sonnensystem, auf Reihenentwicklungen mittelst mechanischer Quadraturen angewiesen ist.

In dem speciellen Falle, dass nur zwei Massenpunkte vorhanden sind (Doppelsterne), lassen sich die Gleichungen vollständig integriren,

und man erhält, ausser der gleichförmigen geradlinigen Bewegung des Massenmittelpunktes, eine durch letztern gehende Ebene, deren Lage nur von den Anfangsgeschwindigkeiten der beiden Punkte abhängt.

In dieser Ebene bewegen sich die letzteren mit constanter Sectorengeschwindigkeit in zwei ähnlichen Kegelschnitten, welche einen Brennpunkt, nämlich den Ort des Massenmittelpunktes, gemeinschaftlich haben. Die beiden anderen Brennpunkte liegen mit dem gemeinschaftlichen auf einer geraden Linie, jedoch auf verschiedenen Seiten desselben.

Die Form der Kegelschnitte ist abhängig von der Grösse der Anfangsgeschwindigkeit und Anfangsentfernung der beiden Punkte.

Uebertrifft bei einer grossen Anzahl von Massenpunkten der eine in Beziehung auf seine Masse die andern derartig, dass die Massen der letzteren im Vergleich zu der des Hauptpunktes als Grössen kleiner Ordnung angesehen werden können, so gelten in erster Annäherung die Kepler'schen Gesetze. (Unser Sonnensystem.)

Bei allen genauern Untersuchungen jedoch müssen die im Anfang aufgestellten Differentialgleichungen auf numerischem Wege integrirt werden, um die Bewegungen auch theoretisch mit einer den heutigen Beobachtungen entsprechenden Genauigkeit darzustellen.

Herr Dr. Schubert berichtete Namens der Commission über die Sammlung mathematischer Werke an hiesiger Stadtbibliothek, deren Werth daraus erhellt, dass im Laufe dieses Jahrhunderts im Ganzen nur 20 bis 30 mathematische Werke angeschafft sind. Die Commission war indessen überzeugt, dass seitens der Stadtbibliothek ein grösseres Interesse der Mathematik würde gewidmet werden, wenn nur von den Mathematikern fehlende wichtige mathematische Werke consequenter dort gefordert würden. Es wurde ein Verzeichniss derjenigen Hauptwerke vorgelegt, deren Anschaffung man in dieser Weise mit Recht erstreben dürfe.

Versammlung vom 12. Februar 1881.

Es wurden in die Gesellschaft als einheimische Mitglieder aufaufgenommen die Herren: Paul Jaerisch, Dr., Lehrer am Johanneum, und Friedrich Anton Leopold Ambronn, Beamter der Seewarte.

Herr Bubendey II machte einige Mittheilungen über die Geschichte der Gesellschaft. Ein ausführlicheres Referat dieses Vortrages schliesst sich hier an.

Beiträge zur Geschichte der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg.

I.

1690—1790.

Wenn wir bei dem Mangel eines ausführlicheren historischen Materiales in betreff der Gründung der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg es uns angelegen sein lassen, das Herauswachsen dieses Unternehmens aus den Zeitverhältnissen zu Ende des 17ten Jahrhunderts zu studiren, so werden wir zu einer Betrachtung des damaligen Elementarlehrerstandes geführt, aus welchem die Gesellschaft anfangs fast ausschliesslich sich recrutirte.

Nun war aber dieser Stand ein äusserst verwahrloster, ehe man in der Mitte des vorigen Jahrhunderts anfing, für regelmässigere Ausbildung der Lehrer durch Seminarien zu sorgen.

Ein Schriftsteller aus dem Anfang unseres Jahrhunderts*) schreibt über die Lehrer der damaligen Zeit: „diese höchst elenden Schul„meister kamen, wie Pilze aus der Erde, ohne alle vorherige Geistes„pflege ins Schulamt", während ein Zeitgenosse**) speciell von den Rechenmeistern sagt, dass diese Ignoranten und gewissenlosen Jugendverderber sich hässlich schämen müssten, wenn man von ihnen verlangte, eines ihrer Exempel gründlich zu expliciren.

Dass sich aus diesem Schlendrian einzelne energischere Charaktere herauszuarbeiten suchten, darf uns nicht wundern. Solche Männer waren Valentin Heins und Heinrich Meissner, Schreib- und Rechenmeister zu St. Michaelis resp. St. Jacobi hieselbst.

Val. Heins, eines Leinewebers Sohn, erwarb sich schon in seinem 14ten Jahre sein Brod durch gründlichen Unterricht in der Arithmetik, erlernte als Autodidakt alte Sprachen, Geschichte, Theologie und Mathematik und verwerthete seine Kenntnisse fast ausschliesslich zum Unterricht im kaufmännischen Rechnen. Seine Rechenbücher erlebten zum Theil mehr als 20 Auflagen und beherrschten noch Anfangs dieses Jahrhunderts den Rechenunterricht hieselbst, wie denn das geflügelte Wort „nach Valentin Heins" noch jetzt nicht ganz verklungen ist. — Diente sein Unterricht auch vorzugsweise dem praktischen Bedürfnisse, so suchte er doch, wo er es konnte, Perspectiven in die eigentliche Algebra zu eröffnen.

Diese war neben der Geometrie das eigentliche Schaffensgebiet

*) Journal Hamburg-Altona, 5. Jahrgang, 1. Bd., S. 215.

**) H. Meissner, Kunstkette, 1690, S. 127.

Heinr. Meissner's, welchen Zeitgenossen einen berühmten Algebraisten nennen, ein von grossen Ideen strömendes Genie, der in 16 Foliobänden einen Commentar zum Euklid schrieb, in dem er alle mathematische Weisheit seiner Zeit zusammenbrachte. Die verschiedenen uns erhaltenen Werke Meissner's reden in ähnlichem Sinne direct für ihren Autor. Ueberall finden wir Klarheit, Bekanntschaft mit fast allen derzeitigen Errungenschaften der Mathematik und das Bestreben, in alle Verhältnisse des Lebens die Anwendung dieser Wissenschaft hineinzutragen. Vom Commentar zum Euklid sind leider nur 2 Bände im Druck erhalten, die übrigen konnten keinen Verleger finden, das Manuscript verbrannte 1842. — Auch in diesem Werk finden wir einen Schmerzensschrei über die Pfuscherei der Messkünstler, welche den Inhalt des Parallelogrammes aus dem Producte der Seiten finden, oder der Rechenmeister, welche benannte Zahlen mit einander multipliciren.

Einer so bitter beurtheilten Collegenschaft gegenüber war es natürlich, dass Heins und Meissner sich mit den besseren Elementen ihres Standes zu gemeinsamem Streben verbanden. Diesem 1684
Bemühen verdankte jedenfalls die von Meissner im Jahre 1684 mit einigen Collegen in Hamburg gegründete „Zunft der vereinigten und fleissigen Rechenmeister" ihren Ursprung. Es ist von dieser Vereinigung uns nichts, als der blosse Name erhalten geblieben, doch ist das Schicksal derselben unschwer zu beurtheilen. Ebenbürtige Geister fand Meissner hieselbst nur in zu geringer Zahl, dagegen wird der ganze Tross der übrigen Collegen, die in dem frischen Streben nur eine gefährliche Neuerung sahen, durch die sie gezwungen würden, ihren faulen Schlendrian durch eigene Anstrengung zu überwinden, der Sache jeden möglichen Widerstand entgegengesetzt haben. Sehen wir sie doch dasselbe thun, als es Meissner einige Jahre später trotz alledem gelungen war, seine Idee zu verwirklichen.

Meissner's Kraft war nämlich durch den einen erfolglosen Versuch nicht gebrochen; was er hier am Platze nicht erreichen konnte, das suchte er in weiteren Kreisen zu verwirklichen. Der hanseatische Handel, welcher die hamburger Kaufmannschaft mit derjenigen der übrigen nordischen Städte aufs engste verband, lieferte den fleissigen Lehrern, welche neben ihrem sauren Beruf des Abends noch der kaufmännischen Buchführung oblagen, ebenfalls Verbindungen mit jenen Städten.

Auf diesem grösseren Gebiete liess sich eher eine Anzahl gleichgestimmter tüchtiger Männer vereinigen, und wenn diese Vereinigung auch den gewaltigen Vortheil der gegenseitigen Unterstützung durch

das Wort entbehrte, so konnte sie dennoch für die damalige Zeit segensreiche Früchte genug tragen. Auch der briefliche Verkehr mit tüchtigen Freunden musste denen Nutzen gewähren, die von ihren Collegen keine geistige Unterstützung zu erwarten hatten. Dann forderten auch die pecuniären Verhältnisse der Einzelnen ein Zusammenschliessen. Einmal grassirte damals der durch den Nachdruck begangene geistige Diebstahl sehr stark und ein kaiserliches Privilegium impressorium aus Wien zu beziehen, war mit Weitläufigkeiten und Kosten verknüpft; ausserdem hatten die Wenigsten Capital, um das Risico des Selbstverlages zu tragen; Verleger für mathematische Werke fanden sich aber schwer, und so mussten die Freunde sich gegenseitig bei der Herausgabe ihrer Werke unterstützen.

1690 Am 2ten Januar 1690 versandte Heinrich Meissner einen Ausschreibebogen zur Gründung der „Kunstrechnungs Liebenden Societät". Von den 15 Mitgliedern, welche der Gesellschaft beitraten, wohnten nur 5 in Hamburg, die übrigen in Buxtehude, Lübeck, Braunschweig, Copenhagen und Gothenburg. War Hamburg auch der Mittelpunkt der Gesellschaft, so lag deren Hauptthätigkeit doch nicht in dem Verkehr der hiesigen Mitglieder unter einander, sondern in dem brieflichen Verkehr aller Zunftverwandten, wie in der Verwendung der gemeinsamen Casse. Ueberwog schon zu Anfang die Zahl der auswärtigen Mitglieder, so wurde dies Missverhältniss mit der Zeit noch viel stärker. Während die Zahl der auswärtigen Mitglieder in den ersten 40 Jahren ein gedeihliches Wachsthum zeigte, blieb sie im weiteren Verlauf des ersten Jahrhunderts auf einem guten Mittelwerth. Dagegen nahm die Zahl der hamburger Mitglieder nur in den ersten Jahren zu, um dann rapid zurückzuschreiten, 1718 ein Minimum von 3 Mitgliedern zu erreichen und nicht wieder über 10 Mitglieder zu steigen. 1753 stehen wieder 19 auswärtigen nur 3 einheimische Mitglieder gegenüber und bis 1789 bleibt diese Zahl dann zwischen 4, 5 und 6 wechselnd.

In Uebereinstimmung mit diesen Verhältnissen ist denn auch weder in den ursprünglichen Leges der Gesellschaft von 1690, noch bei der 1718 und 1774 vorgenommenen Statutenrevision von regelmässigen Versammlungen der hamburger Mitglieder die Rede; es heisst dort nur im Artikel 2, dass einige Mitglieder, so am nähesten beisammen wohnen, sich unter einander aufmuntern, in etwan ledigen Stunden zusammenkommen und unter sich ein oder ander Frage erörtern könnten. Hieraus sind dann die Theestunden im Hause des Jahrverwalters als Vorläufer der späteren Versammlungen hervorgegangen.

In denselben Leges wird auch der Fall behandelt, dass einmal alle hiesigen Mitglieder aussterben möchten, wo dann die beiden Jahrverwalter und der Adjunct (die von 1690 bis zur Gegenwart den Gesellschaftsvorstand bilden) aus den nächst gelegenen Orten erwählt werden. Es wird aber, besonders in den späteren Statuten hervorgehoben, dass man alsdann suchen solle, den Sitz der Verwaltung wieder nach Hamburg, als an den Ort der Gründung, zurückzuverlegen.

Der bei der Gründung angenommene Name „Kunstrechnungs Liebende Societät" wird später verschieden angegeben, 1696 „Kunstrechnungs übende S.", 1699 „Kunstrechnungs lieb und übende S.", später auch „Societät der Kunstrechner" u. s. w., man nahm es nicht so genau.

Um das von der Gesellschaft gewählte Sinnbild, eine Janusgestalt mit Schlüssel und Fackel, stand anfangs die Umschrift: „Was gefunden ich verwahr und noch finde immerdar". Schon 1699 finden wir aber die jetzige Lesart: „Antiqua emendo, substituoque nova".

Von den 136 Mitgliedern von 1690—1790 waren

Schreib- und Rechenmeister, meist gleichzeitig auch Buchhalter	83,
Beamte, Notare, Schreiber	10,
Organisten und Kirchendiener	6,
Kaufleute	7,
diversen Ständen angehörig	30.

Studirte Mathematiker hielten sich im ersten Jahrhundert von der Gesellschaft fern, das blieb natürlich nicht ohne Einfluss auf den in derselben herrschenden Geist; wie man bei den behandelten Aufgaben häufig in die Sucht verfiel, mit ungeheuren Zahlenschwierigkeiten zu operiren, statt einen Fortschritt in der Klarstellung der Begriffe zu suchen, trat die Sorge für die äusseren Formen des Gesellschaftslebens häufig zu sehr in den Vordergrund; diese Formen, nach bestem Vermögen älteren, bereits antiquirten Mustern angepasst, erhielten einen Anklang an Handwerksinnungen. Nach dieser Richtung hatten die Mitglieder viel Angriffe zu bestehen, namentlich gab zu manchen Anzapfungen die Sitte Veranlassung, dass jedes Mitglied einen Zunftnamen erhielt, gebildet aus dem Participium praesentis eines Verbs, welches denselben Anfangsbuchstaben hat, als der Name des Mitgliedes.

Die wirklichen Leistungen der Gesellschaft und ihrer hervorragenden Mitglieder wurden gleichwohl von den Zeitgenossen anerkannt.*) Eine Idee von der Ausdauer der damaligen Rechner giebt

*) Dethlev Clüver: Nova crisis temporum; 1700, pag. 368.

uns Meissner's Kunstkette, eine Sammlung von 100 Aufgaben, bei denen die Grössen im Ansatz jeder Aufgabe aus den Resultaten der vorhergehenden zu entnehmen sind, sodass das ganze Buch eigentlich nur *eine* Aufgabe mit *einem* Resultat ist.

In den Meissner'schen Lehrbüchern fehlt unsere jetzige Formelsprache fast noch ganz, die Cardani'sche Formel z. B. ist in langathmigen Sätzen umschrieben.

1718 Paul Halcken rühmt sich in seinem 1718 erschienen „Sinnenconfect", die Quadrat und Cubic Coss nach bestem Vermögen eingerichtet zu haben, so dass sie ein Jeder im Sinn behalten kann, welches man bisher für unmöglich gehalten. Es folgt dann die bekannte Formel, der casus irreducibilis ist klar erkannt, aber noch nicht überwunden, sondern es heisst „mit $\sqrt{-a}$ wollen die Zahl-„künstler nicht gerne zu thun haben, gleichwie der Zimmermann ein „unartig knastrig Stück Holz vermeidet".

Das eben genannte Buch fand bei seinem Erscheinen allgemeinen Anklang, wurde später sogar ins Holländische übersetzt und erregt noch jetzt wegen seiner drolligen Aufgaben in Versen viel Vergnügen. Dabei zeigt der Verfasser mathematische Kenntnisse, die man in damaliger Zeit bei einem Schulmeister in Buxtehude nicht erwartet. Er lehrt die Auflösung höherer Gleichungen mittelst der Regula falsi, beschäftigt sich mit Maximis et Minimis und widmet ein ferneres Capitel der Arithmetica infinitorum. Es werden in demselben die unendlichen Reihen entwickelt und dabei über das Unendlichgrosse und Unendlichkleine, als ihrem Wesen nach nur im Vergleiche mit anderen Grössen verständlich, so klare Begriffe entwickelt, dass wir sicher sein können, Halcken war durch die Erzählung von Achilles und der Schildkröte nicht in Verlegenheit zu setzen.

Wenn wir ferner bedenken, dass Leibniz 1685 seine Differentialrechnung veröffentlichte, dass 1710 das erste ausführliche Lehrbuch dieser Disciplin*) in deutscher Sprache erschien, so ist es nur erfreulich, zu sehen, wie Halcken im Capitel der Kreisquadratur dieselbe bereits zu verwenden weiss.

Nach einer hübschen kritischen Beleuchtung der verschiedenen bis dahin angewandten Methoden, namentlich der des Adrian Metius und des Ludolph von Cöllen, entwickelt er den Kreisinhalt zunächst, indem er den Durchmesser gleich 1 setzt, aus

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \sqrt{\tfrac{1}{4} - x^2}\, \partial x,$$

*) Wolff, Anfangsgründe aller Mathematischen Wissenschaften.

wobei er die Grösse unter dem Wurzelzeichen in eine Reihe entwickelt. Hierauf werden die Kreisbogenlängen ebenfalls durch Integration entwickelt, indem die arcus-sinus-Reihe und die arcus-tang.-Reihe durch geometrische Betrachtungen abgeleitet werden.

Leider lässt sich die Stellung Meissner's zur Differentialrechnung nicht mehr feststellen, da in den uns erhaltenen Werken kein Bezug darauf genommen ist. Es lässt sich jedoch voraussetzen, dass er im Commentar zum Euklid auch Leibnizen's und seiner Erfindung gedacht haben wird.

Die von der Gesellschaft jährlich publicirten sogenannten Jahrbriefe, von denen uns indessen nur 16, aus den Jahren 1732—1766, auf der hiesigen Stadtbibliothek erhalten sind, erwähnen der in dem Manuscript dieses Commentars enthaltenen Schätze häufig und theilen bisweilen Einiges davon mit.

So enthält der Jahrbrief von 1740 des seeligen Meissner's be- 1740
quemere Methode die Logarithmos zu berechnen bloss durch die gemeine Species, ohne alle Extraction. Die in Worten gegebene Regel kommt auf die Formel

$$\text{log. brigg. } x = M\,2\left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \cdots\right)$$

hinaus. Frederic Marci, Mitglied der Gesellschaft, welcher 1744 in Amsterdam Logarithmentafeln herausgab, legte diese Formel nach Meissner's Euklid zu Grunde. Der unendliche Fortschritt, welcher in ihrer Anwendung lag, wird klar, wenn man einen Blick auf die älteren Methoden der Logarithmenberechnung wirft, von denen hier nur kurz die obenerwähnte Methode durch Extraction besprochen werden soll. Dieselbe beruht auf der Formel

$$\text{log. nat. } x = \underset{\text{Lim. } n = \infty}{\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) n}$$

Es ist bei der Berechnung n so gross zu nehmen, dass innerhalb der gewählten Genauigkeitsgrenzen bei fernerer Vergrösserung von n der obige Ausdruck constant bleibt. So bestimmt Halcken den log. nat. 10, welchen er die Mutter aller Logarithmorum nennt, durch Ausrechnung des Ausdrucks

$$\left(10^{2^{-52}} - 1\right) 2^{52},$$

indem er 52mal die Quadratwurzel aus 10 zieht.

Im Jahrbriefe von 1760 wird aus dem Meissner'schen Euklid 1760
der folgende Canon zu den befreundeten Zahlen, von denen eine jede gleich der Summe der aliquoten Theile der anderen ist, mitgetheilt.

Es sei $a = 2^\alpha$, $\frac{3a-2}{2} = z$, $2z+1 = y$, $\frac{ayz-2a+1}{a-1} = x$, wobei x, y und z Primzahlen sind. Dann sind ax und ayz zwei befreundete Zahlen. — Dieser Canon liefert für

$$a = 4 \qquad a = 16 \text{ und } a = 128$$

die 3 Paare von Freundschaftszahlen:

220 und 284
18416 „ 17296
9437056 „ 9363584.

Es ist klar, dass die Untersuchung für die wachsenden Zahlen immer schwieriger wird, da bei denselben die Qualität der Factoren als Primzahlen schwer zu eruiren ist. — Der Jahrbrief fügt denn auch hinzu:

„Hier kostets grosse Müh, bis an das 4te und 5te Paar,
So sind in der lieblosen Zeit auch wahre Freunde rar."

Euler hat später gezeigt, dass es weit mehr befreundete Zahlenpaare giebt, jener Canon ist also nicht der einzige.

Als ein erfreuliches Resultat des mit dem Jahre 1718 beginnenden
1723 Aufschwunges der Gesellschaft ist die im Jahre 1723 erschienene Sammlung:

Der hamburgischen Kunstrechnungs lieb und übenden Societät Kunstfrüchte (erste Sammlung)

zu betrachten. In 18 verschiedenen Aufsätzen behandeln die Mitglieder theils astronomische Rechnungen, Primzahlbestimmungen, Progressionsaufgaben, theils auch Beispiele für vortheilhafte Anwendung der Mathematik in der Schiffahrt und beim kaufmännischen Geschäft. Manche Rechenaufgaben werden noch dadurch aufgestutzt, dass die Zahlenresultate Buchstaben bezeichnen nach ihrer Stellung im Alphabet und zusammengestellt gewisse Namen oder Sätze ergeben.

Man beabsichtigte dieser ersten Sammlung der Kunstfrüchte weitere Forsetzungen folgen zu lassen; Geldmangel hielt aber davon
1757 ab. Nach 34 Jahren hatte der Banquier Krümmel in Aachen die Lieferung einer Fortsetzung übernommen, konnte aber in Bonn, Cöln, Frankfurt und Aachen keinen Drucker finden, indem sich alle vor den x^2, y^3, a^4 etc. fürchteten.

1754— Gleichzeitig erschien, von dem Mitglied J. Oostwoud aus Ost-
1757 zaandam herausgegeben, ein Monatsblatt, genannt „Maandelijkse Mathematische Liefhebbery", welches ebenfalls manche Mittheilungen aus Meissner's Werken brachte.

Das im Jahre 1699 der Gesellschaft zuerst ertheilte kaiserliche

Privileg wurde 1738 wiederum auf 10 Jahre erneuert. Aus dieser 1738
Erneuerungsurkunde, die im betreffenden Jahre abgedruckt wurde, erfahren wir, dass es allen Buchdruckern bei Pön von 60 Mark löthigen Silbers (die zur Hälfte in die Reichscasse, zur Hälfte in die Societätscasse fiel) verboten wurde, Rechenbücher und Kunstschriften der Societät nachzudrucken.

Während sich in der ersten Hälfte des 18ten Jahrhunderts, trotz aller Abschweifungen zu reinen Aesserlichkeiten einerseits, zu übertriebener Werthschätzung verworrener Zahlen-Aufgaben andererseits, ein reges wissenschaftliches Streben in der Gesellschaft erhielt, trat im 7ten Jahrzehnt ein recht fühlbarer Stillstand der Gesellschaftsthätigkeit zu Tage; es wollte nicht mehr gelingen, die Anzahl der hiesigen Mitglieder durch geschickte Männer in öffentlichen Schulbedienungen zu vergrössern, es nahm also in der eigentlichen Sphäre der Societät das Interesse für dieselbe ab. Immerhin waren noch einige tüchtige Mitglieder vorhanden, welche auch einsahen, dass der Rückgang der Gesellschaft theilweise der etwas schwülstigen, nunmehr gänzlich überlebten Form zuzuschreiben sei, welche die Gründer derselben gegeben. Fanden Aussenstehende ihre Erwartungen durch die Einrichtungen der Societät nicht befriedigt, so sollten diese geändert, die Hemmnisse einer frischeren Thätigkeit beseitigt werden. Schon 1767 wurde eine dahin zielende Reorganisation ins Auge gefasst, dieselbe kam aber erst 1774 zu Stande. Im Vorbericht zu den 1774
damals herausgegebenen Leges heisst es: „Die Veränderungen, welche „itzt mit dem Institut gemacht sind, haben die Absicht, einem neuen „Verfall der Gesellschaft vorzubeugen und sie immer gemeinnütziger „und vollkommener zu machen". Die getroffenen Aenderungen waren aber wohl nicht radical genug; so wurde die gewiss ganz überlebte Sitte der Beinamen noch beibehalten, um erst 15 Jahre später, im Juli 1789, definitiv beseitigt zu werden.

Es wurden nun ordentliche und Ehrenmitglieder unterschieden, nachdem schon früher 3 Wiener Herren, die sich wohl um die Ertheilung des Privilegs verdient gemacht hatten, aufgenommen waren mit dem Zusatz, dass sie unter den Mitgliedern obenan stehen sollten.

Wie es scheint, erweckte die Statutenrevision hier am Orte kein grösseres Vertrauen zu den Leistungen der Gesellschaft, selbst die Vorsteher der Kirchenschulen hielten sich nach wie vor fern. Ganz anders wirkte die Revision aber auf den Stand der auswärtigen Mitglieder, wenigstens stieg die Zahl derselben, nachdem sie lange stationär geblieben war, von 19 im Jahre 1773 auf 32 im Jahre 1790. — Da dieser Zuwachs sich fast ausschliesslich aus Holland und den

Rheinlanden recrutirte, so sehen wir, dass im 9ten Jahrzehnt der Schwerpunkt der Gesellschaft ganz von Hamburg weg und jenen westlichen Staaten zuzustreben schien. — Zweierlei Ursachen haben dieser Bewegung entgegengewirkt; die grossen kriegerischen Ereignisse, welche der französischen Revolution folgten, zogen das nordwestliche Europa aufs Empfindlichste in Mitleidenschaft, hinderten nicht allein den Verkehr, sondern nahmen die Gemüther auch nach anderen Richtungen so in Anspruch, dass für die Erhaltung, geschweige denn für die Ausbreitung einer über so weite Gebiete verzweigten Vereinigung von Schulmeistern und ähnlichen einfachen Leuten kein Raum blieb. Schon von 1790—1800 nimmt die Erwähnung der holländischen Mitglieder in dem uns erhaltenen Cassabuch ab, im neuen Jahrhundert verstummt jede Kunde von ihnen.

War so dem Ueberhandnehmen der auswärtigen Mitglieder ein Damm gesetzt, so brachte andererseits das Jubiläumsjahr 1790 für die einheimischen Mitglieder einen ungeahnten Aufschwung. Es liessen sich in diesem Jahr nicht allein sämmtliche 5 Kirchspielsschulmeister aufnehmen, sondern es bahnte sich auch die Theilnahme studirter Mathematiker an der Gesellschaft den Weg.

Am 6. März 1790 hat man das 100jährige Jubiläum gefeiert. Dass man bei dieser Gelegenheit auch nicht die geringste Publication über die Geschichte der Gesellschaft unternahm, ist sehr zu bedauern; denn damals lag Material dafür genug vor, welches später, durch den grossen Brand des Jahres 1842, verloren ging. Unsere Nachrichten über die frühere Geschichte der Gesellschaft sind auf dasjenige beschränkt, was in hiesigen und auswärtigen Bibliotheken noch aufzufinden. Unser Ehrenmitglied, Herr Professor Bierens de Haan in Leyden, hat uns durch reiche Mittheilungen aus holländischen Bibliotheken zu grossem Dank verpflichtet. Sollten auf anderen Bibliotheken noch Nachrichten über die Gesellschaft, namentlich auch Jahrbriefe aus dem vorigen Jahrhundert, vorhanden sein, so würde die Gesellschaft solche Mittheilungen, als Material für eine bei Gelegenheit des 200jährigen Jubiläums zu sammelnde Geschichte des Vereins, dankbar entgegennehmen.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 2. Ausgegeben im März. 1882.

Berichte über die Versammlungen.

Versammlung vom 12. März 1881.

Herr Kapt. Koldewey hielt einen Vortrag: „Ueber die Veränderung des Magnetismus in eisernen Schiffen". Der Inhalt desselben wird veröffentlicht werden in der demnächst erscheinenden Schrift: Ueber die Veränderungen des Magnetismus in eisernen Schiffen nach Deviationsbeobachtungen auf deutschen Kauffahrteischiffen.

Versammlung vom 9. April 1881.

Der Jahrverwalter machte Mittheilungen über die Cassenverhältnisse des verflossenen Vereinsjahres. Die Einnahmen haben die Ausgaben um ℳ 12. 48 überstiegen, so dass sich der Cassenbestand auf ℳ 829. 47 gehoben hat.

Herr Dr. Sprung hielt einen Vortrag: „Zur Mechanik der Luftbewegung". Ein ausführliches Referat über diesen Vortrag folgt weiter unten.

Versammlung vom 14. Mai 1881.

Es wurde in die Gesellschaft als einheimisches Mitglied aufgenommen Herr Dr. W. Köppen, Meteorologe der Seewarte.

Die Versammlung beschloss ein motivirtes Gesuch an die Oberschulbehörde zu richten des Inhalts, dieselbe möge sich einen ausserordentlichen Beitrag aus Staatsmitteln erwirken zur Anschaffung derjenigen *mathematischen Werke* für die Stadtbibliothek, welche bei

mathematischen Arbeiten unentbehrlich sind, und welche derselben fehlen, auch möge dieselbe veranlassen, dass die besseren mathematischen Journale und Zeitschriften von der Stadtbibliothek gehalten und dass neu erscheinende hervorragende mathematische Werke von derselben angeschafft werden.

Herr Dr. Järisch hielt einen Vortrag: „Die beiden Theorieen der Elasticität in ihrer geschichtlichen Entwickelung".

Der Vortragende beginnt mit einer kurzen Darstellung der Navier'schen Theorie, die sich eng an die Untersuchungen von Laplace über Capillarität anschliesst, und macht besonders auf den Fortschritt aufmerksam, den diese Theorie durch Poisson's Auffassung der Elasticitätskräfte als Druckkräfte erfahren hat. Navier und Poisson gehen von der durch die mechanische Wärmetheorie als falsch erwiesenen Annahme aus, dass sich die Theilchen eines Körpers vor der Verrückung in fester Gleichgewichtslage befinden. Die Theorie steht daher mit den Experimenten im Widerspruch. Cauchy und Lamé umgehen jene Annahme und begründen ihre Theorie allein auf der Voraussetzung einer linearen Beziehung zwischen den Componenten der elastischen Kräfte und den Componenten der Verrückung nach den Coordinaten. Diese neue Theorie widerspricht nicht den Experimenten, soweit es sich um Dilatation, Biegung und Torsion handelt, giebt aber, so sehr sie auch sonst die Einsicht in das Wesen complicirter optischer Erscheinungen förderte, keine genügende Erklärung für gewisse Erscheinungen wie die der Dispersion und Absorption. Zum Schluss führt der Vortragende die Ansicht aus, dass eine einheitliche Erklärung genannter Erscheinungen bei Ausbau der Poisson'schen Theorie auf Grund der Anschauungen der mechanischen Wärmetheorie zu erwarten ist.

Versammlung vom 11. Juni 1881.

Es wird beschlossen, den Herren Hübbe, Reitz und Rümker, welche vor 25 Jahren als Mitglieder der Gesellschaft aufgenommen worden sind, den Glückwunsch der Gesellschaft durch den Vorstand schriftlich ausdrücken zu lassen.

Herr Dr. Schubert hält einen Vortrag: „Ueber die Zahl der Bilder bei einem Winkelspiegel". Der Vortragende bemerkt:

Schon im Jahre 1874 hat Herr Hermann Klein in Pogg. Ann. die genannte Zahl, wenn auch etwas umständlich, bestimmt. Trotzdem wird dieselbe in den Physikbüchern, selbst in Wüllner's, noch immer falsch oder unvollständig angegeben. Deshalb wird die

folgende, einfache Ableitung der fraglichen Zahl wohl nicht überflüssig erscheinen.

Man lege durch den leuchtenden Punkt B die auf den beiden Spiegeln S und S' senkrechte Ebene, und beschreibe um den Schnittpunkt M dieser Ebene mit den beiden Spiegelebenen den durch B gehenden Kreis, welcher S und S' in A und A' schneiden möge. Dadurch erhält man einen Kreis, auf welchem nach dem Reflexionsgesetze die Bilder des Punktes liegen müssen. Die Winkel BMA, BMA', AMA' bezeichne man beziehungsweise mit φ, φ', α. Diejenigen von B ausgegangenen Strahlen, welche zuerst den Spiegel S treffen, werden in der Weise reflectirt, als kämen sie von einem Punkte B_1 her, welcher auf dem Kreise so liegt, dass Bogen AB_1 gleich Bogen AB ist. Folglich ist Bogen BB_1 gleich 2φ. Die von S reflectirten Strahlen treffen nun den Spiegel S' und werden von S' so reflectirt, als kämen sie von einem Punkte B_2 her, so dass Bogen $A'B_1$ gleich Bogen $A'B_2$ ist. Deshalb ist Bogen BB_2 gleich $360^0 - 2\varphi - 2\varphi'$. Wenn man nun so fortfährt, und dabei die Bögen immer von B aus über A hinaus misst, so erhält man:

$$\text{Bogen } BB_{2n+1} = (2n+2)\,\varphi + 2n\varphi',$$
$$\text{und Bogen } BB_{2n} = 360^0 - 2n\varphi - 2n\varphi'.$$

Eine zweite Gruppe von Bildern erhält man dadurch, dass man diejenigen Strahlen verfolgt, welche, von B kommend, zuerst den Spiegel S' treffen. Man bezeichne mit B_k' das so durch $k$te Reflexion entstandene Bild. Es fragt sich nun, welche Indices die letzten Bilder der beiden Gruppen erhalten. Offenbar ist B_k dann das letzte Bild, wenn die dasselbe erzeugenden Strahlen nach ihrer Reflexion von dem einen Spiegel die spiegelnde Fläche des andern Spiegels nicht mehr zu treffen vermögen, d. h. wenn sie, rückwärts verlängert, die Verlängerung dieses Spiegels über die Spiegel-Schnittaxe hinaus treffen würden. In diesem Falle liegt aber B_k zwischen den Punkten C und C', in denen AM und AM' den Kreis zum zweiten Male schneiden. Wenn nun k ungerade ist, so geschah die letzte Reflexion am Spiegel S. Dann kann B_k sehr wohl in den Punkt C' selbst fallen, dagegen nicht in den Punkt C; denn dann fiele es ja mit dem vorangegangenen Bilde zusammen, welches, durch Reflexion von S' entstanden, als letztes zu zählen wäre. Demnach ist:

$$180^0 - \varphi' \leqq BB_{2n+1} < 180^0 + \varphi$$

oder

$$180^0 - \varphi' \leqq 2n\varphi + 2n\varphi' + 2\varphi < 180^0 + \varphi$$

oder

$$\frac{180^0 - \varphi}{\alpha} \leqq 2n + 1 < \frac{180^0 - \varphi}{\alpha} + 1.$$

Analog erhält man für den Fall, dass das letzte in den Bogen CC' fallende Bild eine gerade Nummer trägt:

$$180^0 - \varphi' < BB_{2n} \leqq 180^0 + \varphi,$$

oder $$180^0 - \varphi' < 360^0 - 2n\varphi - 2n\varphi' \leq 180^0 + \varphi,$$

oder $$\frac{180^0 - \varphi}{\alpha} + 1 > 2n \geqq \frac{180^0 - \varphi}{\alpha}.$$

Da diese Grenzen für $2n$ genau dieselben sind, wie die vorher für $2n + 1$ erhaltenen, so ergiebt sich, gleichviel ob die Zahl gerade oder ungerade ist, die ganze Zahl x der mit ungestricheltem B bezeichneten Bilder eindeutig aus:

I. $$\frac{180^0 - \varphi}{\alpha} < x < \frac{180^0 - \varphi}{\alpha} + 1.$$

Die Zahl x' derjenigen Bilder, welche von den zuerst S' treffenden Strahlen herrühren, erhält man analog aus:

II. $$\frac{180^0 - \varphi'}{\alpha} \leq x' < \frac{180^0 - \varphi'}{\alpha} + 1.$$

Die Gesammtzahl aller Bilder ist also $x + x'$. Dieses Resultat lässt sich in Worte fassen, wie folgt:

Wenn zwei Spiegel sich unter dem Winkel α schneiden, und wenn dieser Winkel durch den leuchtenden Punkt in die beiden Theile φ und φ' zerlegt wird, so findet man die Zahl der entstehenden Bilder auf folgende Weise. Man dividire das Supplement von φ durch α. Geht die Division auf, so merke man sich den Quotienten, geht sie nicht auf, die nächsthöhere ganze Zahl. Darauf verfahre man ebenso mit φ'. Die Summe der beiden gemerkten Zahlen ist immer die Zahl der Bilder.

Die Discussion des Resultats für specielle Fälle kann dem Leser überlassen werden. Man beachte dabei, dass in einigen Fällen die beiden zwischen C und C' fallenden, letzten Bilder sich decken.

Versammlung vom 10. September 1881.

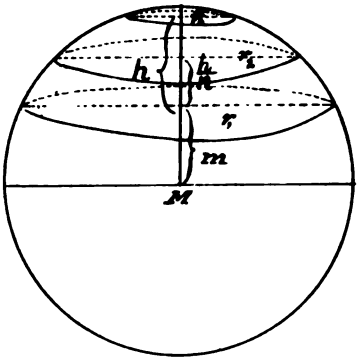
Es wurde als einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen Herr Dr. C. Freund aus Hirschberg, Gymnasiallehrer in Wandsbeck.

Herr Sinram hielt einen Vortrag: „Ueber Berechnung von Volumina von Rotationskörpern und speciell über die Fassberechnung.“ Derselbe bemerkt:

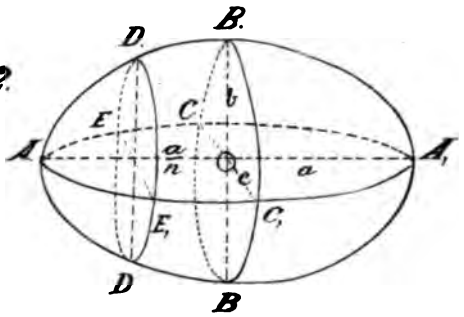
Dreht man einen durch Curven begrenzten Theil einer Ebene um eine Gerade als Achse, so weit bis die Ebene auf ihre Anfangslage zurückfällt, so entsteht ein Rotationskörper. Die Berechnung

Figuren zu dem Vortrag d. Herrn Sinram pag 20.

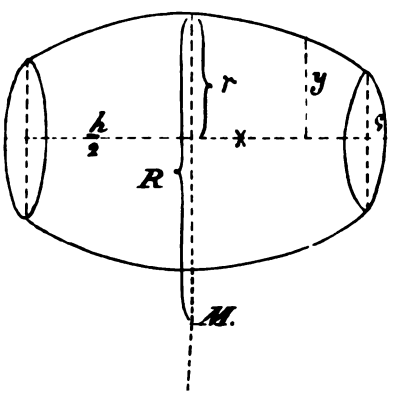
Figur 1.



Figur 2.



Figur 3.



der Volumen solcher Körper mit Hülfe der Algebra geschieht auf folgende Weise.

1. Aufgabe. Es soll das Volumen einer Kugelschicht berechnet werden aus deren Höhe h und den Radien der begrenzenden Kreise r_1 und r_n (Fig. 1).

Auflösung. Man denke sich die Höhe der Kugelschicht in n gleiche Theile getheilt und durch die Theilpunkte Ebenen gelegt parallel den Grundflächen, so entstehen bei einer unendlichen Anzahl solcher Körperschichten auch unendlich viele Cylinder mit der Höhe $\frac{h}{n}$ und den Grundflächen von je zwei aufeinander folgenden parallelen Ebenen. Die Summe aller dieser unendlich kleinen Cylinder ergiebt das Volumen der Kugelschicht. Bezeichnet man die Radien der aufeinander folgenden parallelen Schnittebenen mit $r_1, r_2, r_3 \ldots . r_n$, so ist

$$\text{Vol} = \frac{\pi h}{n}[r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \ldots . r_n^2].$$

Es ist $$m = \frac{r_1^2 - r_n^2 - h^2}{2h}$$ und

$$r_1^2 = R^2 - m^2;\ r_2^2 = R^2 - \left(m + \frac{h}{n}\right)^2;\ r_p^2 = R^2 - \left(m + \frac{(p-1)h}{n}\right)^2$$

folglich

$$\text{Vol} = \frac{\pi h}{n}\left[n(R^2 - m^2) - \frac{2mh}{n}(1 + 2 + \cdots n - 1) - \frac{h^2}{n^2}(1 + 2^2 + \cdots (n-1)^2)\right]$$

$$\text{Vol} = \pi h\left[r_1^2 - \frac{2mh\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{2} - \frac{h^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(2 - \frac{1}{n}\right)}{6}\right].$$

Setzt man $n = \infty$, so ist $\text{Vol} = \pi h\left[r_1^2 - mh - \frac{h^2}{3}\right]$ oder

$$\text{Vol} = \frac{\pi h}{6}[3(r_1^2 + r_n^2) + h^2], \text{ Kugelschicht.}$$

Wenn $r_n = 0$, so ist $\text{Vol} = \frac{\pi h}{6}(3r_1^2 + h^2)$ oder $= \frac{\pi h^2}{2}(3R - h)$, Kugelsegment.

Wenn $r_1 = h = R$, so erhält man $\text{Vol} = \frac{2}{3}R^3\pi$, Halbkugel.

2. Aufgabe. Berechnung des Volumen eines dreiachsigen Ellipsoids (Fig. 2).

Aus den Gleichungen der Ellipsen folgt:

$$y_1 = \pm\frac{b}{n}\sqrt{n^2 - 1};\ y_2 = \pm\frac{b}{n}\sqrt{n^2 - 4};\ y_p = \pm\frac{b}{n}\sqrt{n^2 - p^2}$$

$$z_1 = \pm\frac{c}{n}\sqrt{n^2 - 1};\ z_2 = \pm\frac{c}{n}\sqrt{n^2 - 4};\ z_p = \pm\frac{c}{n}\sqrt{n^2 - p^2},$$

oder

$$y_1 z_1 = \frac{bc}{n^2}(n^2 - 1);\ y_2 z_2 = \frac{bc}{n^2}(n^2 - 4);\ y_p z_p = \sqrt{n^2 - p^2}.$$

Es ist nun $\frac{V}{2} = \frac{\pi a}{n}[bc + y_1 z_1 + y_2 z_2 + \cdots y_p z_p \cdots]$

$= \frac{\pi a}{n}[bc + \frac{bc}{n^2}(n^2 - 1) + \cdots \frac{bc}{n^2}(n^2 - p^2) + \cdots]$

und wenn $n = \infty$, so ist Vol $= \frac{4}{3} abc\pi$, dreiachsiges Ellipsoid.

Die Berechnung der Volumen von Rotationskörpern auf obige elementare Weise setzt nur voraus die Gleichung der gedrehten Curve und die Möglichkeit der Summation der jedesmal entstehenden unendlichen Reihe.

Die Volumen folgender Körper sind auf obige Weise bestimmt:

1. *Pyramide* (Kegel). 2. *Kugelschicht* (Kugelsegment, Kugel).

3. *Dreiachsiges Ellipsoid* (zweiachsiges Ellipsoid, Kugel).

4. *Paraboloid.* Gleichung: $y^2 = 4px$. Die x-Achse ist die Drehachse. Der Radius der Grundfläche ist r und die Höhe h, dann ist Vol $= \frac{r^2 \pi h}{2}$.

5. *Parabolisches Cylindroid.* Die Leitlinie der Parabel ist Drehachse. Die Gleichung der Parabel ist $y^2 = 4p(x - p)$, Höhe des Cylindroids ist h, des Radius der Grundfläche ist R und der Abstand des Scheitels der Parabel von der Leitlinie als Drehachse ist r.

$$\text{Vol} = \frac{\pi h}{15}(3R^2 + 4Rr + 8r^2).$$

6. *Zweischaliges Hyperboloid.* Die x-Achse ist die Drehachse der Hyperbel, der Abstand des Scheitels der Hyperbel vom Fusspunkte der Grenzordinate sei h. $V = \frac{\pi h^2 b^2}{a^2}\left(a + \frac{h}{3}\right)$ oder auch $\frac{\pi h y^2 (3a + h)}{3(2a + h)}$.

Wenn $a = b$, so ist Vol $= \frac{\pi h^2}{3}(3a + b)$.

7. *Einschaliges Hyperboloid.* Die y-Achse ist die Drehachse.

$$\text{Vol} = \frac{2\pi y}{3}(2a^2 + x^2).$$

Setzt man für $2y = h$ und für $x = R$, so ist $V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + 2a^2)$.

Wenn $a = b$, so ist Vol $= \frac{\pi h}{6}(6R^2 - h^2)$.

Fassberechnung.

Für die Dauben eines Fasses wird gewöhnlich eine Curve angenommen, die ein Theil eines Kegelschnittes ist. Im Norden sind gewöhnlich die Dauben der Fässer an beiden Enden gerade, die Curve der Dauben also ähnlich einer Hyperbel oder Parabel, und im Süden sind dieselben an beiden Enden gekrümmt, also ähnlich einem Kreise oder

einer Ellipse. Als allgemeine Fassformel gilt bis jetzt die von Lambert $\text{Vol} = \frac{\pi h}{3}(2r^2 + \varrho^2)$. Das Volumen eines Fasses wird nach dieser Formel im Allgemeinen zu gross; sie ist nur dann richtig, wenn der Mittelpunkt der Krümmung der Dauben mit dem Mittelpunkte des Fasses zusammenfällt. Damit sind auch die Fass-Tabellen, welche nach der Lambert'schen Formel berechnet sind, nicht richtig.

1) Die Krümmung der Dauben sei ein Kreisbogen (Fig. 3).

Die Gleichung des Krümmungskreises ist:

$$(y + R - r)^2 = R^2 - x^2 \quad \text{und} \quad V = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 \pi dx.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\text{Vol} = \pi\left[\frac{h}{3}\left((R-r)(R-r-\varrho)+2R^2+\varrho^2\right)-2R^2(R-r)\arcsin\frac{h}{2R}\right].$$

a) Setzt man in dieser Formel $R = r$, so ist

$$\text{Vol} = \frac{\pi h}{3}(2r^2 + \varrho^2), \text{ Fassformel von Lambert.}$$

b) Setzt man $R = \infty$, so ist $r = \varrho$, dann ist

$2R^2(R - r)\arcsin\frac{h}{2R} = hR(R - r)$, also $\text{Vol} = r^2\pi h$, Cylinder.

c) Setzt man $\varrho = 0$, so ist beim torpedoähnlicher Körper

$$\text{Vol} = \pi\left[\frac{h}{3}\left((R - r)^2 + 2R^2\right) - 2R^2(R - r)\arcsin\frac{h}{2R}\right].$$

Entwickelt man die Kreisfass-Formel auf die oben beschriebene elementare Weise, so erhält man

$$\text{Vol} = \frac{\pi h}{3}\Big[\underbrace{\underbrace{2r^2+\varrho^2}_{\text{Lambert}} - \frac{2}{5}(r-\varrho)^2}_{\text{Parabel-Krümmung}} + \frac{2(r-\varrho)^2(4r+3\varrho)}{35R} + \frac{2(r-\varrho)^3(5r+4\varrho)}{105R^2} + \frac{8(r-\varrho)^4(6r+5\varrho)}{1155R^3} + \cdots\Big].$$

2) Die Krümmung der Dauben sei eine Parabel.

Die Drehaxe steht senkrecht auf der positiven x-Achse. Der Abstand des Scheitels von der Drehachse sei r und der Abstand der Endpunkte der Parabel von der Drehaxe sei ϱ. Die grösste Ordinate der Parabel sei $y = \frac{h}{2}$ und Gleichung der Parabel $y^2 = 4p(r - x)$, so ist $\text{Vol} = \frac{\pi h}{15}(8r^2 + 4r\varrho + 3\varrho^2)$, oder auch $= \frac{\pi h}{3}\left[2r^2+\varrho^2-\frac{2}{5}(r-\varrho)^2\right]$.

Wenn $r = 0$, so ist $\text{Vol} = \frac{8r^2\pi h}{15}$, torpedoähnlicher Körper.

3) Die Krümmung der Dauben sei die einer Hyperbel.

Die Gleichung der Hyperbel in Bezug auf die Drehachse ist

$$a^2y^2 - b^2(r + a - x)^2 = -a^2b^2, \text{ und}$$

$$\text{Vol} = 2\pi\left[\frac{h}{6}\left((r+a)(r+a+\varrho) + 2a^2 + \varrho^2\right) + \frac{a^2h(r+a)}{2\sqrt{(r-\varrho)(r-\varrho+2a)}}\, l\, \frac{r-\varrho+a-\sqrt{(r-\varrho)(r-\varrho+2a)}}{a}\right].$$

Wenn $r + a = 0$, so entsteht ein einschaliges Hyperboloid, dessen Vol $= \frac{\pi h}{3}(2r^2 + \varrho^2)$.

Wenn $a = b$, so ist $a = \frac{h^2 - 4(r-\varrho)^2}{8(r-\varrho)}$, und

$$V = \pi\left[\frac{h}{3}\left((r+a)(r+a+\varrho) + 2a^2 + \varrho^2\right) + 2a^2(r+a)\, l\, \frac{h-2(r-\varrho)}{h+2(r-\varrho)}\right].$$

4) Die Krümmung der Dauben sei die einer Ellipse.

Gleichung der Ellipse: $a^2(y + b - r)^2 + b^2x^2 = a^2b^2$.

$$\text{Vol} = \pi\left[\frac{h}{3}\left((b-r)(b-r-\varrho) + 2b^2 + \varrho^2\right) - 2ab(b-r)\arcsin\frac{h}{2a}\right].$$

Wenn $b = r$, so ist Vol $= \frac{\pi h}{8}(2r^2 + \varrho^2)$, Fassformel von Lambert.

Beispiel 1:

$r =$ 40 cm	Vol. nach der	Kreis-Fassformel	$=$ 857,2 lt
$\varrho =$ 20 cm	„ „ „	Parabelformel	$=$ 853,7 lt
$h =$ 237 cm	„ „ „	Lambert'schen Formel	$=$ 893,5 lt.

Beispiel 2:

Torpedoähnlicher Körper. $h = 200$ cm, $r = 40$ cm, also $\varrho = 0$, $R = 145$ cm.

Vol. nach der	Kreisfass-Formel	$=$ 560058 cbcm
„ „ „	Parabel „	$=$ 536165 „
„ „ „	gleichs. Hyperbel-Formel	$=$ 570940 „
„ „ „	Lambert'schen „	$=$ 670206 „

Oberfläche eines Fasses mit Kreis-Krümmung:

$$= 2\pi\left[\varrho^2 + Rh - 2R(R-r)\arcsin\frac{h}{2R}\right].$$

Oberfläche eines Fasses mit Parabel-Krümmung:

$$= \frac{2\pi}{3}\left[3\varrho^2 + 2rh + \varrho h\right].$$

Versammlung vom 15. October 1881.

Herr Prof. Kiessling hielt einen Vortrag über die Entwicklung des Imaginären in der Analysis. Nach einem kurzen Hinweis auf

das erste vereinzelte Vorkommen imaginärer Grössen bei den italienischen Algebristen, bei Albert Girard (Invention nouvelle en l'Algèbre, Amsterdam 1629), und in Descartes' Geometrie (1637) bespricht der Vortragende ausführlich die ersten Versuche einer geometrischen Construction der imaginären Zahlen, durch welche die Erkenntniss ihrer wahren analytischen Bedeutung angebahnt wird. Es sind dies die Untersuchungen von Wallis, Opera math. Tom. II, Cap. 66—69, 1693. Kühn, Novi commentarii Acad. Petrop. T. III p. 170, 1750. Meditationes de quantitatibus imaginariis construendis. Foncenex, Reflexions sur les quantités imaginaires, Misc. philos. math. soc. Taurin. I p. 122. 1759. Buée, Philos. Trans. 1806, p. 23—88.

Der Algorithmus der imaginären Zahlen wurde ganz systematisch bereits von Euler entwickelt; doch betrachtet sie derselbe immer nur als Rechnungsformen, die an sich ohne reale Bedeutung, diese erst durch solche Verbindungen erhalten, bei denen das Imaginäre wieder verschwindet. Auch Cauchy betrachtet sie in seinen ersten Arbeiten nur der aus ihnen abzuleitenden Folgen halber als zulässige Grössenformen. Der erste, der die geometrische Construction der imaginären Zahlen consequent entwickelt und dementsprechend die Gesetze der Addition und Multiplication geometrisch dargestellt hat, ist Argand (Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques). Ohne die Arbeit von Argand zu kennen, veröffentlichte Français mehrere auf denselben Gegenstand bezügliche Arbeiten, die von Gergonne und Lacroix eingehende, von interessanten historischen Bemerkungen begleitete Besprechungen erfuhren (Gergonne, Annales T. IV p. 61. 146. 222. 367. T. V p. 197). Bemerkenswerth sind auch die Untersuchungen von John Warren, Treatise on the geometrical representation of the square roots of negative quantities. Cambridge 1828, und mehrere Abhandlungen desselben Autors in den Philos. Trans. 1829, p. 241 und 339.

Die Erkenntniss der wahren Bedeutung der imaginären Zahlen ist jedoch das unbestreitbare Verdienst von Gauss, der dieselben in kurzen, aber scharfen Umrissen zum erstenmal wissenschaftlich begründete in einer Mittheilung in den Gött. gel. Anzeigen, 1831, St. 64. Gauss zeigte zuerst, dass jede zweistufige Mannigfaltigkeit, d. h. jede Anordnung von Reihen in Reihen, eindeutig sich nur mit Hilfe der vier Einheiten $+1$, -1, $+i$ und $-i$ den reellen und complexen Zahlen zuordnen lasse. Die Frage, warum die Relationen zwischen Dingen, die eine mehr als zweistufige Mannigfaltigkeit dar-

bieten, nicht noch anderen in der allgemeinen Arithmetik zulässige Formen von Grössen liefern können — deren Beantwortung Gauss in Aussicht gestellt, aber nicht gegeben hat — hat zu mannigfachen Untersuchungen über die allgemeine Natur complexer Grössen Veranlassung gegeben. Als eines der interessantesten Ergebnisse dieser Untersuchungen ist das von Hamilton entwickelte System der Quaternionen zu bezeichnen, deren analytische Bedeutung der Vortragende eingehend erörtert, indem er namentlich zeigt, nach welchen Gesichtspunkten man in einem System allgemein-complexer Zahlen gewisse Eigenschaften der gemeinen Species aufzugeben hat.

Zum Schluss werden die Grundzüge der von Cauchy begründeten Theorie der Functionen complexer Variabeln entwickelt. Der vorgerückten Zeit halber muss eine Darlegung der Principien der Riemann'schen Theorie der Functionen complexer Variabeln auf eine spätere Gelegenheit verschoben werden.

Versammlung vom 12. November 1881.

Herr Dr. Schubert hielt einen Vortrag: „Ueber Abbildungen". Ein ausführlicheres Referat über diesen Vortrag folgt weiter unten.

Versammlung vom 10. December 1881.

Herr Dr. Emil Liebenthal aus Bergen auf Rügen wird als hiesiges Mitglied aufgenommen.

Herr Bubendey machte eine Mittheilung über durch Beobachtungen festgestellte periodische Functionen und erläutert das Gesagte durch graphische Darstellungen der Beobachtungen von Fluth und Ebbe in der Ostsee.

Herr Krüss erläuterte an Modellen die Wirkung von drei zu einer Ecke verbundenen Spiegeln unter Bezugnahme auf die Arbeiten von Prof. Hess in Marburg.

Herr Dr. Schubert zeigte einen von ihm gefundenen elementaren Beweis des Feuerbach'schen Satzes. Dieser Beweis wird mit Rücksicht auf die Zwecke des Unterrichts in dem nächsten Schulprogramm der Gelehrtenschule veröffentlicht werden.

Zur Theorie der atmosphärischen Wirbel.*)

Die für die Meteorologie, Geologie etc. sehr wichtige Frage nach der relativen Bewegung eines Körpers, welcher an die rotirende Erdoberfläche oder eine dieser parallele Oberfläche gebunden, sonst aber äusseren Kräften nicht unterworfen ist, lässt sich mit Hülfe des bekannten und gewissermassen selbstverständlichen Satzes beantworten, dass die absolute Bewegung in der geodätischen (kürzesten) Linie, und zwar mit gleichförmiger Geschwindigkeit von statten geht, falls alle den Körper beeinflussenden Kräfte genau senkrecht zur Oberfläche (nach innen) gerichtet sind.

Es soll demnach zunächst angenommen werden, dass die Anziehungskraft des Rotationskörpers „Erde" normal zur Oberfläche stehe; um die Vorstellung zu fixiren, betrachten wir die nördliche Hemisphäre. Bezeichnet man mit

φ die Polhöhe (auf der Kugel: geographische Breite),

V und v die Geschwindigkeit der absoluten und relativen Bewegung,

Θ und ϑ die Azimuthe dieser Bewegungen, von N über E nach S gerechnet,

r den Abstand von der Erdaxe,

ω die Winkelgeschwindigkeit üer Erdrotation,

v_n und v_e die Componenten der relativen Geschwindigkeit nach Nord und Ost,

so ist offenbar:

$$(1) \qquad \begin{cases} v_n = v \cos \vartheta = V \cos \Theta \\ v_e = v \sin \vartheta = V \sin \Theta - r\omega. \end{cases}$$

Nach einem allgemeinen, für die geodätische Linie auf Rotationskörpern gültigen Satze ist aber:

$$(2) \qquad \sin \Theta = \frac{C}{r} \quad (C \text{ eine Constante}).$$

Nimmt man diese Bedingung hinzu, so erhält man aus (1):

$$(3) \qquad \begin{cases} v_n = V\sqrt{1 - \frac{C^2}{r^2}} \\ v_e = \frac{VC}{r} - r\omega, \end{cases}$$

*) Im XV. Bande der „Zeitschrift der Österr. Gesch. für Met." findet man in dem Aufsatze: „Die Trägheitscurven auf rotirenden Oberflächen als ein Hülfsmittel beim Studium der Luftbewegung" einen Versuch, den Einfluss der Erdrotation auf die Luftbewegung in elementarer Weise zu erläutern. Der erste Theil des vorstehenden Artikels bildet eine Verallgemeinerung der dort eingeschlagenen Methode.

und hieraus durch Differentiation nach der Zeit t:

$$\begin{cases} \frac{dv_n}{dt} = \frac{VC^2}{r^3\sqrt{1-\frac{C^2}{r^2}}}\frac{dr}{dt} = \frac{V\sin^2\Theta}{r\cos\Theta}\frac{dr}{dt} \\ \frac{dv_e}{dt} = -\left(\frac{VC}{r^2}+\omega\right)\frac{dr}{dt}. \end{cases}$$

Substituirt man hierin nach den Gl. (1) und (2): v und ϑ für $V\sin\Theta$, $\cos\Theta$ und $\frac{C}{r}$, und berücksichtigt die Relation:

$$\frac{dr}{dt} = -\frac{ds}{dt}\cos\vartheta\sin\varphi = -v\cos\vartheta\sin\varphi, \tag{4}$$

deren Richtigkeit unmittelbar geometrisch ersichtlich ist, so ergiebt sich:

$$\begin{cases} \frac{dv_n}{dt} = -\left(\frac{v^2\sin\vartheta\sin\vartheta}{r}+2v\omega\sin\vartheta+r\omega^2\right)\sin\varphi \\ \frac{dv_e}{dt} = \left(\frac{v^2\sin\vartheta\cos\vartheta}{r}+2v\omega\cos\vartheta\right)\sin\varphi. \end{cases}$$

Die Thatsache, dass ein beweglicher Körper auf der Horizontalebene nicht von selbst in Bewegung geräth, beweist uns, dass für $v = 0$ die Beschleunigung der relativen Bewegung Null wird, was vorstehenden Gleichungen zufolge nicht der Fall wäre; wohl aber verschwinden beide Componenten der relativen Beschleunigung mit $v = 0$, sobald man auf der Anfangs gedachten Oberfläche ausser der normalen Kraft noch eine nach Nord gerichtete horizontale beschleunigende Kraft im Betrage von $r\omega^2\sin\varphi$ auftreten lässt; eine solche ist aber als horizontale Componente der zur Oberfläche nicht genau normalen Anziehungskraft in der That vorhanden. Die Componenten der Beschleunigung sind also in Wirklichkeit folgende:

$$\begin{cases} \frac{dv_n}{dt} = -\left(\frac{v^2\sin\vartheta}{r}+2v\omega\right)\sin\varphi\sin\vartheta \\ \frac{dv_e}{dt} = \left(\frac{v^2\sin\vartheta}{r}+2v\omega\right)\sin\varphi\cos\vartheta. \end{cases} \tag{5}$$

Aus der Form dieser Ausdrücke ist unmittelbar ersichtlich, dass sie die Componenten einer horizontalen Beschleunigung

$$B = \frac{v^2\sin\vartheta\sin\varphi}{r}+2v\omega\sin\varphi \tag{6}$$

repräsentiren, welche genau senkrecht zur relativen Bewegung nach rechts gerichtet ist.

Diese Beschleunigung bezieht sich aber nicht auf die Abweichung der Krümmung der relativen Bahn von der geodätischen Linie (welche wir suchen), sondern auf die Abweichung von der Loxodrome; denn

aus $\frac{dv_n}{dt} = 0$ und $\frac{dv_e}{dt} = 0$ ergiebt sich: $v_n = \text{const.}$ und $v_e = \text{const.}$, somit nach (1): tang $\vartheta = \text{const.}$, d. i. die Gleichung der Loxodrome. In der That stellt das erste Glied rechts in (6) nichts Anderes dar, als die Centrifugal-Beschleunigung einer loxodromischen Bewegung, bezogen auf die Bewegung in der geodätischen Linie; in anderen Worten: $\frac{r}{\sin\vartheta \sin\varphi}$ bedeutet den Radius der geodätischen Krümmung für die Loxodrome eines Rotationskörpers*).

Hieraus folgt: Die Beschleunigung der relativen „Trägheitsbewegung" auf der rotirenden Erdoberfläche, bezogen auf die Abweichung der Bewegung von der geodätischen Linie, steht stets senkrecht zur jeweiligen Bewegungsrichtung und wird durch den Ausdruck:

(7) $$A = 2v\omega \sin\varphi$$

repräsentirt; in der Meteorologie wird diese Beschleunigung als „ablenkende Kraft der Erdrotation" bezeichnet. Die relative Trägheitsbewegung ist also eine gleichförmige und gekrümmte, und zwar ergiebt sich für den Krümmungsradius vermöge der Gleichung $\frac{v^2}{\varrho} = 2v\omega \sin\varphi$ der Ausdruck:

$$\varrho = \frac{v}{2\omega \sin\varphi}.$$

Fragt man beispielsweise, wie sich ein Körper (z. B. eine Luftmasse) auf der Erdoberfläche unter dem Einflusse einer Centralkraft bewegt, wenn der Reibungswiderstand der Geschwindigkeit proportional angenommen wird, so ergeben sich dem Obigen zufolge als Ausgangspunkte der Rechnung folgende Differential-Gleichungen:

(8) $$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = X + 2\omega \sin\varphi \frac{dy}{dt} - k\frac{dx}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = Y - 2\omega \sin\varphi \frac{dx}{dt} - k\frac{dy}{dt}, \end{cases}$$

worin X und Y die Componenten der beschleunigenden Central-

*) Bei Rotationskörpern lautet der Ausdruck für den geodätischen Contingenzwinkel:

$$dk = -\frac{d(r\sin\vartheta)}{r\cos\vartheta}.$$

Für die Loxodrome ($\vartheta = \text{const.}$) geht derselbe über in:

$$dk = -\frac{\sin\vartheta\, dr}{r\cos\vartheta}.$$

Der Radius der geodätischen Krümmung ist somit:

$$\varrho = \frac{ds}{dk} = -\frac{dr}{\cos\vartheta \sin\varphi} : -\frac{\sin\vartheta\, dr}{r\cos\vartheta} = \frac{r}{\sin\vartheta \sin\varphi},$$

wie oben angegeben.

kraft, und k den Reibungscoefficienten bezeichnen; die geographische Breite φ soll als constant betrachtet werden.

Führt man Polarcoordinaten ein, indem man setzt:

$$x = p\cos\beta; \qquad y = p\sin\beta,$$

woraus allgemein zunächst die Relationen:

$$\frac{dx}{dt} = \cos\beta\,\frac{dp}{dt} - p\sin\beta\,\frac{d\beta}{dt}; \quad \frac{dy}{dt} = \sin\beta\,\frac{dp}{dt} + p\cos\beta\,\frac{d\beta}{dt}$$

und durch die zweite Differentiation zwei andere, leicht abzuleitende Ausdrücke sich ergeben, und substituirt diese in (8), so erhält man schliesslich:

$$(9) \qquad \begin{cases} X = P_1\cos\beta - P_2\sin\beta \\ Y = P_1\sin\beta + P_2\cos\beta. \end{cases}$$

Darin haben P_1 und P_2 folgende Bedeutung:

$$(10) \qquad \begin{cases} P_1 = \frac{d^2p}{dt^2} - p\left(\frac{d\beta}{dt}\right)^2 - 2\omega\sin\varphi p\,\frac{d\beta}{dt} + k\,\frac{dp}{dt} \\ P_2 = 2\,\frac{dp}{dt}\frac{d\beta}{dt} + p\,\frac{d^2\beta}{dt^2} + 2\omega\sin\varphi\,\frac{dp}{dt} + kp\,\frac{d\beta}{dt}. \end{cases}$$

Die von vornherein gestellte Bedingung, dass X und Y Componenten einer Centralkraft seien (wie sie in den atmosphärischen Wirbeln existirt), ist offenbar gleichbedeutend damit, dass $P_2 = 0$ sei, denn P_2 repräsentirt den Gl. (9) zufolge eine senkrecht zum Radiusvector gerichtete Kraft; die Gl. $P_2 = 0$ kann aber in folgender Weise geschrieben werden:

$$(11) \qquad \frac{d}{dt}\left(p^2\frac{d\beta}{dt}\right) + \frac{d}{dt}(\omega\sin\varphi\cdot p^2) + kp^2\frac{d\beta}{dt} = 0.$$

Setzt man

$$(12) \qquad \frac{1}{2}p^2\frac{d\beta}{dt} = S \text{ (Sectorengeschwindigkeit)},$$

so verwandelt sich die Gleichung in:

$$(13) \qquad 2\frac{dS}{dt} + \frac{d}{dt}(\omega\sin\varphi\cdot p^2) + 2kS = 0.$$

Die Centralkraft P_C selbst ist $= -P_1$; wenn die radiale, zum Centrum gerichtete Geschwindigkeitscomponente $-\frac{dp}{dt}$ mit v_p, die zum Radiusvector senkrechte Componente $p\frac{d\beta}{dt}$ mit v_τ bezeichnet wird, so kann man schreiben:

$$(14) \qquad P_C = \frac{dv_p}{dt} + kv_p + \frac{v_\tau^2}{p} + 2v_\tau\omega\sin\varphi.$$

Die Bedeutung der einzelnen Glieder ist in dieser Form leicht zu erkennen, und es ergiebt sich demnach, dass beispielsweise die

zum barometrischen Minimum gerichtete Kraft der Luftdruckdifferenzen (Gradientkraft) folgende Aufgaben hat: 1) die Geschwindigkeit der radialen Bewegung zu vergrössern; 2) die der radialen Geschwindigkeitscomponente entsprechende Reibung zu überwinden; 3) der Centrifugalkraft nach Massgabe der zum Radiusvector senkrechten Geschwindigkeitscomponente und des jeweiligen Radiusvectors, und 4) der „ablenkenden Kraft der Erdrotation", insofern sie durch diese Geschwindigkeitscomponente bedingt wird, das Gleichgewicht zu halten.

Setzt man in der Gleichung (13) $k = 0$ und $\omega = 0$, so ergiebt sich

$$S = \text{const.},$$

d. i. das Princip der Erhaltung der Flächen- oder Sectoren-Geschwindigkeit; Gl. (13) ist also als Erweiterung dieses Princips für den Fall der relativen Bewegung auf der Erdoberfläche und des Vorhandenseins von Reibungswiderständen zu betrachten. — In den zwei speciellen Fällen, dass entweder $\omega = 0$, oder $k = 0$ ist, kann dieselbe sogleich integrirt werden; im ersten Falle (absolute Bewegung mit Reibungswiderständen) ergiebt sich: $S = S_0 e^{-kt}$; die Sectorengeschwindigkeit nimmt also mit wachsendem t ab; im zweiten Falle (relative Bewegung ohne Reibung) erhält man $S = S_0 + \frac{1}{2}\omega \sin\varphi(p_0^2 - p^2)$; die Winkelgeschwindigkeit ist also hier gerade so wie bei der absoluten Bewegung eine blosse Function des Radiusvectors, doch wächst dieselbe mit der Annäherung an das Centrum im stärkeren Grade, als es nach dem Flächensatze der Fall ist.

Die Bahn des Lufttheilchens kann mit Hülfe der Gleichung (13), welche die Winkelgeschwindigkeit bestimmt, erst dann gefunden werden, wenn das Gesetz gegeben ist, nach welchem die radiale Geschwindigkeit mit der Annäherung an das Centrum sich ändert.

Einstufige Ausartungen der quadratischen Transformation der Ebene.

Die Methode, nach welcher ich in meinem „Kalkül der abzählenden Geometrie" (Teubner 1879, § 31) die Anzahlen für zwei collineare Bündel bestimmt habe, führt auch zu den Anzahlen für die *quadratische Transformation* der Ebene*), d. h. zu derjenigen

*) Diese Transformation ist gelegentlich schon von Poncelet (Traité des propr. proj. des figures, 1822, p. 198) und Plücker (Crelle's Journal, Bd. 5) erwähnt, dann ausführlicher behandelt von Magnus (Samml. von Aufg. u. d[illegible]

Verwandtschaft zwischen zwei Ebenen, bei welcher jedem Punkte der einen Ebene nur ein einziger Punkt der andern Ebene entspricht, den Punkten einer Geraden aber immer die Punkte eines Kegelschnitts entsprechen. Dabei erscheinen dann die gesuchten Anzahlen abhängig von den Anzahlen für gewisse, speziellere, quadratische Transformationen, deren Constantenzahl durch die Spezialisirung um 1 kleiner geworden ist. Indem es mir gelang, diese spezielleren oder ausgearteten Transformationen nebst ihren Eigenschaften aufzufinden, und ihre Anzahlen grösstentheils durch die bekannten Anzahlen für projective und collineare Gebilde auszudrücken, erhielt ich nach und nach die Lösung der Anzahl-Probleme auch für die allgemeine quadratische Transformation der Ebene*). Hier jedoch will ich mich damit begnügen, die genannten, ausgearteten Transformationen zu erzeugen und zu beschreiben, ohne auf jene Anzahl-Probleme irgendwie einzugehen.

Um in zwei festen Ebenen E und E' eine quadratische Abbildung herzustellen, wollen wir folgenden Weg einschlagen. Wir erzeugen zunächst in zwei anderen Ebenen D und D' eine besondere Transformation dadurch, dass wir immer je zwei solche Punkte A und A' einander zuordnen, deren Verbindungsgerade zwei willkürlich angenommene Strahlen g_1 und g_2 zugleich schneidet. Dann nehmen wir zwei Punkte P und P' an, von denen aus wir die Ebenen D und D' beziehungsweise auf die Ebenen E und E' projiciren. Um also auf diesem Wege zu einem beliebigen in E gelegenen Punkte B dessen in E' liegendes Transformationsbild B' zu finden, müssen wir B mit P verbinden, den Schnittpunkt A der erhaltenen Verbindungsgeraden mit der Ebene D bestimmen, dann von A aus diejenige Gerade ziehen, welche g_1 und g_2 zugleich schneidet, den Schnittpunkt A' der zuletzt gezogenen Geraden mit der Ebene D' aufsuchen, und endlich A' mit P' verbinden. Dann ist der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden $P'A'$ mit der Ebene E' das gesuchte Bild P'. Durchläuft der Punkt B in der Ebene E eine gerade Linie, so durchläuft auch A eine gerade Linie, dagegen A' einen

analyt. Geom., Berlin 1833), Steiner (Systemat. Entw. u. s. w.), Cremona (Abh. der Bologner Akademie, 1863 u. 1865), Clebsch (vgl. u. a die von Lindemann herausg. Vorles., p. 474 u. f.).

*) Beispielsweise führe ich an, dass 59 quadratische Transformationen in zwei festen Ebenen E und E' dadurch bestimmt sind, dass die 14 Punkte, welche in E' 14 in E gegebenen Punkten entsprechen, auf 14 in E' gegebenen Geraden liegen sollen, oder, was dasselbe ist, dass die 14 Kegelschnitte, welche in E 14 in E' gegebenen Geraden entsprechen, durch 14 in E gegebene Punkte gehen sollen.

Kegelschnitt, weil alle Strahlen, welche die eben genannte gerade Linie, sowie g_1 und g_2 zugleich schneiden, ein Hyperboloid erzeugen. Wenn aber A' einen Kegelschnitt durchläuft, so muss auch seine Projection B' dies thun. Daraus folgt, dass bei unserer Transformation den Punkten einer Geraden die Punkte eines Kegelschnitts entsprechen. Deshalb ist die Transformation eine quadratische.

Es fragt sich nun, auf welche Weise in jeder der beiden Ebenen E und E' das *Fundamentaldreieck* entsteht, durch dessen Ecken die den Strahlen der einen Ebene entsprechenden ∞^2 Kegelschnitte hindurch gehen müssen. Die beiden die Transformation vermittelnden Strahlen g_1 und g_2 mögen die Ebenen D und D' beziehungsweise in H_1 und H_2, H_1' und H_2' schneiden. Ferner schneide H_1H_2 die Ebene D' in H_3', und $H_1'H_2'$ die Ebene D in H_3. Dann fällt das Bild jedes auf H_1H_2 liegenden Punktes in den Punkt H_3'. Ebenso entspricht der Punkt H_2' jedem Punkte auf H_1H_3, und der Punkt H_1' jedem Punkte auf H_2H_3. Analog verhalten sich die Punkte H_1, H_2, H_3 zu den Geraden $H_2'H_3'$, $H_3'H_1'$, $H_1'H_2'$. Da nun jede Gerade der einen Ebene die Seiten des Dreiecks $H_1H_2H_3$ oder $H_1'H_2'H_3'$ schneidet, und diesen Schnittpunkten die Ecken des andern Dreiecks entsprechen, so muss auch der Kegelschnitt, welcher jener Geraden entspricht, durch die Ecken des Dreiecks $H_1'H_2'H_3'$, resp. $H_1H_2H_3$ gehen. Projicirt man nun diese Dreiecke von P und P' aus auf E und E', so entstehen in E und E' zwei Dreiecke $F_1F_2F_3$ und $F_1'F_2'F_3'$, welche dieselben Eigenschaften haben wie $H_1H_2H_3$ und $H_1'H_2'H_3'$, und deshalb die gesuchten Fundamentaldreiecke sind.

Um nun aus der besprochenen Erzeugung der allgemeinen quadratischen Transformation, welche von 14 Constanten abhängt, die von 13 Constanten abhängigen Ausartungen zu erhalten, ertheilen wir den erzeugenden Gebilden g_1, g_2, D, D', P, P' spezielle Lagen zu einander. Auf diese Weise gelangen wir zu den im Folgenden beschriebenen Ausartungen.

1) Die Ausartung σ erhält man dadurch, dass man g_1 und g_2 sich schneiden lässt. Bei σ entsprechen sich die Punkte auf E und E' collinear. Auf E liegen die drei Fundamentalpunkte F_1, F_2, F_3 in gerader Linie, und ebenso liegen, ihnen collinear entsprechend, auch F_1', F_2', F_3' in gerader Linie. Einer beliebigen, in der einen Ebene liegenden Geraden entspricht in der andern Ebene immer ein in ein Geradenpaar zerfallener Kegelschnitt, nämlich derjenige, welcher aus der collinear zugeordneten Geraden und der festen Geraden besteht, auf welcher die drei Fundamentalpunkte der festen Ebene liegen. Die Constantenzahl von σ ist 13, da 8 einfache Bedingungen die

Collineation, und 5 einfache Bedingungen die Lage der drei Fundamentalpunkte der einen Ebene bestimmen.

2) Die Ausartung ψ_3 erhält man dadurch, dass man die Geraden g_1 und g_2 unendlich nahe legt, ohne dass sie sich schneiden. ψ_3 unterscheidet sich von der allgemeinen Ausartung nur dadurch, dass in der Ebene E die beiden Fundamentalpunkte F_1 und F_2, und in E' die Punkte F_1' und F_2' unendlich nahe liegen, so dass die sämmtlichen Kegelschnitte, welche in einer Ebene dem Strahlenfeld der andern Ebene entsprechen, sich in demselben Punkte berühren. Durch Veränderung der Indices erhält man die Beschreibung der Ausartungen ψ_1 und ψ_2.

3) Die Ausartung τ_1 erhält man dadurch, dass man die Gerade g_2 in die Ebene E legt. Bei τ_1 sind die beiden Fundamentaldreiecke allgemein. Jedoch entspricht allen Punkten eines durch F_1 gehenden Strahles ein und derselbe bestimmte Punkt auf $F_2'F_3'$, und zwar so, dass den durch F_1 gehenden Strahlen sich die Punkte auf $F_2'F_3'$ projectiv zuordnen. Umgekehrt entspricht einem auf F_2F_3 liegenden Punkte jeder Punkt eines projectiv zugeordneten Strahles durch F_1'. Es entsprechen sich also projectiv einerseits der Strahlenbüschel, dessen Scheitel F_1 ist, und die gerade Punktreihe $F_2'F_3'$, andrerseits der Strahlenbüschel, dessen Scheitel F_1' ist, und die gerade Punktreihe F_2F_3, jedoch so, dass immer incidente Elemente der einen Ebene incidenten Elementen der andern Ebene entsprechen. Dabei ordnen sich den Punkten F_2 und F_3 die Strahlen $F_1'F_3'$ und $F_1'F_2'$ zu, ferner den Strahlen F_1F_2 und F_1F_3 die Punkte F_3' und F_2'. Will man zu einem in E liegenden Punkte A das Bild A' in E' finden, so hat man A mit F_1 zu verbinden, und den diesem Strahle projectiv entsprechenden Punkt auf $F_2'F_3'$ aufzusuchen. Dann ist dieser Punkt das gesuchte Bild A'. Um das Bild einer in E liegenden Geraden zu finden, suche man deren Schnittpunkt mit F_2F_3, und darauf im Strahlbüschel F_1' den diesem Punkte zugeordneten Strahl. Fasst man dann den so bestimmten Strahl mit der Geraden $F_2'F_3'$ zu einem Geradenpaar zusammen, so erhält man in diesem als Kegelschnitt zu betrachtenden Geradenpaare das gesuchte Bild. Die Ausartung τ_1 ist durch die beiden Fundamentaldreiecke noch nicht vollkommen bestimmt, wohl aber, sobald noch eine einfache Bedingung dazukommt, etwa die, dass der Punkt, welcher einem in E gegebenen Punkte entspricht, auf einer in E' gegebenen Geraden liegen soll; denn dann sind von den projectiven Grundgebilden drei Paare entsprechender Elemente bekannt. Demnach ist die Constantenzahl von $\tau_1 = 6 + 6 + 1$. Aus der Beschreibung von τ_1 geht die von τ_2 und τ_3 durch blosse Vertauschung der Indices hervor.

4) Die Ausartung ϱ_3 erhält man dadurch, dass man g_1 und g_2 sich auf der Ebene E selbst schneiden lässt. Bei ϱ_3 liegen die beiden Fundamentalpunkte F_1 und F_2 in einem Punkte F unendlich nahe, jedoch so, dass ihre Verbindungsgerade f_3 eine ganz bestimmte Lage hat. Der dritte Fundamentalpunkt F_3 hat eine allgemeine Lage zu dem Coincidenzpunkte F und dem Strahle f_3, so dass also der Strahl FF_3 im allgemeinen von f_3 verschieden ist. Die drei Fundamentalpunkte in E' haben eine ganz allgemeine Lage zu einander. Durch F_3' geht ferner ein ausgezeichneter, im allgemeinen von $F_3'F_1'$ und $F_3'F_2'$ verschiedener Strahl h', dessen Punkte den durch den Coincidenzpunkt F gelegten Strahlen projectiv entsprechen, und zwar so, dass F_3' dem Strahle f_3, und der Schnittpunkt von h' mit $F_1'F_2'$ dem Strahle FF_3 entspricht. Einem in E beliebig gegebenen Punkte A entspricht in E' derjenige Punkt auf h', welcher dem Verbindungsstrahle FA projectiv entspricht. Einer in E beliebig gegebenen Geraden entspricht in E' immer der aus h' und $F_1'F_2'$ bestehende, zerfallene Kegelschnitt. Einem beliebigen Punkte in E' entspricht in E immer ein und derselbe Punkt F. Um zu einer beliebigen in E' gegebenen Geraden das in E liegende Bild zu finden, suche man den Schnittpunkt dieser Geraden mit h', und bestimme denjenigen Strahl durch F, welcher diesem Schnittpunkte entspricht. Dann ist der aus dem so bestimmten Strahle und dem constanten Strahle FF_3 bestehende, zerfallene Kegelschnitt das gesuchte Bild. Sind in den beiden Ebenen E und E' die Punkte $F_1, F_3, F_1', F_2', F_3'$, ferner die Strahlen f_3 und h gegeben, und ist ausserdem in E' eine Gerade gegeben, auf welcher der entsprechende Punkt zu einem in E liegenden Punkte liegen soll, so ist die Ausartung ϱ_3 vollkommen bestimmt. Ihre Constantenzahl ist daher $5 \cdot 2 + 2 \cdot 1 + 1$. Aus der Beschreibung von ϱ_3 geht die von ϱ_1 und ϱ_2 durch Vertauschung der Indices hervor. Ausserdem aber erhält man noch drei neue Ausartungen ϱ_1', ϱ_2', ϱ_3', wenn man bei der Beschreibung von ϱ_1, ϱ_2, ϱ_3 die gestrichelten Symbole durch die entsprechenden nicht gestrichelten und umgekehrt ersetzt.

5) Die Ausartung ω erhält man dadurch, dass man die in den Ebenen D und D' durch g_1 und g_2 entstehende quadratische Verwandtschaft allgemein bestehen lässt, aber das Projectionscentrum P auf D selbst legt. Bei ω liegen die drei Fundamentalpunkte F_1, F_2, F_3 auf einer geraden Linie f; die Fundamentalpunkte F_1', F_2', F_3' dagegen haben in E' die allgemeine Lage. Ausserdem liegt in E' ein ausgezeichneter Punkt Q'. Dem durch Q', F_1', F_2', F_3' bestimmten Kegelschnittbüschel sind die Punkte auf f projectiv zugeordnet, und

zwar so, dass den drei in ein Geradenpaar degenerirten Kegelschnitten des Büschels die drei Punkte F_1, F_2, F_3 entsprechen. Einem beliebigen Punkte A in E entspricht in E' der Punkt Q', einem beliebigen Punkte in E' entspricht in E derjenige Punkt A' auf f, welcher dem durch A, Q', F_1', F_2', F_3' bestimmten Kegelschnitte projectiv zugeordnet ist. Einer beliebigen Geraden in E entspricht der ihrem Schnittpunkte mit f zugeordnete Kegelschnitt, und einer beliebigen Geraden in E' entspricht die doppelt zu rechnende Gerade f. Um die Anzahlen dieser interessanten Ausartung zu finden, musste der Verfasser alle die Anzahlen berechnen, welche sich auf das Problem der Projectivität zwischen einer geraden Punktreihe und einem Kegelschnittbüschel beziehen. Sind in E und E' die Fundamentalpunkte und der Punkt Q' gegeben, so ist ω vollkommen bestimmt. Also ist die Constantenzahl von ω $5 + 6 + 2$. Aus der Beschreibung von ω geht die Beschreibung von ω' dadurch hervor, dass man die gestrichelten Buchstaben durch die entsprechenden nicht gestrichelten und umgekehrt ersetzt.

6) Die Ausartung $\varkappa$ erhält man dadurch, dass man wieder die durch g_1 und g_2 auf den Ebenen D und D' erzeugte Verwandtschaft allgemein bestehen lässt, aber das Projectionscentrum P auf E selbst legt. Bei $\varkappa$ fallen F_1, F_2, F_3 in einen und denselben Punkt F, jedoch so, dass ihre Verbindungsgeraden drei durch F gehende Strahlen f_1, f_2, f_3 sind. In E' liegt ein ausgezeichneter Kegelschnitt k', dessen Punkte den durch F gehenden Strahlen projectiv zugeordnet sind, und zwar sind F_1', F_2', F_3' die drei den Strahlen f_1, f_2, f_3 zugeordneten Punkte. Einem beliebigen Punkte in E entspricht in E' immer der Punkt F, einem beliebigen Punkte A in E dagegen entspricht in E' derjenige auf k' liegende Punkt, welcher dem Strahle FA projectiv entspricht. Einer beliebigen Geraden in E entspricht in E' immer der Kegelschnitt k', und einer beliebigen Geraden in E' entspricht in E das Geradenpaar, dessen beide Strahlen den beiden Schnittpunkten von k' mit der gegebenen Geraden entsprechen. Um die auf $\varkappa$ bezüglichen Anzahlen erhalten zu können, musste der Verfasser vorher die Anzahlen für die Projectivität zwischen den Strahlen eines Strahlbüschels und den Punkten eines Kegelschnitts berechnen. Die Ausartung $\varkappa$ ist durch die Lage der Strahlen f_1, f_2, f_3, der Punkte F_1, F_2, F_3 und des Kegelschnittes k vollkommen bestimmt. Ihre Constantenzahl ist also $5 + 6 + 2$. Die Ausartung $\varkappa'$ erhält man aus $\varkappa$ durch Vertauschung der gestrichelten Buchstaben mit nichtgestrichelten und umgekehrt.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 3. Ausgegeben im Februar. 1883.

Berichte über die Versammlungen.

Versammlung vom 14. Januar 1882.

Herr Gewerbeschullehrer Kühl wurde als hiesiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Ingenieur F. H. Reitz machte einige Mittheilungen über die im Generalberichte der Europäischen Gradmessung für 1880, herausgegeben 1881, beschriebene Verbindung der Dreiecksketten in Spanien und Algier. Aus diesen ausführlichen Mittheilungen erfolgt hier eine kurze Uebersicht des Verlaufes dieser grossartigen geodätischen Unternehmung.

Es handelte sich darum, die ausgedehnten Dreiecksketten, die sich durch die Britannischen Inseln, Frankreich und Spanien hinziehen, mit der Dreieckskette in Algier zu verbinden. Die nördlichste Shetland-Insel und der südlichste Punkt der Dreieckskette am Rande der Sahara hat einen Breitenunterschied von 28 Grad. Schon 1861 und 1862 waren die englischen Dreiecksketten mit den französischen verbunden, ebenso wurden die spanischen mit den französischen Dreiecken über die Pyrenäen hin verbunden; es verblieb nur noch, auch das spanische Dreiecknetz mit dem in Algier zu verbinden.

Man hatte von der Küste von Algier aus bemerkt, dass gegen Sonnenaufgang oder Sonnenuntergang, auch bei verschleierter Sonne, vor und nach dem Regen, sich die Küste von Spanien kurze Zeit über dem Horizont zeige. Heliotropenlicht würde hiernach immer nur kurze Zeit sichtbar sein und man sah sich auf künstliche Lichtquellen angewiesen.

Die Punkte des projectirten grossen Verbindungsvierecks wurden auf den Berggipfeln: Mulhacen der Sierra Nevada, 3482 m über dem Meere, Tetica, 2080 m hoch, in Spanien, in Algier auf dem Filhaoussen, 1140 m hoch, an der Grenze von Marocco und dem M'Sabiha, 583 m hoch, bei Oran ausgewählt. Die Länge der über das Mittelländische Meer reichenden Dreiecksseiten in diesem mächtigen Viereck liegt zwischen 30 und 35 geographischen Meilen. Siehe die beigegebene Situation des Vierecks, Figur 1.

Die ganze Unternehmung stand unter der Leitung des spanischen Generals Ibañez und des französischen Commandanten Perrier, beide Mitglieder der internationalen Commission der Europäischen Gradmessung.

Die ersten Monate des Jahres 1879 wurden zu vorbereitenden Arbeiten und Versuchen verwandt. Für die Winkelmessung wurden Instrumente von Brunner in Paris gewählt. Das electrische Licht wurde durch eine Gramme'sche Maschine, von Sauter und Lemonnier construirt, hervorgebracht. Der Motor zur Bewegung dieser Maschine, nach dem System Weyher und Richmond, kann eine Leistung bis zu fünf Pferdekräften entwickeln. Diese Dampfmaschine sammt Kessel ist leicht zerlegbar und gewährte für den Transport auf die hohen Berggipfel hiedurch grosse Bequemlichkeit.

Der Reflector für das electrische Licht wurde nach den Angaben des Obersten Mangin ausgeführt; eine Skizze desselben mit Angabe der Krümmungsradien, giebt Figur 2; die Rückseite eines concav-convexen Glaskörpers *a b* ist auf der convexen Seite mit einer Silberbelegung versehen. Das electrische Licht befindet sich in *c*. Durch den Durchgang der Strahlen durch den Glaskörper wird der Fehler wegen der Kugelgestalt des Reflectors nahezu aufgehoben und treten die Strahlen fast parallel der Achse aus.

Im August 1879 waren sämmtliche Beobachter auf ihren Posten; auf dem Mulhacen der Oberst Barraquer, auf dem Tetica Major Lopez, auf dem Filhaoussen Hauptmann Bassot und auf dem M'Sabiha Oberst Perrier, unterstützt durch eine Anzahl Officiere des Generalstabes und eine Abtheilung Soldaten.

Vom 20. August bis zum 9. September wurde trotz angestrengtester Aufmerksamkeit kein Signal bemerkt und man fürchtete schon in fieberhafter Unruhe ein Fehlschlagen der grossen, mit allen Mitteln der neueren Technik unterstützten Unternehmung; da endlich sah man von M'Sabiha, wie einen Stern erster Grösse, das Licht vom Tetica, bald darauf auch gegenseitig von den andern Stationen. Am 2. October war die Winkelmessung schon vollendet. Auch die Längen-

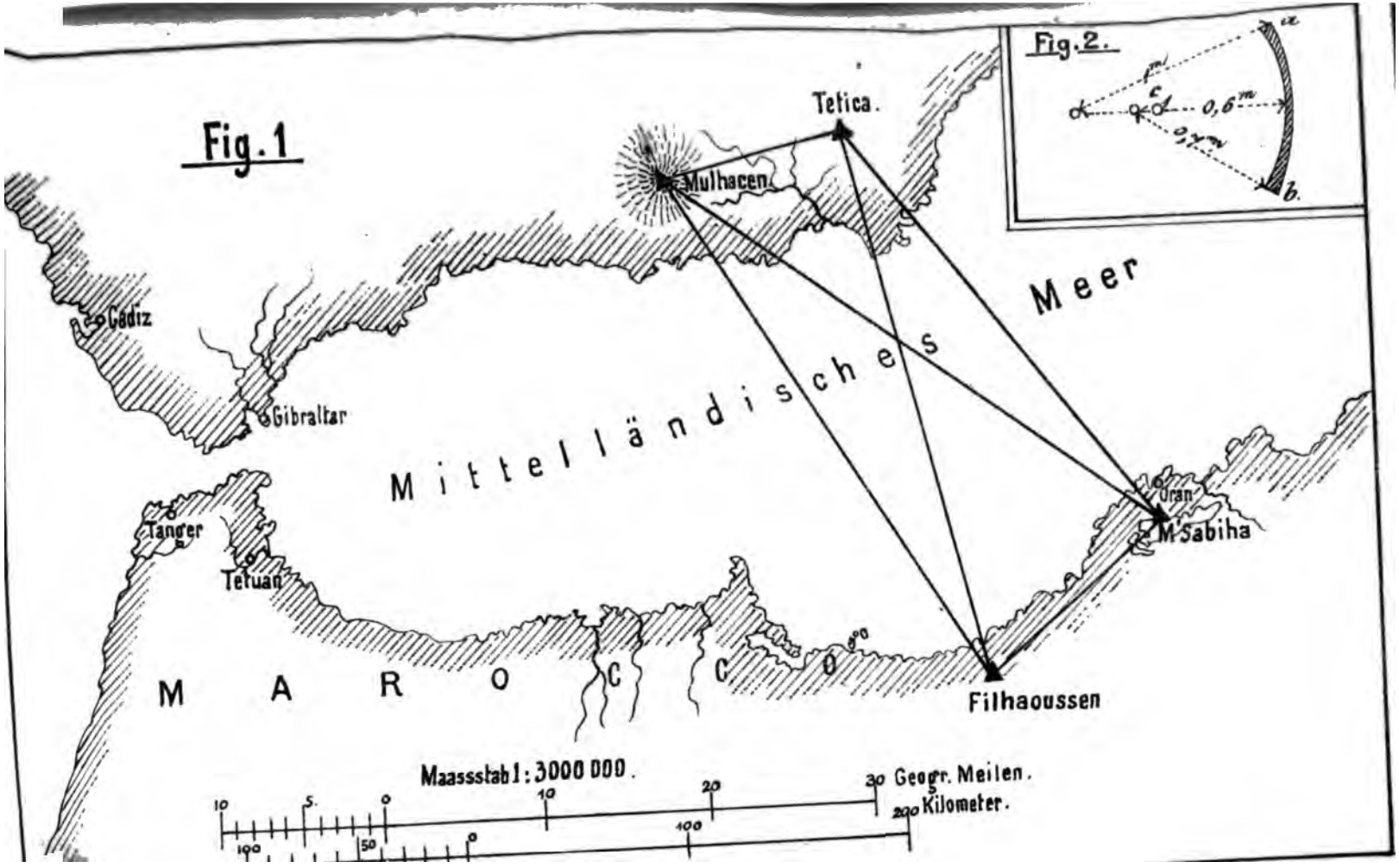


Fig. 1
Tetica.
Mulhacen.
Cádiz
Gibraltar
Mittelländisches Meer
Tanger
Tetuan
Oran
M'Sabiha
M A R O C C O
Filhaoussen
Maassstab 1 : 3000 000.
30 Geogr. Meilen.
200 Kilometer.
Fig. 2.
a
b
0,6 m

unterschiede wurden nun noch durch dieselben electrischen Lichtsignale festgestellt.

Die sphärischen Excesse der Dreiecke und die gefundenen Fehler in der Winkelsumme sind folgende:

Dreieck:	Sphärischer Excess:	Fehler in der Winkelsumme:
Filhaoussen . . . Tetica . . . . . Mulhacen	54″,170	— 0″,256
M'Sabiha . . . . Mulhacen . . . . Filhaoussen . . .	70″,743	— 0″,726
M'Sabiha . . . . Mulhacen . . . . Tetica	43″,503	+ 1″,921
Filhaoussen . . . M'Sabiha . . . . Tetica	60″,076	+ 0″,952.

Die auf der spanischen Seite und in Algier gemessenen Dreiecksseiten, deren Länge bezüglich aus den Basislängen von Madridejos und Arcos und von Algier bestimmt war, zeigten nach der Messung des beide Dreiecksketten verbindenden grossen Vierecks eine Uebereinstimmung von $\frac{1}{230000}$ der Länge; dies machte für die Entfernung der Punkte M'Sabiha — Filhaoussen in Algier, welche 14 geographische Meilen beträgt, 0,8 Meter.

Hierauf hielt Herr Realschullehrer Ahlborn einen Vortrag über Connexe, aus welchem Folgendes hervorzuheben ist:

In der Einleitung wurden die Begriffe von Punkt- und Linien-Coordinaten in der Ebene erläutert, darauf die Bedeutung einer Gleichung in Punkt-Coordinaten und die einer Gleichung in Linien-Coordinaten auseinandergesetzt. Nachdem sodann die homogenen Punkt- und Linien-Coordinaten eingeführt waren, verbreitete sich der Vortragende über das Prinzip der Dualität und die binären algebraischen Formen.

Die Zwischenformen, welche gleichzeitig Punkt- und Linien-Coordinaten enthalten, also in der Form $f(u, x)$ begriffen sind, liefern, gleich Null gesetzt, ein geometrisches Gebilde, welches Clebsch einen Connex genannt hat, wenn von jeder der Variabeln u und x nur eine Reihe vorkommt.

An diese Definition des Connexes schloss sich eine allgemeine Veranschaulichung des Gebildes, welches durch einen Connex dargestellt wird, also der Zuordnung, welche Punkte und Curven, resp. Gerade und Curven durch den Connex erfahren.

Nachdem hierauf das zwei Connexen Gemeinsame mit dem Namen Coincidenz bezeichnet worden war, ferner darauf hingewiesen war, dass man auch 3 oder 4 Connexgleichungen als gleichzeitig bestehend annehmen und das Gemeinsame geometrisch deuten kann, wurde mit Hülfe des identischen Connexes $u_x = 0$ die Hauptcoincidenz erklärt und es wurde angedeutet, wie man zu den Hauptcoincidenz-Curven gelangt, welche nunmehr analytisch dargestellt wurden.

Daraus ergab sich eine Beziehung zwischen den Hauptcoincidenz-Curven und der Differential-Gleichungen erster Ordnung.

Zum Schlusse wurde noch von der Bedeutung der Grundpunkte und Grundstrahlen eines Connexes oder seiner Haupt-Coincidenz und von der Zuordnung des conjugirten Connexes zu einem gegebenen Connexe gesprochen.

Vergl.: Vorlesungen aus der analytischen Geometrie von Clebsch, herausgegeben von Lindemann.

Haupt-Versammlung vom 20. Februar 1882.

Aus dem vom Jahrverwalter erstatteten Jahresbericht ist Folgendes hervorzuheben:

Durch den Tod hat die Mathematische Gesellschaft ihr Ehrenmitglied

Herrn Professor Adam Burg, k. k. Regierungsrath in Wien,

im Februar d. J. verloren.

Die Gesellschaft zählt 53 ordentliche Mitglieder, worunter 41 Hiesige und 12 Auswärtige; ausserdem 3 Ehrenmitglieder.

Vom Hamburger Senat sind zur Ergänzung der Mathematischen Literatur in der Hamb. Stadtbibliothek zunächst ℳ 2000 bewilligt.

Die Gesellschaft blieb nach Schluss der Verhandlungen zur Feier des Stiftungstages zu einem Festmahl zusammen, zu dem sich auch verschiedene Gäste eingefunden hatten.

Versammlung vom 11. März 1882.

Der Jahrverwalter machte Mittheilung über die Cassenverhältnisse, woraus sich ergab, dass die Einnahmen die Ausgaben um ℳ 138.48 überstiegen haben und der Cassenbestand jetzt sich auf ℳ 967.95 beläuft.

Hierauf hielt Herr Dr. E. Liebenthal einen Vortrag: Untersuchungen über die Attraction zweier homogenen Körper, dem folgender Auszug zu entnehmen ist:

Die Untersuchung über die Attraction zweier homogenen Körper T und T' führt auf die Bestimmung des über beide Körper auszudehnenden Raumintegrals:

$$V = \iiiint\iiint \varphi(r)\, d\tau\, d\tau',$$

welches das Potential der beiden Körper T und T' genannt wird. Zur Reduction von V dient der Satz von Gauss:

Ist innerhalb eines Raumes T $\varphi(r)$ eine Function der Entfernung r des Elementes $d\tau$ vom angezogenen Punkte, so ist, wenn man das unbestimmte Integral $\int r^2 \varphi(r)\, dr = \psi(r)$ setzt:

$$\iiint \varphi(r) d\tau = \iint \frac{\psi(r)}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma - 4\pi\psi(0), \text{ resp.} - 2\pi\psi(0), \text{resp.} - 0,$$

je nachdem der angezogene Punkt innerhalb oder an einer stetig gekrümmten Stelle der Oberfläche oder ausserhalb des Raumes T liegt. Die Integration links ist über T und rechts über seine Oberfläche und die unendlich nahen Umhüllungen der Unstetigkeitsstellen der Function $r^2\varphi(r)$ zu erstrecken und (rn) ist der Winkel, den der vom angezogenen Punkte nach dem Oberflächenelemente $d\sigma$ gezogene Radius vector r mit der auf $d\sigma$ nach aussen errichteten Normale n bildet.

Dieser Satz lässt sich leicht durch Zerlegung von T in kegelförmige Elemente, die ihre Spitze in dem angezogenen Punkte haben, oder mit Hülfe des Green'schen Satzes nachweisen, indem man eine der beiden Functionen gleich der Einheit und die andere gleich

$$\Psi(r) = \int \frac{\int r^2 \varphi(r) dr}{r^2}\, dr$$

setzt und beachtet dass:

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial z^2} = \varphi(r).$$

Ist einer der beiden Körper ein Polyeder, so gebrauchen wir auch noch den analogen Satz für die Ebene, der sich durch die Gleichung:

$$\iint \varphi_1(\varrho) d0 = \int \frac{\psi_1(\varrho)}{\varrho} \cos(\varrho\nu)\, ds - 2\pi\psi_1(0); \text{ resp.} - \pi\psi_1(0), \text{resp.} - 0$$

ausdrücken lässt, wo $\int \varrho\, \varphi_1(\varrho) d\varrho = \psi_1(\varrho)$ gesetzt ist.

Durch Anwendung des Gauss'schen Satzes finden wir nun, $r^2\varphi(r)$ als endlich und stetig vorausgesetzt, den Ausdruck:

$$V = \iiint d\tau' \iint \frac{\psi(r)}{r^2} \cos(rn)\, d\sigma,$$

welcher sich, da

$$\cos(rn) = \frac{\partial r}{\partial x}\cos(nx) + \frac{\partial r}{\partial y}\cos(ny) + \frac{\partial r}{\partial z}\cos(nz)$$
$$= -\frac{\partial r}{\partial x'}\cos(nx) - \frac{\partial r}{\partial y'}\cos(ny) - \frac{\partial r}{\partial z'}\cos(nz),$$

in eine Summe von drei fünffachen Integralen auflösen lässt und bei Anwendung der umgekehrten Integrationsordnung übergeht in:

$$V = -\iiint\iint \Psi(r)\,\{\cos(nx)\cos(n'x) + \cos(ny)\cos(n'y) + \cos(nz)\cos(n'z)\}\cdot d\sigma\, d\sigma'$$
$$= -\iiint\iint \Psi(r)\cos(nn')\, d\sigma\, d\sigma'.$$

Mithin können wir V auf ein vierfaches Integral reduciren, sobald wir die Integration: $\Psi(r) = \int \frac{\int r^2\varphi(r)dr}{r^2} dr$ ausführen können.

Ist nun einer der beiden Körper, z. B. T, ein Polyeder, so lassen sich für bestimmte Functionen $\varphi(r)$, beispielsweise wenn $\varphi(r)$ eine nach ganzen Potenzen von r fortschreitende Reihe ist, nochmals zwei Integrationen in V ausführen. Zerlegen wir nämlich jedes der Integrale:

$$\iint \Psi(r)\cos(nx)\, d\sigma;\quad \iint \Psi(r)\cos(ny)\, d\sigma;\quad \iint \Psi(r)\cos(nz)\, d\sigma$$

in eine Summe von über die einzelnen Polyederflächen zu erstreckenden Integralen, so gelangen wir, da für diese einzelnen Flächen $\cos(nx)$, $\cos(ny)$ und $\cos(nz)$ constant sind, zu Ausdrücken von der Form:

$$\iint \Psi(r)\, d\sigma,$$

welche wir durch Anwendung des vorher erwähnten Ebenensatzes darstellen können als eine Summe von Integralen, die über die einzelnen Kanten der betreffenden Polyederfläche auszudehnen sind und sich unmittelbar integriren lassen.

Auf diese Weise ergiebt sich V als eine Summe von Integralen:

$$V = \Sigma\iint_\varepsilon \{f(x',y',z')\log[F(x',y',z',R)] + f_1(x',y',z').\operatorname{arc\,tg}[F_1(x',y',z',R)]\}\, d\sigma' + \text{const},$$

wo f und f_1 ganze rationale Functionen der Coordinaten x', y', z' des Elementes $d\sigma'$ und F und F_1 gebrochene rationale Functionen von x', y', z' und $R = \sqrt{(x'-a)^2 + (y'-b)^2 + (z'-c)^2}$ bezeichnen, wenn a, b, c die Coordinaten des Endpunktes einer Kante von T, also Con-

stante sind; ε stellt endlich einen der Werthe von cos $(n'x)$, cos $(n'y)$ und cos $(n'z)$ dar.

Ist nun auch T' ein Polyeder, so tritt ε als eine für jede einzelne Polyederfläche constante Grösse vor das Integralzeichen, und wir erhalten, wenn wir eine solche Fläche durch Ebenen parallel der xz- und yz-Ebene in Elemente $\frac{dx'\,dy'}{\pm\cos(n'z)}$ theilen und z' durch die Gleichung der betreffenden Polyederfläche als Function von x' und y' ausdrücken:

$$V = \Sigma\Sigma\iint \{f'(x',y') \log [F''(x',y',\mathfrak{R})] + f'_1(x',y') \text{ arc tg } [F''_1(x',y',\mathfrak{R})]\}\, dx'\,dy' + \text{const.},$$

wo die f' und F'' analoge Bedeutung wie früher haben und $\mathfrak{R}$ aus R hervorgeht, wenn darin z' als Function von x' und y' ausgedrückt wird. Integriren wir dann nach x' oder nach y', so verschwinden bei Anwendung der theilweisen Integration die transcendenten Functionen log und arc tg, und durch Einführung einer neuen Integrationsvariabeln gewinnen wir eine gebrochene rationale Function dieser Variabeln, deren Integration principiell keine Schwierigkeiten bietet. Mithin erhalten wir V schliesslich als eine Summe von einfachen Integralen.

Versammlung vom 15. April 1882.

Herr Ober-Ing. a. D. Dr. Plath hielt einen Vortrag über die Wieder-Auffindung des Planeten Sylvia [87] auf Grund der Rechnung und Bestimmung der Masse des Jupiter aus den Bewegungen der Sylvia.

Hieraus ist Folgendes mitzutheilen.

Die Sylvia wurde im Jahre 1866 von Dir. Pogson in Madras entdeckt und in den Jahren 1866, 67 und 68 beobachtet. Herr Dr. C. F. W. Peters (Obs. in Kiel) beschäftigte sich d. Z. mit den Berechnungen zur Verfolgung und Wieder-Auffindung des Planeten, aber die Elemente waren noch zu ungenau, um nach dem Jahre 1868 den Planeten wieder zu finden, derselbe blieb von dieser Zeit an verschwunden.

Mit Hülfe der obigen Beobachtungen und einer Beobachtung von 1873, von der man vermuthen konnte, dass sie vielleicht der Sylvia angehöre, stellte Herr Prof. Tietjen in Berlin eine Ephemeride für 1874 auf, nach welcher die Sylvia auch in Berlin und Leipzig beobachtet wurde.

Fernere Beobachtungen gelangen indessen nicht, und wenn auch Herr Dr. C. Schrader (Obs. in Hamburg) durch ausgedehnte Rechnungen sich um den Planeten verdient machte, so gelang es ihm doch nicht, eine für die Wiederauffindung genügende Ephemeride herzustellen.

Im Jahre 1878 waren die Arbeiten an Dr. Plath übergegangen, und erkennend, dass lediglich eine Wiederholung der ganzen Störungsrechnung für Jupiter und Saturn von 1866—1879 mit den z. Z. besten Elementen, wobei also die Oerter der gestörten Planeten eine Berichtigung erfahren würden, eine wirksame Verbesserung der Sylvia-Elemente liefern könne, wurde diese Arbeit von Dr. Plath ausgeführt, deren Erfolg, nachdem für 1879 eine Ephemeride berechnet worden, die leichte Auffindung des Planeten durch Herrn Professor von Oppolzer in Wien im Jahre 1879 war, so dass die Sylvia jetzt als gesichert angesehen werden kann.

Da die Darstellung der 5 Normal-Oerter keine so gute war, wie man wohl erwarten konnte, so wurde ein Versuch gemacht, aus den bekannten Jupiter-Sylvia-Störungen die Masse des Jupiter neu zu bestimmen, um so vielleicht mit Hülfe dieser neuen Jupiter-Masse die Darstellung der Normal-Oerter zu verbessern. Letzteres gelang auch; aber es ist doch auf diesen neuen Werth der Jupiter-Masse kein Verlass, weil nur 5 Oppositionen der Rechnung zu Grunde gelegen hatten.

Die ausführlichen Rechnungsresultate der Plath'schen Bearbeitung der Sylvia finden sich in einer als Manuscript gedruckten Broschüre vom Jahre 1881.

Schliesslich folgt hier noch ein Verzeichniss der verschiedenen Werthe für die Jupiter-Masse, wie solche von den einzelnen Astronomen ermittelt worden sind, wobei der Bestimmung von Bessel vom Jahre 1841 die grösste Bedeutung zukommt.

Die Jupiter-Masse wurde bestimmt:

Von	aus den Bewegungen	zu	Bemerkungen.
Newton	des 4ten Satelliten	$\frac{1}{1033}$	Bessel, Astr. Unters. 1842.
Newton 1687	des 4ten Satelliten nach Messung von Pound	$\frac{1}{1067}$	do. do.
Lagrange 1782	do. do.	$\frac{1}{1067.195}$	Ann. de l'Obs. Roy. de Brux. 1878. Tome 1.
Laplace 1802	do. do.	$\frac{1}{1067.09}$	do. do.

Die Jupitermasse wurde bestimmt:

Von		aus den Bewegungen	zu	Bemerkungen.
Wurm	1802	der 4 Satelliten nach Messg. von Triesnecker	$\frac{1}{1070.15}$	do. do.
Bouvard	1821	des Saturn	$\frac{1}{1070.5}$	Bessel, Astr. Unters. 1842.
Nicolai	1825	der Juno	$\frac{1}{1053.924}$	Berl. Astr. Jahrb. 1826.
Encke	1826	der Vesta	$\frac{1}{1050.36}$	Abh. d. Berl. Ak. d. W. 1826.
Bessel		der 4 Satelliten nach Messg. von Triesnecker	$\frac{1}{1055.68}$	Bessel, Astr. Unters. 1842.
Santini	1836	des 4ten Satelliten	$\frac{1}{1051.9}$	do. do.
Airy	1837	do. do.	$\frac{1}{1046.77}$	do. do.
Bessel	1841	der 4 Satelliten	$\frac{1}{1047.879}$	do. do.
Jacob	1860	des 4ten Satelliten	$\frac{1}{1047.54}$	Ann. de l'Obs. Roy. de Brux. 1878. tome 1.
Schubert		der Thalia	$\frac{1}{1051.03}$	Astr. Nachr. Nr. 1562.
Krueger	1866	der Themis	$\frac{1}{1047.538}$	Abh. d. Finn. Soc. d. W. 1873 Bd. VIII. 1.
Hansen	1867	der Egeria	$\frac{1}{1051.12}$	Tafeln d. Egeria. Leipz. in 4°.
Becker	1870	der Amphitrite	$\frac{1}{1047.37}$	Publ. d. Astr. G. X. 1870.
Möller	1871	des Faye'schen Cometen	$\frac{1}{1047.788}$	Vrtljhrschr. d. Astr. G. VII.
von Asten	1872	des Encke'schen Cometen	$\frac{1}{1049.632}$	Ann. de l'Obs. Roy. de Brux. 1878. tome 1.
Plath	1881	der Sylvia	$\frac{1}{1044.426}$	Versuchsweise.

Versammlung vom 13. Mai 1882.

Die Königl. Bibliothek in Berlin wurde auf Antrag des Oberbibliothekars Geh. Regierungsrath Herrn Lepsius als auswärtiges ordentliches Mitglied aufgenommen.

Herr Dr. Liebenthal beendete seinen Vortrag über die Attraction zweier homogenen Körper.

Versammlung vom 10. Juni 1882.

Herr W. Lazarus referirte über das 1881 erschienene Buch: Mathematische Theorie der Preisbestimmung der wirthschaftlichen Güter. Vier Denkschriften von Leon Walras. (Stuttgart, Verlag von F. Enke.)

Derselbe entwickelte sowohl die Nachfrage-Curven wie auch die Nützlichkeits-Curven für zwei Waaren und erläutert wie die ersteren aus den letzteren unter Anwendung der Hypothese von dem Genuss-Maximum folgen und wie weiter die Gleichgewichtspreise daraus abgeleitet werden.

Derselbe erläuterte sodann wie die Sätze auf eine beliebige Anzahl von Waaren auszudehnen sind und wie sich das System der Gleichungen des Tausches unter Berücksichtigung des allgemeinen Gleichgewichts gestaltet. Schliesslich deutete derselbe an, wie sich analog den Gleichungen des Tausches auch diejenigen der Production und der Capitalisirung aufstellen lassen.

Versammlungen im Juli und August fielen wegen der Ferien aus.

Versammlung vom 9. September 1882.

Durch den Tod hat die Gesellschaft im August 1882 ihr hiesiges ordentliches Mitglied, den Mühlenbaumeister Herrn C. L. Nagel, der im Jahre 1852 eingetreten war, verloren.

Herr Ingenieur F. H. Reitz hielt nachstehenden Vortrag über den „Hohmann-Coradi'schen Flächenintegrator“:

Es ist kürzlich ein Flächenintegrator von dem Regierungs-Baumeister Hohmann in Bamberg erfunden und von G. Coradi in Zürich in ausgezeichnet vollendeter Weise zur Ausführung gebracht, der die Organe des Wetli-Hansen'schen Planimeters und des Amsler'schen in sehr sinnreicher Weise vereinigt, zugleich aber auch wirklich durch Erhöhung der Genauigkeit der Flächenbestimmung für die Praxis von Bedeutung ist.

Zur richtigen Beurtheilung der neuen Construction erschien es mir geboten, eine übersichtliche Darstellung der bekannten Integratoren und ihrer Theorie in möglichst kurzer Fassung vorauszuschicken. In den bekannten Handbüchern der praktischen Geometrie fehlt es, der Neuheit einiger Constructionen wegen, an einer solchen Zusammenstellung, auch ist in denselben die Theorie dieser Instrumente mit vieler Weitläufigkeit abgehandelt.

Alle Erfinder von Planimetern, d. h. von wirklichen Integratoren, adoptiren bei ihren Constructionen bis jetzt die Gleitrolle. Der Erfinder derselben in der Anwendung für diesen Zweck ist bis jetzt nicht bekannt geworden. Auf Veranlassung dieser zu machenden Mittheilungen wandte ich mich an Herrn Professor W. Tinter, Dr., Lehrer der praktischen Geometrie an der Wiener polytechnischen Schule, einen anerkannt guten Kenner der Geschichte der Erfindungen der geodätischen Instrumente, wegen der Frage der Priorität. Herr Professor Tinter schrieb mir Folgendes: „Soweit ich mich jetzt zu erinnern vermag, gebührt dem Italiener Gonnella, Professor in Florenz, das Verdienst, die integrirende Rolle in die Praxis eingeführt zu haben; einige Zeit konnte noch die Priorität zwischen Gonnella und Oppikofer (Schweizer) zweifelhaft erscheinen, allein Favaro hat entschieden dargethan, dass Oppikofer ein bis zwei Jahre später kam, vielleicht sogar um den Gedanken Gonnella's gewusst hat. Es fällt dieses in die Zeit 1824—1827. Nach einem aufgefundenen „Manuscripte" soll einem bayerischen Trigonometer Herrmann schon 1815 die Idee zu einem Planimeter mit einem Rädchen (Rolle) gekommen sein; leider ist eine rechtzeitige Veröffentlichung über diesen Gegenstand nicht erfolgt, denn was Bauernfeind über dies Manuscript publicirte, fällt in das Jahr 1855."

Hiernach ist die Erfindungsgeschichte der integrirenden Rolle noch weiter zu verfolgen. In der That gebührt diesem Erfinder höchste Anerkennung, denn wie viele Zeit hat er durch seinen schönen Gedanken gerettet, die sonst in der langweiligsten Arbeit hätte hingebracht werden müssen. Nicht allein das Planimeter, sondern auch meteorologische Apparate, der von mir 1871 erfundene Mareograph für die mittlere Höhe und die später construirten Apparate von Sir William Thomson für die Vorausbestimmung der Fluthhöhen (1876) und der Windcomponenten-Integrator von Arthur v. Oettingen (1876) können der Gleitrolle nicht entbehren, die auch noch für manche ähnliche Zwecke (Seeweg-Integrator, Bestimmung des mittleren Dampfdruckes im Cylinder, Bestimmung mechanischer Arbeit u. s. w.) eine dauernd nützliche Verwendung finden und bei der genialen Einfachheit dieses Organes schwerlich jemals durch etwas Anderes verdrängt werden wird.

Die ersten Planimeter bezogen sich in ihrer Construction auf ein rechtwinkeliges Coordinatensystem; nach verschiedenen Abänderungen entstand das jetzt gewöhnlich Wetli-Hansen'sches Planimeter genannte Instrument, welches in den Haupttheilen durch Figur 1 dargestellt ist. Auf einem Wagen mit drei oder vier Rädern, der auf

Schienen in der Richtung der y-Achse hin- und herfahren kann, steht eine (horizontale) Scheibe. Auf dieser Scheibe ruht die Gleitrolle in einem Punkte auf, der in der Entfernung y vom Mittelpunkte der Scheibe bleibt. Der Fahrstift ist an einer um die Achse der Scheibe geschlungenen Schnur befestigt und bewegt sich in der Richtung der x-Achse rechtwinklig zu den Schienen des Wagens der Scheibe. Bewegt sich nun der Wagen in der Richtung der y-Achse, dreht sich die Gleitrolle nicht, bewegt sich aber der Fahrstift in der Richtung der x-Achse um dx, so dreht sich ein Punkt des Umfanges der Achse der Scheibe auch um dx, ein Punkt des Umfanges der Gleitrolle aber, wenn R der Halbmesser der Scheibenachse ist, um $\frac{1}{R} ydx$, das Element der Fläche dividirt durch R. Die Aufgabe ist somit gelöst.

Es ist möglich, dass die ersten Erfinder der Planimeter von höherer Analysis nichts verstanden und durch Zufall oder ein dunkles Gefühl richtig zu dieser oder jener Lösung der Aufgabe geleitet wurden. Das Amsler'sche Planimeter giebt noch mehr zu denken in dieser Beziehung. Man fragt sich unwillkürlich: wie war es möglich, hierauf zu kommen? Nach der Erfindung dieses Instrumentes kommen übrigens in Dingler's Journal eine ganze Reihe von Abhandlungen vor, worin die Richtigkeit des Amsler'schen Planimeters ernstlich bestritten wird. Vermuthlich trugen die ersten weniger vollkommenen Ausführungen des Instrumentes viel dazu bei, diesen Zweifeln Raum zu schaffen; später, als das Instrument mit anderen Flächenbestimmungen eine höchst vollkommene Uebereinstimmung zeigte, schwanden auch die Zweifel, und die Theorie wurde in klarerer Weise entwickelt. Die Figuren 2, 3 und 4 zeigen schematisch die Varietäten des Amsler'schen Planimeters. Auf Figur 2 bezieht sich die folgende Darstellung der Theorie.

Es ist für sämmtliche Planimeter, die sich auf ein Polarcoordinatensystem beziehen, zu bemerken, dass man nur den Ausdruck für das Differential der Fortrückung eines Punktes des Umfanges der Gleitrolle zu entwickeln hat, für eine unendlich kleine Drehung des Radiusvector. Die Verlängerung und Verkürzung des Radiusvector kann keine dauernde Veränderung im Stande der Gleitrolle bewirken, da sich nach Rückkehr zum Anfangspunkt der Umfahrung der Radiusvector wieder eben so viel verkürzt hat, wie er sich verlängert hatte. Nach Figur 1 ist nun: $r_1 \cos \beta d\varphi = P \cos \alpha d\varphi \pm D d\varphi$; hierin ist $\cos \alpha = \frac{P^2 + F^2 - r^2}{2PF}$. Substituirt man dies, so wird für das Differential der Fortrückung eines Punktes der Gleitrolle erhalten:

Fig. 1

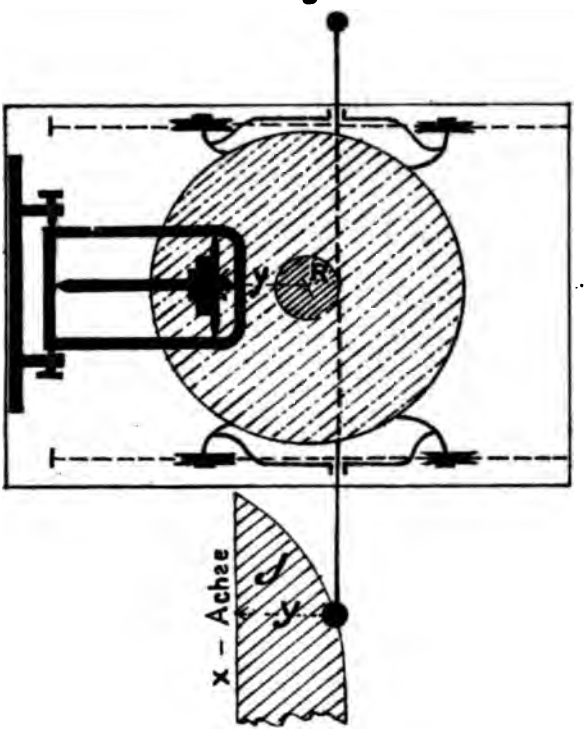


Fig. 2.

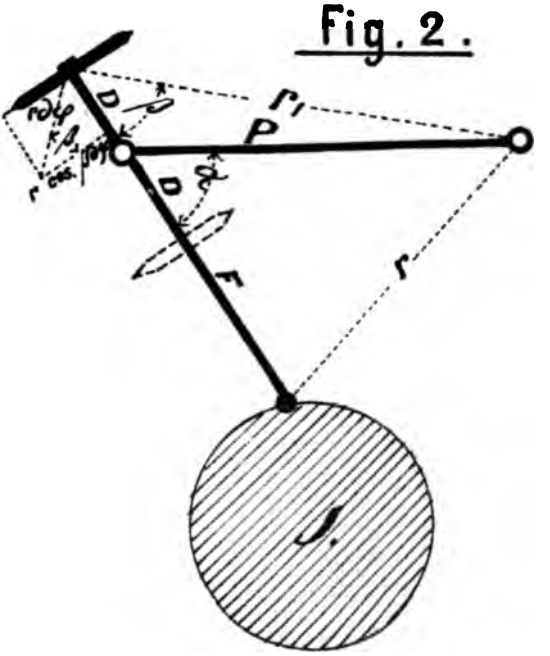
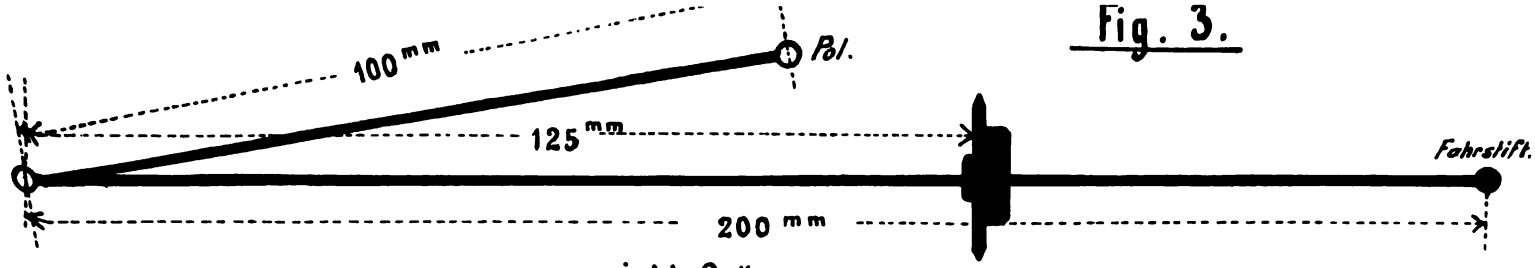
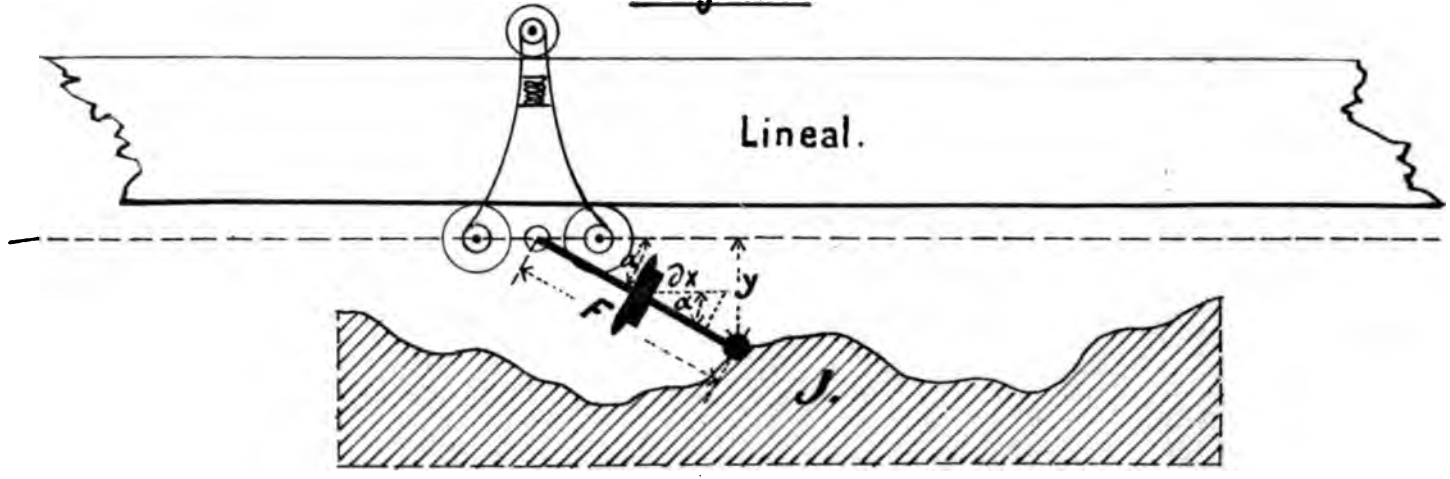


Fig. 3.



wirkl: Grösse.

Fig. 4.



$$r_1 \cos \beta d\varphi = \left(\frac{P^2 + F^2 \pm 2DF}{2F} - \frac{1}{F} \cdot \frac{1}{2} r^2\right).$$

Für die Polstellung ausserhalb der Figur wird hieraus, wenn man mit J den Inhalt bezeichnet, für die gesammte Fortrückung erhalten: $\frac{J}{F}$. Für die Polstellung innerhalb der Figur hat man von 0 bis 2π zu integriren und erhält dann für die Fortrückung eines Punktes des Umfanges der Gleitrolle den Werth

$$(P^2 + F^2 \pm 2DF)\,\pi \cdot \frac{1}{F} - \frac{J}{F}.$$

Die erstere Grösse, gewöhnlich die Constante des Planimeters genannt, lässt sich, wenn die Rolle zwischen Fahrstift und Drehpunkt befindlich (also für $-D$), gleich Null machen; man hat die Dimensionen des Instrumentes so zu wählen, dass $P^2 + F^2 = 2DF$. Ich habe hierauf aufmerksam gemacht und ein Verhältniss für die praktische Ausführung angegeben; siehe Figur 3. Man erkennt auch aus der Formel für die Fortrückung eines Punktes des Umfanges der Gleitrolle für äussere Polstellung: $\frac{1}{F} \cdot J$, dass dieselbe ganz unabhängig von D und auch von P ist. Man kann P daher auch $= \infty$ annehmen, d. h. das Ende von F an einem Lineal hingleiten lassen, wie durch Figur 4 dargestellt wird. Für diese Varietät habe ich in früheren Veröffentlichungen in der Zeitschrift für Vermessungswesen, Jahrgang 1878, darauf aufmerksam gemacht, dass sich die Theorie derselben ungemein einfach gestaltet, wenn man wieder ein rechtwinkliges Coordinatensystem zu Grunde legt. Das Differential der Fortrückung eines Punktes des Umfanges der Gleitrolle ist: $dx \sin \alpha$ $\sin \alpha = \frac{1}{F} \cdot y$; substituirt man, wird wieder das Differential der Fläche, getheilt durch F, die Fahrarmlänge, erhalten.

Die vorstehenden Entwickelungen, sowie auch die für die beiden noch zu beschreibenden durch die Figuren 5 und 6 dargestellten Instrumente, geben einen Wink, dass man nach gut gewählten trigonometrischen oder anderen Formeln, in denen r^2, verbunden mit einer Anzahl anderer mechanisch zu repräsentirender Grössen, vorkommt, rückwärts ein Planimeter darstellen könne. Es ist nur darauf zu achten, dass auch die praktische Ausführung dem Mechaniker nicht zu viele Schwierigkeiten bereite. Auf diese Weise scheint das von Professor Klinkerfues in Göttingen kürzlich erfundene Planimeter (siehe Figur 5) entstanden zu sein. Das Perpendikel auf dem Durchmesser eines Kreises wird zum Radiusvector gewählt; ist dann durch die Construction dafür gesorgt, dass der eine Abschnitt des Durch-

messers immer gleich (also gleich 1 zu setzen) bleibe, so ist der andere Abschnitt r^2. An dem Ende dieses Abschnittes ist die Gleitrolle rechtwinklig angebracht; man erhält also nach Umfahrung der Figur $\int r^2 d\varphi$, den doppelten Inhalt. Leider ist die Ausführung dieses Instrumentes mit der verlangten Genauigkeit eine schwierige Aufgabe.

Es wird nach dem Vorstehenden leicht sein, mit Hülfe der in Figur 6 gegebenen schematischen Darstellung des Hohmann-Coradischen Planimeters, dessen Theorie zu entwickeln. Die praktische Ausführung dieses Instruments entspricht allen Anforderungen auf's Beste. Die Genauigkeit ist das 3- bis 4fache der des Amsler'schen, die für praktische Dimensionen umfahrbare Fläche ist gross. Das Instrument ist nur etwas zarter und theurer als das Amsler'sche; beide werden neben einander bestehen. Das Differential der Fortrückung eines Punktes der Messrolle ist $(D + F)\frac{H \sin \alpha}{R} d\varphi$. Nach der Bauart des Instruments ist nun $\sin \alpha = \cos \beta$. Nun ist:

$$\cos \beta = \frac{F^2 + P^2 - r^2}{2PF};$$

substituirt man dies, wird erhalten:

$$(D + F)\frac{H}{R} \cdot \frac{F^2 + P^2}{2PF} d\varphi - (D+F)\frac{H}{R} \cdot \frac{1}{PF} \cdot \frac{1}{2} r^2 d\varphi,$$

was verlangt wird. Die Constante ergiebt sich wieder durch Integration von 0 bis $2\pi = (D + F)\frac{H}{R} \cdot \frac{F^2 + P^2}{PF} \cdot \pi$ für die innere Polstellung*).

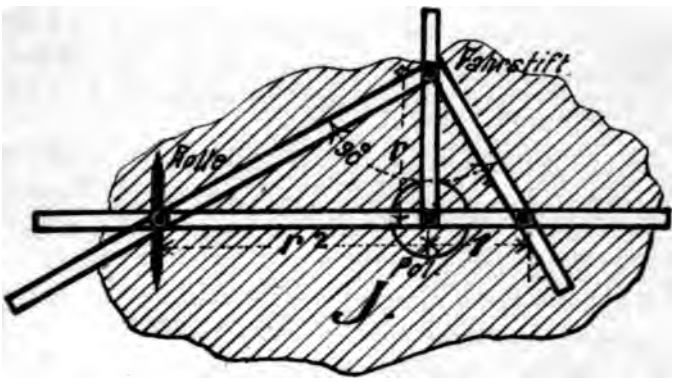
Herr Ingenieur J. F. Bubendey giebt ein Referat über die, vom hiesigen Wasserbau-Director Nehls verfasste Broschüre (Verlag P. Jenichen, Hamburg) über die graphische Rectification von Kreisbögen.

Herr Dr. Freund, hiesiges Mitglied, nimmt bei seiner Uebersiedelung nach Lübeck Abschied von der Gesellschaft.

---

*) Obige Entwickelungen wurden durch Vorzeigung des Hohmann-Coradischen und Amsler'schen Planimeters, ferner durch die Patentschrift für das Instrument von Klinkerfues, durch die perspectivische Zeichnung des Wetli-Hansen'schen und die Werkzeichnungen der durch die Figur 3 und 4 dargestellten Varietäten des Amsler'schen Planimeters nach meiner Angabe, sowie durch einige praktisch ausgeführte Bestimmungen von π mit dem Hohmann-Coradi'schen Instrument näher erläutert.

Fig. 5.


Fahrstift
Rolle
90°
D
Pol.
J.

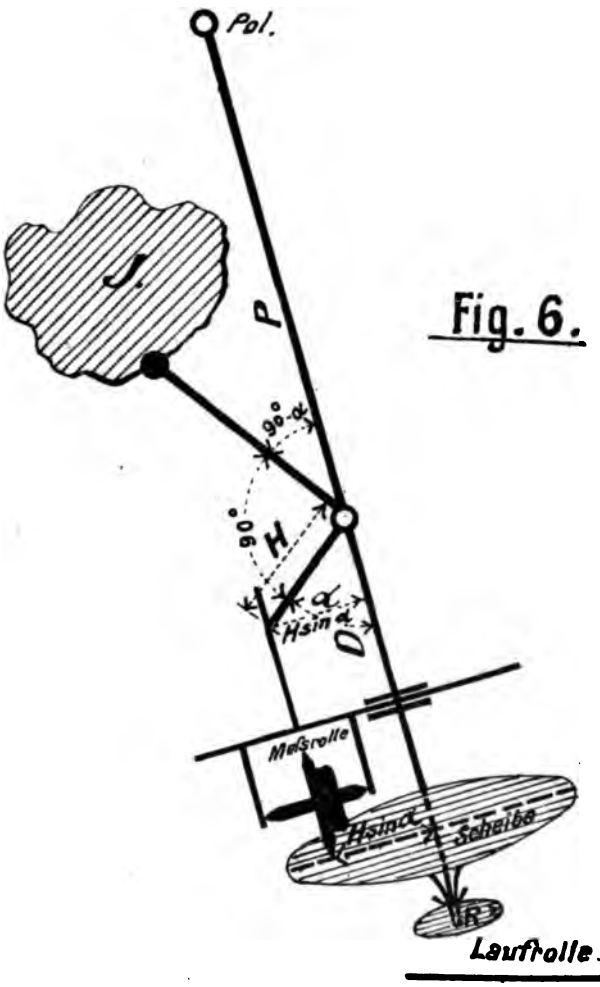

Pol.
J.
P
90°-α
90°
H
α
Hsinα
D
Meßrolle
Hsinα
Scheibe
R
Laufrolle.

Fig. 6.

Versammlung vom 14. October 1882.

Herr Ingenieur J. F. Bubendey macht folgende Mittheilung über von mehreren Constanten abhängige Functionen, welche aus einer längeren Reihe beobachteter Werthe zu bestimmen sind.

Wenn die Constanten wirklich alle gesetzmässig erfolgenden Einflüsse auf den Functionswerth repräsentiren, lassen sich dieselben stets in der genauesten Weise durch die Wahrscheinlichkeitsrechnung bestimmen, selbst wenn beliebige aber ungesetzmässig erfolgende Einflüsse bedeutende Abweichungen der einzelnen errechneten Werthe der Function von den beobachteten aufweisen.

Als Beispiel wurde auf die von Hagen (Abh. der K. Akademie der Wiss. 1880) ausgeführte Berechnung des mittleren Wasserstandes verschiedener Ströme während einer Reihe von Jahren als Function der seit dem ersten Beobachtungsjahr verflossenen Zeit hingewiesen. Die unregelmässigen kosmischen Einflüsse bewirken hier bedeutende Abweichungen des, für ein bestimmtes Jahr berechneten Werthes von dem beobachteten.

Es wurde indessen an einem Falle rechnungsmässig gezeigt, dass die Anzahl der einen bestimmten aliquoten Theil der wahrscheinlichen Abweichung nicht übersteigenden Abweichungen der Theorie durchweg sehr gut mit der wirklichen Anzahl übereinstimmt.

Es wurde ferner noch darauf aufmerksam gemacht, dass in diesem wie in den meisten anderen Fällen der wahrscheinliche Fehler derjenigen Constanten, welche die jährliche Aenderung des mittleren Wasserstandes darstellt, der Constanten selbst gegenüber so gross ist, dass eine Aenderung des mittleren Wasserstandes zur Zeit durchaus nicht als erwiesen zu erachten ist.

Hierauf hob Herr Dr. H. Schubert die Hauptmomente in der Geschichte der „Quadratur des Zirkels“ und der Zahl π hervor, indem er mit dem ägyptischen Mathematiker Ahmes (1700 vor Chr. Geb.) begann und mit Herrn Lindemann in Freiburg schloss.

Versammlung vom 11. November 1882.

Herr Dr. H. Schubert trug den Beweis vor, den Herr Lindemann für die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises mit Zirkel und Lineal gefunden und durch Herrn Weierstrass am 22. Juni 1882 der Berliner Akademie hat vorlegen lassen (cf. auch Mathem. Annalen Bd. 20 pag. 213—225 und Comptes rendus vom Juli 1882). —

Dabei versäumte der Vortragende nicht, auch diejenigen Sätze zu entwickeln, welche Herr Lindemann aus den Hermite'schen Abhandlungen „Sur la fonction exponentielle“ (Comptes rendus 1874) zu seinem Beweise benutzt.

Versammlung vom 9. December 1882.

Herr Dr. P. Jaerisch sprach über die

„Kritik der Anwendbarkeit der Gleichungen der Elasticitäts-Theorie auf endliche Körper.“

Aus diesem Vortrage ist Folgendes zu referiren:

Der Vortragende beschränkt sich auf isotrope Körper. Von den auf krystallinische Medien aufgestellten Gleichungen ist bis jetzt nur auf die Lichtschwingungen Anwendung gemacht.

Die Elasticitätstheorie macht wesentlich zwei Voraussetzungen: 1) Elastische Kräfte werden nur erregt bei einer wirklich eintretenden Gestaltsveränderung in Folge einer äusseren Kraft; sie sind daher proportional den Verrückungen und deren Differentialquotienten nach den Coordinaten. 2) Diese Gestaltsänderungen sind so klein, dass höhere Potenzen der Verrückungen und ihrer Differentialquotienten vernachlässigt werden können.

Die zweite Voraussetzung ist für Körper mit theilweise unendlich kleinen Dimensionen nicht gültig. Die Principien für die Behandlung solcher Körper sind von Kirchhoff gegeben und die wichtigsten Probleme wie die Untersuchung der Schwingungszustände einer Membran oder eines dünnen Drahtes streng durchgeführt. Für endliche Körper wurden die beiden Voraussetzungen der Elasticitätstheorie und damit die Anwendbarkeit der Cauchy-Lamé'schen Gleichungen bisher von niemandem bestritten. Doch lassen diese Gleichungen für das rechtwinklige Parallelepipedon, sowie für gewisse andere Körper keine elastischen Schwingungen zu*). Somit steht die Theorie mit der Beobachtung und mit einem wichtigen Satze der theoretischen Physik in Widerspruch, der für die Elasticitätstheorie von Kirchhoff erwiesen, aber ebenso für die Wärme- und Potentialtheorie gültig ist. Dieser Satz lautet für die Elasticitätstheorie: Die von Cauchy und Lamé aufgestellten Gleichungen und Oberflächenbedingungen bestimmen die Verrückungen u, v, w eindeutig. Um die

*) Nur wenn zwischen den Kanten des Parallelepipedons gewisse Beziehungen bestehen, ergiebt die Theorie Transversalschwingungen.

Bedeutung dieses Satzes klar zu legen, geht der Vortragende näher auf die Methode ein, die partiellen Differentialgleichungen der theoretischen Physik zu integriren, und zeigt, dass den integrirenden Functionen stets eine gewisse Willkürlichkeit anhaftet; es scheint, als ob wir durch die verschiedenen Formen der Functionen zu charakteristisch verschiedenen Grössen kommen könnten, die doch den gegebenen Bedingungen genügten. So kann z. B. die allgemeinste Lösung der Gleichung:

$$\frac{d^2u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2u}{dx^2},$$

durch welche die Schwingungen einer elastischen Saite bestimmt werden, und in welcher a eine Constante ist, in folgenden zwei Formen erhalten werden:

$$u = \sum_m A_m f_m (x + at),$$

$$u = \sum_m (A_m \cos mx \cos amt + B_m \cos mx \sin amt + \ldots).$$

In der zweiten Form ist der Charakter der Functionen, nach denen die Entwickelung von u fortschreitet, durch die Differentialgleichung bestimmt; in der ersten Form erscheint u nach willkürlichen Functionen f_m entwickelt, deren Charakter erst durch die Grenzbedingungen zu bestimmen ist. Werden nun auch die Constanten A und m den Grenzbedingungen gemäss gewählt, so wäre es möglich, dass sich die beiden für u gewonnenen Darstellungen nicht als identisch nachweisen liessen. Andererseits werden die integrirenden Functionen häufig auf unmethodischem Wege, durch Zufall gewonnen, so dass sie möglicherweise nicht die allgemeinsten sind. Hier sagt obiger Satz, dass, wenn es uns geglückt ist, Functionen aufzufinden, die den Differentialgleichungen und allen Bedingungen genügen, dies die einzig möglichen sind.

Da nun die Elasticitätstheorie für gewisse Körper keine Schwingungen ergiebt, so können die Verrückungen für diese nicht eindeutig bestimmt sein, und der Kirchhoff'sche Beweis, der die Cauchyschen Oberflächenbedingungen voraussetzt, ist ebenso für gewisse Körper nicht gültig.

Darauf wurden die Voraussetzungen der Elasticitätstheorie geprüft und gezeigt, dass die zweite nur richtig ist, wenn der Körper keine Ecken und Kanten hat. Somit gilt die Cauchy-Lamé'sche Theorie nur für die Kugel, das Ellipsoid und andere stetig gekrümmte

Körper*). Es empfiehlt sich daher, ellipsoidische Scheiben und Stäbe zu verfertigen, um eine Vergleichung der Theorie mit der Beobachtung zu ermöglichen**).

---

*) Durchgeführt ist die Theorie nur für die Kugel und zwar für das Gleichgewicht, von Lamé in Liouville, Journal Bd. XIX; für die Schwingungen vom Vortragenden in Crelle, Journal Bd. 88.

**) In Betreff der Beweise, die der Vortragende der Kürze der Zeit wegen nur theilweise gab, wurde auf eine später erscheinende Abhandlung hingewiesen.

Mittheilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 4. Ausgegeben im April. 1884.

Berichte über die Versammlungen.

Versammlung vom 13. Januar 1883.

Herr Dr. H. Battermann, Beamter der Seewarte, wird als hiesiges Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Prof. Kiessling hält einen Vortrag über „anomale Dispersion".

Nach einer kurzen Uebersicht über die theoretischen, auf die Dispersion des Lichtes bezüglichen Arbeiten von Cauchy werden die kritischen mit der Cauchy'schen Theorie sich beschäftigenden Untersuchungen von Broch (Dove Repert. Bd. 7), Redtenbacher (Dynamidensystem), Christoffel, Briot und Kettler besprochen. Nach einer Auseinandersetzung der experimentellen Untersuchungen von Kundt und Christiansen wurde die von Sellmeier gegebene Theorie der anomalen Dispersion eingehend entwickelt.

Hauptversammlung vom 5. Februar 1883.

Der Jahrverwalter theilt den Austritt des Herrn Dr. Koeppen aus der Gesellschaft mit.

Der Herr Baupolizei-Inspektor Reese wird zum Ehrenmitgliede ernannt.

Die Gesellschaft zählt somit 52 ordentliche Mitglieder, worunter 39 hiesige und 13 auswärtige; ausserdem 3 Ehrenmitglieder. Zum Adjunkten wird Herr Ahlborn gewählt.

Nach Schluss der Verhandlungen bleibt die Gesellschaft zur 193sten Feier des Stiftungstages zu einem Festmahl beisammen, zu welchem sich auch verschiedene Gäste eingefunden hatten.

Versammlung vom 10. März 1883.

Der abgehende Jahrverwalter Herr Dr. Plath macht Mittheilung über die Kassenverhältnisse, woraus sich ergiebt, dass die Ausgaben die Einnahmen um ℳ 39,77 überschritten haben, so dass der Kassenbestand sich nur auf ℳ 928,18 beläuft.

Nach einer längeren Debatte, in welcher man sich über die geeignete Form der zu haltenden Vorträge einigt, macht Herr Dr. Schubert einige Mittheilungen über die bequemste Auffindung des Wochentages eines gegebenen Datums nach dem Gregorianischen Kalender.

Derselbe bemerkt, dass die vom Bradford Observer gebrachte und in viele Zeitungen übergegangene Regel zur Ermittelung des Wochentags, auf welchen ein beliebig gegebenes Datum des Gregorianischen Kalenders fällt, nicht allgemein richtig sei, und begründet, im Anschluss an seine Bemerkung, unmittelbar aus den Satzungen dieses Kalenders die folgende Regel:

Der c-te Tag des Jahres n, dessen Jahrhundert-Nummer a ist (z. B. $a = 18$ für 1884) ergiebt sich als r-ter Tag einer Woche (Sonntag als erster Tag gerechnet), wenn r der kleinste positive Rest ist, den man erhält, wenn man

$$n + n : 4 - (a - a : 4) + c$$

durch 7 dividirt, bei den Divisionen durch 4 nur den ganzzahligen Quotienten nimmt, ferner für Daten der Monate März bis December von Schaltjahren bei der Bestimmung der Zahl c den Februar, gerade so wie bei Nicht-Schaltjahren, zu 28 Tagen rechnet, endlich für die Monate Januar und Februar von Schaltjahren den dem gefundenen Wochentage vorangehenden Wochentag wählt. Z. B.:

Der 2. September 1870 fiel auf einen Freitag, da $n = 1870$, $a = 18$, $c = 5.31 + 28 + 2.30 + 2 = 245$ ist, und $1870 + 467 - (18 - 4) + 245$ bei der Division durch 7 den Rest $r = 6$ lässt.

Für den 1. März 1884 ergiebt sich $n = 1884$, $a = 18$, $c = 60$, also, da $[1884 + 471 - (18 - 4) + 60] : 7$ den positiven kleinsten Rest $r = 7$ lässt, ein Sonnabend.

Für den Neujahrstag des Jahres 2084 ist $n = 2084$, $a = 20$, $c = 1$ zu setzen, woraus sich, da $[2084 + 521 - (20 - 5) + 1] : 7$ den Rest $r = 1$ lässt, und 2084 ein Schaltjahr ist, ein Sonnabend ergiebt.

Versammlung vom 14. April 1883.

Herr Prof. Kiessling beendet seinen, in der Sitzung vom 13. Januar abgebrochenen Vortrag über „anomale Dispersion".

Im Anschluss an diesen Vortrag giebt Herr Dr. Fr. Jaerisch eine kurze Kritik der Dispersionstheorien, die nach Cauchy entstanden sind, und die darauf basiren, dass die Elasticitätsgleichungen unzureichend seien, die Erscheinungen der Dispersion und Absorption zu erklären, da die Lösungen derselben die Abhängigkeit der Brechungsindices von der Wellenlänge nicht ergeben. Cauchy erhält diese Abhängigkeit durch Berücksichtigung höherer Potenzen der relativen Entfernungen der Aethertheilchen. Es wird nun gezeigt, dass die Elasticitätsgleichungen Lösungen zulassen, die zur Erklärung der Dispersion wie der Absorption geeignet erscheinen. Die sich aus diesen ergebende Dispersionsformel entspricht den Beobachtungen und erklärt z. B. die Kundt'schen Dispersionscurven. Die nach denselben berechneten Brechungsindices weichen von den beobachteten erst in den 5ten Decimalen ab.

Den späteren Versuchen, die genannten Erscheinungen zu erklären, liegt die Ansicht zu Grunde, dass bei Aufstellung der Elasticitätsgleichungen der gegenseitige Einfluss zwischen Aether und Materie unberücksichtigt geblieben sei. Es werden daher Kräfte zwischen Aether und Materie angenommen und in die Rechnung eingeführt. Aber eine solche Annahme ist unberechtigt, so lange man den Aether imponderabel annimmt. Dann können die elastischen Kräfte keine Aenderung beim Durchgange durch ein Medium erfahren haben. Die Elasticitätsgleichungen müssen zur Erklärung dieser Erscheinungen ausreichen.

Wenn nun von Kräften zwischen den Aether- und Massentheilchen abgesehen werden soll, so kann der Einfluss der letzteren auf die Aetherbewegung nur derjenige sein, den selbstschwingende Grenzen auf denselben ausüben. Die Massentheilchen umgeben gleichsam als schwingende Hülle den Aether, durch welche sich derselbe frei bewegen kann. Die Aetherwellen reflectiren von den Massentheilchen und kehren, nachdem sie einen Theil ihrer lebendigen Kraft abgegeben haben, zurück; sie vereinigen sich mit den neu eintretenden Aetherschwingungen und veranlassen, dass die Amplituden der durch Interferenz entstandenen Aetherwellen von Zeit und Ort abhängig werden. Dieser Vorgang der Bildung neuer Aetherwellen infolge der Reflexionen wird selbst von der Länge der eintretenden Aetherwellen abhängig sein, und es wird unter gewissen Umständen Dispersion ein-

treten können und eintreten. Der Grund für die Erscheinung der Absorption ist sowohl in der Abgabe der lebendigen Kraft, als in Interferenzen zu suchen.

Da die Amplituden der Schwingungen des freien Aethers beim Durchgange durch ein Medium von Zeit und Ort abhängig werden können, so sind die Aetherschwingungen innerhalb dieses Mediums durch Ausdrücke von folgender Form zu definiren:

$$f(t, x, y, z) \cos\left(\frac{t}{\tau} - \frac{m_1 x + m_2 y + m_3 z}{\lambda}\right) 2\pi.$$

Die Function f in diesem Ausdrucke kann auf zweifache Weise bestimmt werden, einmal direct, indem man die Reflexionen der Aetherwellen von selbstschwingenden Grenzen und die Interferenzen mit den neu eintretenden Aetherschwingungen bestimmt, dann aber, indem man Lösungen der Elasticitätsgleichungen in solcher Form aufsucht.

Das letztere soll in der hinten folgenden Mittheilung: „Lösungen der Elasticitätsgleichungen von der Form

$$f(t, x, y, z) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} (\alpha t + a_1 x + a_2 y + a_3 z)“$$

geschehen. Unter den daselbst gewonnenen Lösungen eignen die sich mit *b*) S. 93 bezeichneten zur Erklärung obiger Erscheinungen. Es wurden dieselben auf Flintglas Nr. 13 angewendet und die Brechungsindices nach folgender (cf. S. 89 (9)) Formel berechnet:

$$n^2 = \frac{\lambda^2 - p_0}{p_2 \lambda^2 - p_1},$$

wobei für die Wellenlänge die Mittelwerthe (Wüllner II. S. 136) $\lambda_b = 6{,}872$, $\lambda_c = 6{,}567$, $\lambda_d = 5{,}893$, $\lambda_e = 5{,}271$, $\lambda_f = 4{,}862$, $\lambda_g = 4{,}304$, $\lambda_h = 3{,}956$ und weiter die Werthe $n_b = 1{,}627749$, $n_e = 1{,}642024$, $n_h = 1{,}671062$ zu Grunde gelegt wurden. Die genaue Uebereinstimmung der berechneten und beobachteten Werthe zeigt folnde Tabelle:

Strahl	n beobachtet	n berechnet	Die berechneten Werthe gleich den beobachteten
B	1,627749	1,627749	0
C	1,629681	1,629645	+ 36
D	1,635036	1,634997	+ 39
E	1,642024	1,642024	0
F	1,648260	1,648334	— 74
G	1,660285	1,660412	— 127
H	1,671062	1,671062	0

Versammlung vom 5. Mai 1883.

Herr Reitz machte einige Mittheilungen über ein von ihm construirtes neues Instrument, dem nach seiner Wirkungsweise die Benennung Periheliotrop gegeben wurde. Dieses Instrument hat nämlich den Zweck, von geodätischen Signalstellen aus nach allen Punkten des Horizontes zur Erleichterung des Aufsuchens neuer Dreieckspunkte Sonnenlichtblitze zu senden, selbstwirkend und in bestimmten, regulirbaren Intervallen. Ausser für den genannten Zweck würde das Instrument zur Bezeichnung exponirter Küstenpunkte leicht kenntliche Seesignale geben können, welche durch für die verschiedenen Punkte gewählte Zeitintervalle auf grosse Entfernungen eine genaue Erkennung des Küstenpunktes gestatteten, was sonst, auch bei klarem Wetter, doch erst bei grosser Annäherung an die Küste möglich ist.

Die Aufgabe ist auf zweierlei Art gelöst. Die eine Construction bedient sich nur eines einzigen Spiegels, dem eine solche Bahn bei seiner Drehung angewiesen ist, dass das von ihm reflectirte Sonnenlicht den ganzen Horizont bestreicht. Eine der Erdaxe parallele Axe, in Lagern an einem Gestell drehbar, trägt an ihrem Ende ein Gelenk und einen nach der Declination der Sonne für jeden Tag nach einem Gradbogen stellbaren Arm. Die genannte Axe wird in 24 Stunden Sonnenzeit einmal, durch ein auf dem Gestell angebrachtes Uhrwerk, herumgedreht. Am Ende des Armes befindet sich ein Kugelgelenk, um welches sich der den Spiegel tragende Arm drehen kann. Ein Laufwerk mit Windflügel, welches durch ein Gewicht getrieben wird, führt mittelst eines gebogenen Arms diese Drehung des Spiegels aus, für deren Zeit irgend eine Anzahl von Secunden für jeden Punkt festgesetzt wird. Sogar die annähernde Entfernung des durch Blitze sich zu erkennen gebenden Punktes liesse sich durch Farbe der Blitze oder durch Abänderung der Intervalle für nähere Zonen signalisiren.

Die zweite Lösung bedient sich eines vielseitigen Prismas, dessen Seiten durch Spiegelstreifen gebildet werden. Wenn man ein solches Prisma, bei horizontaler Lage der Seiten, um eine vertikale Axe dreht, so wird bei grosser Seitenzahl des Prismas eine Lage desselben nahezu erreicht werden, in der eine der Seitenflächen ihr reflectirtes Sonnenlicht einem bestimmten Punkt des Horizontes zusendet. Giebt man nun, während das Prisma sich um die vertikale Axe langsam dreht, der horizontalen Axe des Prismas eine schnellere Drehung, so wird, wenn das Verhältniss von Seitenzahl des Prismas und Geschwindigkeit beider Drehungen richtig gewählt wurde, eine der Seiten des Prismas dem Punkte einen Blitz senden.

Das für die Sammlung geodätischer Instrumente der kulturtechnischen Akademie Poppelsdorf bei Bonn ausgeführte Periheliotrop hat ein Prisma von 108 Spiegeln, und ist die Drehung um die horizontale Axe 20mal so schnell wie die um die vertikale Axe.

Herr Dr. Schubert spricht sodann über die Ausdehnung des Begriffs der 7 arithmetischen Operationen auf Operationen von höherer als der dritten Stufe, und macht auf die Arbeiten Eisenstein's (Crelle's Journal 1844, Bd. 28), Paugger's (Grunert's Archiv 1860, Bd. 35) und Gerlach's (Hoffmann's Zeitschr. 1882, Bd. 13) über die Operationen vierter Stufe aufmerksam. Die einfachste Formel bei der direkten Operation vierter Stufe ist:

$$(a; n)^{(a; m)} = (a; m + 1)^{(a; n-1)},$$

wo $(a; n)$ die Potenz bedeutet, deren Basis a und deren Exponent $(a; n-1)$ ist, z. B. $(a; 3) = a^{a^a}$. Während $a + a + a + \ldots$ ad inf. unendlich gross wird, und $a.a.a. \ldots$ ad inf. unendlich klein oder unendlich gross wird, je nachdem $a < 1$ oder $a > 1$ ist, während also $a + a + a + \ldots$ ad inf. und $a.a.a \ldots$ ad inf. von a unabhängig sind, so ist $a^{a^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{a}}}}}$ ad inf., wenigstens innerhalb gewisser Grenzen, eine Function von a, nämlich eine Wurzel der transcendenten Gleichung $\sqrt[x]{x} = a$, wie sich aus $a^{(a; \infty)} = (a; \infty)$ unmittelbar ergiebt. Der grösste Werth, den a haben darf, damit $(a; \infty)$ endlich bleibt, ist $a = \sqrt[e]{e} = 1{,}444\ldots$ Eisenstein hat für $(a; \infty)$ die Potenzreihe

$$(a; \infty) = 1 + la\,\frac{3^1}{2!}(la)^2 + \frac{4^2}{3!}(la)^3 + \frac{5^3}{4!}(la)^4 + \ldots$$

abgeleitet, die jedoch nur für $1 : \sqrt[e]{e} = 0{,}692\ldots \leq a \leq 1$ convergirt.

Herr Dr. Jaerisch sucht darauf eingehender als in der letzten Sitzung nachzuweisen, dass die Elasticitätsgleichungen die Dispersion und Absorption des Lichtes erklären können.

Eine ausführliche hierauf bezügliche mathematische Entwicklung ist am Schluss dieses Heftes mitgetheilt.

Herr Dr. Krüss bespricht schliesslich die Verschiedenheit in dem Anfangspunkt der Höhenscala auf Aneroidbarometern.

Versammlung vom 9. Juni 1883.

Herr Ahlborn trägt über die Beziehung der elliptischen Functionen zur Geometrie vor.

Für die Darstellung der Coordinaten einer Curve als Functionen eines veränderlichen Parameters ist eine aus der Ordnungszahl n der Curve, der Anzahl ihrer Doppelpunkte d und ihrer Rückkehrpunkte r gebildete Zahl von Bedeutung, nämlich die von Clebsch als Geschlecht der Curve bezeichnete Zahl $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$. Ist nämlich $p = 0$, wie bei den Curven dritter Ordnung mit einem Doppelpunkte oder einem Rückkehrpunkte, so werden die Functionen des veränderlichen Parameters rational (vgl. Clebsch, Crelle, Bd. 64). Ist $p = 1$, so werden die Functionen elliptische (vgl. Clebsch, Crelle, Bd. 63). Dies ist z. B. der Fall bei der allgemeinen Curve dritter Ordnung. Für diese wird die Darstellung mit Benutzung eines Satzes von Hermite ausgeführt. Aus der zuerst sich ergebenden Form:

$$\varrho x_i = p_i + q_i \sin^2 \text{ampl } u + r_i \sin^4 \text{ampl } u + s_i \sin \text{ampl } u . \cos \text{ampl } u . \Delta \text{ampl } u$$

wird mit Hilfe jenes Satzes die sich für die geometrische Verwendung besser eignende Form:

$$\varrho x_i = C_i H(u - \alpha_i) . H(u - \beta_i) . H(u - \gamma_i)$$

hergeleitet, worin $\alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1 = \alpha_2 + \beta_2 + \gamma_2 = \alpha_3 + \beta_3 + \gamma_3$ ist.

Unter Zugrundelegung dieser Darstellung werden dann einige Sätze über Punktsysteme auf der allgemeinen Curve dritter Ordnung abgeleitet.

Die Ausgangsaufgabe ist: Die Schnittpunkte einer C_3 mit einer C_n zu finden. Dieselbe wird dann specialisirt, indem statt C_n einmal eine Gerade, dann ein Kegelschnitt gesetzt wird. Den Schluss bilden einige Aufgaben über das Zeichnen geschlossener Polygone auf Curven dritter Ordnung, Aufgaben, die zuerst von Steiner gestellt und auf synthetisch-geometrische Weise gelöst sind.

Sodann erläutert Herr Reitz eine neue Zeichnung seines Perihelіotrop.

Schliesslich berichtet Herr Dr. Schubert über einen von Dr. Hauck in Berlin erfundenen Apparat, vermittelst dessen man aus zwei Projectionen desselben räumlichen Gebildes eine beliebige dritte leicht zeichnen kann.

Versammlung vom 8. September 1883.

Herr Lazarus referirt über einen Beweis des Bernouilli'schen Satzes von J. Bertrand, mitgetheilt in den Comptes rendus 1882 Nr. 94 unter der Ueberschrift: Sur la théorie des épreuves répétées, und über eine Arbeit von M. N. Adler: A method of solving approximately questions in compound interest without the aid of tables im Journal of the Institute of Actuaries XXIII. V.

Sodann trägt Herr Dr. Wagner über die Abbildung ebener Curven und Flächenstücke vor. Derselbe erinnert an die schon durch Gauss angegebene graphische Darstellung der imaginären und complexen Zahlen. Hiernach erweitert sich der Begriff der Zahlenlinie zu dem der Zahlenebene und es entspricht jedem Punkte dieser ein complexer Zahlenwerth von der Form $x + yi$, wo $i = \sqrt{-1}$ ist. Man kann nun eine Grösse w als abhängig von den Variabeln x und y einführen und erhält dann für jedes beliebige Werthpaar (x, y) einen entsprechenden Werth von w, der im Allgemeinen complex sein wird. Nach der gewöhnlichen Bezeichnung würde nun $w = f(x\,y)$ als Function von x und y anzusehen sein und zwar, da es sich um complexe Zahlen handelt, als eine complexe Function von x und y. Da w selbst complex ist, so kann es auf die Form $u + vi$ gebracht werden, so dass man erhält

$$u + vi = f(x\,y).$$

Hiermit ist aber keineswegs gesagt, dass $w = u + vi$ auch eine Function sei der einen complexen Grösse $x + yi$, die wir z nennen wollen. So ist $w = x - yi$ wohl eine Function der Variabeln x und y, nicht aber der einen $z = x + yi$. Man kann auch sagen: $w = x - yi$ ist wohl eine complexe Function, nicht aber eine Function complexen Argumentes. Nur diese letzteren spielen hier aber eine Rolle, und es ist klar, dass für sie der Ausdruck $w = u + vi$ gewissen Bedingungen genügen muss. Es ist nun nach Riemann eine Function w der Argumente x und y nur dann eine Function des complexen Argumentes $z = x + yi$, wenn die Ableitung $\frac{dw}{dz}$ unabhängig ist von der Fortschreitungsrichtung von z, d. h. unabhängig von dem Werthe $\frac{dy}{dx}$. Dies ist aber der Fall, wenn

$$\frac{dw}{dz} = \frac{\partial w}{\partial x} = -i\frac{\partial w}{\partial y}; \qquad \frac{\partial w}{\partial y} = i\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Ist nun aber diese Bedingung erfüllt, so entspricht jedem Linienelemente, welches z beschreibt, ein Linienelement der Variabeln w in der Weise, dass das Verhältniss der Quadrate der Linienelemente beider

Variabeln nur eine Function des Ortes ist, unabhängig von der Fortschrittsrichtung, so dass man schreiben kann:

$$du^2 + dv^2 = \lambda(dx^2 + dy^2),$$

wo

$$\lambda = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{v}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{dy}\right)^2.$$

Denkt man sich nun für z und w zwei Ebenen, in denen sie sich bewegen sollen, und lässt diese Variabeln entsprechende unendlich kleine geschlossene Figuren beschreiben, so werden diese ähnlich sein müssen, und es liefert die Ebene der w eine sogenannte conforme Abbildung der Ebene der z. Um dies noch deutlicher hervortreten zu lassen, denken wir uns in den beiden Ebenen einander entsprechende Dreiecke, deren Ecken $z\ z'\ z''$ und $w\ w'\ w''$ sein mögen; bei unendlicher Kleinheit der Seiten und der Voraussetzung $w = f(z)$ haben wir dann die folgenden Gleichungen:

$$\frac{z'' - z}{z' - z} = \frac{w'' - w}{w' - w} = \alpha + \beta i,$$

so dass:

$$(z'' - z) = (z' - z)(\alpha + \beta i) \quad \text{und} \quad (w'' - w) = (w' - w)(\alpha + \beta i).$$

Hier soll $z'' - z$ so aus $z' - z$ entstehen, wie $(\alpha + \beta i)$ aus $+1$; dasselbe gilt für $w'' - w$ in Bezug auf $w' - w$, woraus die Uebereinstimmung der Winkel folgt.

Insbesondere folgt aus dem Obigen, dass sich zwei z-Curven immer unter demselben Winkel schneiden, wie die entsprechenden w-Curven.

Beispiele:

Die einfachsten Gleichungen zwischen z und w sind die folgenden:

$$1)\ w = z \pm w; \qquad 2)\ w = za; \qquad 3)\ w = az + b;$$

$$4)\ w = \frac{1}{z} \quad \text{resp.} \quad \frac{az + b}{cz + d}.$$

Die erste liefert für die w-Ebene eine congruente Abbildung der z-Ebene, welche nur um $\pm a$ verschoben ist.

Die zweite Gleichung giebt eine Vergrösserung und eine Drehung, demnach eine Aehnlichkeit.

Die dritte Gleichung fügt zur Abbildung der zweiten noch eine parallele Verschiebung.

Von besonderem Interesse ist die vierte Gleichung, welche die Abbildung durch reciproke Radien vermittelt. Jeder Geraden durch den Nullpunkt der z-Ebene entsprechen wieder solche Gerade in der w-Ebene. Beliebigen Geraden entsprechen Kreise, die durch den Nullpunkt gehen. Die allgemeinere Beziehung:

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

lässt sich auf die einfachere $w = \frac{1}{z}$ zurückführen durch passende Verfügung über den Nullpunkt und den Einheitspunkt in beiden Ebenen, denn man kann für die die obige Gleichung auch schreiben:

$$\frac{cw-a}{bc-ad} = \frac{1}{cz+d}$$

und kann nun die linke Seite einer neuen Variabeln w' die rechte gleich $\frac{1}{z'}$ setzen, so dass man erhält:

$$w' = \frac{1}{z'}.$$

Ein weiteres Beispiel liefert die Gleichung

$$w = \log \text{nat. } z$$

oder

$$u + vi = \log(x + yi) = \log \sqrt{x^2+y^2} + i \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x} = \log r + i\varphi,$$

wenn r der Radiusvector und φ der Drehungswinkel ist.

Hier hat man dann offenbar

$$u = \log r \quad \text{und} \quad v = \varphi.$$

Bewegt sich etwa z auf einem Kreise, so ist r constant, also auch u, und man erhält in der w-Ebene eine Parallele zur Ordinatenaxe. Bewegt sich z dagegen auf einer Geraden, die durch den Nullpunkt geht, so ist φ constant, also auch v, und man erhält in der w-Ebene eine Parallele zur Abscissenaxe. Eine besonders anschauliche Darstellung erhält man, wenn man für r der Reihe nach die constanten Werthe $e^{\frac{\pi}{12}}, \left(e^{\frac{\pi}{12}}\right)^2 \ldots$ nimmt und entsprechend für φ die Werthe $\frac{\pi}{12}, \frac{2\pi}{12} \ldots$. Man erhält dann in der u-Ebene eine Schaar von Quadraten, denen in der z-Ebene gewisse Ringausschnitte entsprechen.

Die Punkte dieser beiden Ebenen entsprechen nun einander nach dem Abbildungsgesetz, welches hier zu Grunde gelegt ist; auch ganze Ebenencomplexe werden einander entsprechen, und zwar schneiden zwei Linien der z-Ebene einander stets unter demselben Winkel, wie die ihnen entsprechenden Linien der w-Ebene.

Der Punkt $r = 0$ muss ausgeschlossen werden, wie überhaupt jeder Punkt, für welchen $\lambda = 0$ oder $= \infty$ wird, da λ die Grösse ist, die das Vergrösserungsverhältniss in den einander entsprechenden Punkten bestimmt. Diese Grösse aber ist 0 oder ∞, wenn $\frac{dw}{dz} = 0$ oder $= \infty$ ist.

Wählt man, wie hier geschehen, eine beliebige Beziehung zwischen w und z, z. B. $w = \log z$, $w = \sin z$ u. s. w., so kann man in der z-Ebene eine bestimmte Figur abgrenzen, z. B. ein Quadrat, einen Kreis u. dgl. m. und dann die Linie suchen, welche das entsprechende Flächenstück in der w-Ebene begrenzt. Man kann sich aber offenbar auch die umgekehrte Aufgabe stellen, d. h. ein durch eine vorgeschriebene Begrenzungslinie gegebenes Ebenenstück etwa auf einer Kreisfläche abzubilden suchen, wobei man also analytisch die abbildende Function erst zu bestimmen hat. Als naheliegendes Beispiel haben wir hier die Aufgabe, die Fläche einer Ellipse auf die Fläche eines Kreises abzubilden.

Da die Bedingungsgleichungen gelten:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y},$$

so ergiebt sich weiter durch partielle Differentiation:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \text{ und } \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y},$$

d. h.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Ebenso hat man auch:

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0,$$

und es handelt sich daher um die Integration dieser Differentialgleichung bei vorgeschriebenen Grenzbedingungen. Eine abgeschlossene Theorie für die Behandlung der Aufgabe nach dieser Richtung lässt sich indes wohl noch nicht geben. Die Lösung des obigen Problems, die Ellipse auf eine Kreisfläche abzubilden, soll hier vielmehr auf einem besonderen Wege durchgeführt werden, den Herr Professor Schwarz in Göttingen eingeschlagen hat. Dieser Gelehrte, der bekanntlich in deutschen Zeitschriften und im mündlichen Vortrage elegante Lösungen einer ganzen Reihe von Abbildungsaufgaben bekannt gemacht hat, hat die hier vorzuführende Aufgabe in den Turiner Annalen zuerst behandelt.

Im Nachfolgenden werde mit $u = x + yi$ eine complexe Variable bezeichnet, welche den Umfang einer Ellipse durchlaufen möge, wenn gleichzeitig eine andere complexe Variable s die Peripherie eines Kreises vom Radius 1 beschreibt. Jedem Punkte u im Innern der Ellipse entspreche ein Punkt s im Innern des Kreises, dem Mittelpunkt der Ellipse der Mittelpunkt des Kreises. Sind diese beiden Punkte zugleich die Coordinatenanfänge, so soll für $u = 0$ auch $s = 0$ sein.

Setzt man $u = \varrho e^{\psi i}$, $s = Re^{\varphi i}$, wo R am Rande den Werth 1 hat und geht man zu den Logarithmen über, so hat man:

$$\log u = \log \varrho + \psi i \text{ und am Rande } \log s = \varphi i.$$

Denkt man sich ferner u und s als Functionen einer dritten Variablen z, so wird die Ellipse auf den Kreis abgebildet durch die Gleichung:

$$\log s = \log u + G(z),$$

wo $G(z)$ so bestimmt werden muss, dass es für $u = 0$ endlich bleibt, damit $\log s$ und $\log u$ gleichzeitig unendlich werden, und dass am Rande der Ellipse der reelle Theil von $G(z) = -\log \varrho$ werde, da dann $\log R = 0$, somit $R = 1$ wird.

Wir bestimmen nun zunächst u als Function von z in der Weise, dass bei möglichst einfacher Bewegung von z die Variable u eine Ellipse beschreibt. Dies gelingt nach Herrn Schwarz durch die Beziehung:

$$u = \frac{1}{2i}\left(z - \frac{1}{z}\right).$$

Setzt man $z = re^{\vartheta i}$, so ergiebt sich:

$$u = x + yi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right)\sin\vartheta + \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{r} - r\right)\cos\vartheta.$$

Dies giebt:

$$x = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right)\sin\vartheta,$$

$$y = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right)\sin\vartheta$$

oder:

$$\frac{x^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r} + r\right)^2} + \frac{y^2}{\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r} - r\right)^2} = 1$$

und

$$\frac{x^2}{\sin^2\vartheta} - \frac{y^2}{\cos^2\vartheta} = 1.$$

Bei constantem r erhält man auf diese Weise eine Ellipse, bei constantem ϑ eine confocale Hyperbel. Bei constantem r aber beschreibt z zwei concentrische Kreise. Denn lösen wir die Gleichung

$$u = \frac{1}{2i}\left(z - z^{-1}\right)$$

nach z auf, so finden wir

$$z = iu \pm \sqrt{1 - u^2},$$

und es entsprechen jedem Werthe von u zwei Werthe von z, diese sind

$$z_1 = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta);\ z_2 = -\frac{1}{r}(\cos\vartheta - i\sin\vartheta) = -\frac{1}{z_1},$$

welche man findet, wenn man für u den Werth einsetzt:

$$u = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right)\sin\vartheta + \frac{1}{2}i\left(\frac{1}{r} - r\right)\cos\vartheta.$$

Es durchläuft daher bei constantem r sowohl z_1 als z_2 einen Kreis, deren Radien r und $-\frac{1}{r}$ sind; beide Kreise werden im entgegengesetzten Sinne durchlaufen und schliessen einen Kreisring ein, dessen Inneres dem Innern der Ellipse entspricht. Ebenso durchläuft z zwei gerade Linien, wenn u eine Hyperbel beschreibt. Statt des Kreisringes aber wünschen wir eine volle Kreisfläche und bestimmen daher die Function G von z, die wir auch als Function von $z - z^{-1}$ ansehen können.

Ehe wir hierzu übergehen, wollen wir noch eine Bemerkung über die Halbaxen der Ellipse machen. Es ist, wenn wir dieselben mit a und b bezeichnen:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} + r\right), \quad b = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r} - r\right),$$

also umgekehrt, wenn a und b gegeben sind:

$$\text{entweder } \begin{cases} r = \dfrac{1}{a+b} \\ \dfrac{1}{r} = a + b \end{cases} \qquad \text{oder } \begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{a-b} \\ r = a - b, \end{cases}$$

wofür wir auch schreiben können:

$$r = \sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

Dieser Werth von r soll im Folgenden mit r_0 bezeichnet werden.

Nach dem bekannten Theorem von Laurent lässt sich die gesuchte Function G, für das angegebene Ringgebiet gültig, in eine Reihe, die nach positiven und negativen Potenzen von z fortschreitet entwickeln, welche die Form hat:

$$G(z) = A_0 + B_0 i + \sum_1^\infty (A_n + B_n i) z^n + \sum_1^\infty (A_{-n} + B_{-n} i) z^{-n}.$$

Die Coefficienten ergeben sich nun durch folgende Betrachtung.

Der reelle Theil der Function soll für die Randwerthe, d. h. wenn $r = r_0$ ist, übereinstimmen mit dem reellen Theil von $\log u$, d. h. mit $\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)$. Nun ist aber:

$$\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}\log\left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{r} + r\right)^2\sin^2\vartheta + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{r} - r\right)^2\cos^2\vartheta\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{1 + r^4 - 2r^2\cos 2\vartheta}{4r^2}\right),$$

also für den Rand:

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+r_0^4-2r_0^2\cos 2\vartheta}{4r_0^2}\right)$$
$$= \frac{1}{2}\log(1+r^4-2r_0^2\cos 2\vartheta) - \log 2r_0.$$

Wir entwickeln nun $\log(1+r_0^4-2r_0^2\cos 2\vartheta)$ in eine Reihe. Diese erhalten wir durch die bekannte Relation:

$$\log(1-\zeta) = -\zeta - \frac{\zeta^2}{2} - \frac{\zeta^3}{3} - \cdots,$$

wenn wir setzen:

$$\zeta = r_0^2\cos 2\vartheta + ir_0^2\sin 2\vartheta.$$

Es ist dann:

$$\log(1-\zeta) = \log(1-r_0^2\cos 2\vartheta - ir_0^2\sin 2\vartheta)$$
$$= \frac{1}{2}\log(1+r_0^4-2r_0^2\cos 2\vartheta) + i\operatorname{arc\,tg} K.$$

Dagegen haben wir für die rechte Seite:

$$-\zeta = -r_0^2\cos 2\vartheta - iK_1,$$
$$-\frac{\zeta^2}{2} = -\frac{r_0^4\cos 4\vartheta}{2} - iK_2,$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

Die reellen Theile liefern die Gleichung:

$$\frac{1}{2}\log(1-r_0^2\cos 2\vartheta+r_0^4) = -r_0^2\cos 2\vartheta - \frac{r_0^4\cos 4\vartheta}{2}\cdots.$$

Demnach ist:

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$$
$$= \log\frac{1}{2r_0} - r_0^2\cos 2\vartheta - \frac{r_0^4\cos 4\vartheta}{2} - \cdots - \frac{r_0^{2n}\cos 2n\vartheta}{n}\cdots$$

Das allgemeine Glied dieser Reihe ist:

$$-\frac{r_0^{2n}\cos 2n\vartheta}{n}.$$

Da r_0 nur gerade Exponenten und ϑ nur gerade Coefficienten hat, so werden wir nur gerade Potenzen von z erwarten dürfen und untersuchen daher den Ausdruck:

$$z^n + z^{-n} = r^n\cos n\vartheta + r^{-n}\cos n\vartheta + iL$$
$$= \frac{r^{2n}+1}{r^n}\cos n\vartheta + iL.$$

Der reelle Theil nimmt für den Rand den Werth $\frac{r_0^{2n}+1}{r_0^n}\cos n\vartheta$ an.

Man ersieht hieraus, dass das allgemeine Glied der obigen Reihe:

$$\frac{r_0^{2n} \cos 2n\vartheta}{n}$$

sich ausdrücken lässt durch den reellen Theil des Randwerthes von

$$\frac{r_0^{4n}}{n(r_0^{4n}+1)}(z^{2n}+z^{-2n}).$$

Darnach erhalten wir für $G(z)$ den Ausdruck:

$$G(z) = \log\frac{1}{2r_0} - \sum_1^\infty \frac{r_0^{4n}}{n(r_0^{4n}+1)}(z^{2n}+z^{-2n}).$$

Jedes einzelne Glied dieser Reihe stimmt im Allgemeinen in seinem reellen Theile nicht überein mit $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$; dieser Fall tritt vielmehr nur ein, wenn z solche Werthe annimmt, für welche u auf dem Rande der Ellipsenfläche liegt. Hiermit erscheint die Aufgabe als gelöst, da die Reihe auch noch convergirt für $z=1$, dem Werthe, der $u=0$ entspricht. Wir erhalten also nunmehr:

$$\log s = \log u - G(z),$$
$$s = e^{\log u - G(z)}.$$

Sondert man hier das Reelle vom Imaginären, so erhält man, wenn der reelle Theil von $G(z)$ mit $\Re(Gz)$ bezeichnet wird:

$$s = e^{\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \Re(Gz) + i\Theta} = e^{\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \Re(Gz)} \cdot e^{i\Theta}.$$

Am Rande der Ellipse ist für jeden Wert von Θ nun:

$$\frac{1}{2}\log(x^2+y^2) - \Re(Gz) = 0.$$

Wir erhalten also, wenn u die Peripherie der Ellipse durchläuft:

$$s = e^0(\cos\Theta + i\sin\Theta).$$

Es durchläuft also s thatsächlich die Peripherie eines Kreises mit dem Radius 1.

Wir geben nun dem Ausdruck für s eine etwas bessere Form, indem wir setzen:

$$z = e^{vi}, \quad r_0^4 = q.$$

Dann ist

$$u = \sin v, \quad z^{2n} + z^{-2n} = 2\cos 2nv.$$

Dies liefert

$$\log s = \log(2\sqrt{q}\sin v) + \frac{2q}{1+q}\cos 2v + \frac{2q^2}{2(1+q^2)}\cos 4v + \cdots$$

Von besonderem Interesse ist hier der Werth, der dem Brennpunkte der Ellipse entspricht, für welchen $r=1$ und $\vartheta = \frac{\pi}{2}$ ist; ebenso ist $v = \frac{\pi}{2}$.

Nennen wir diesen Werth $\sqrt{k}$, so erhalten wir:

$$\log \sqrt{k} = \log 2\sqrt[4]{q} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{(-1)^n q^n}{n(1+q^n)}.$$

Aus dieser Reihe lässt sich $\sqrt{k}$ jederzeit berechnen. Diese Grösse liegt immer zwischen 0 und 1, weil q zwischen 0 und 1 liegt.

Setzen wir $s = t\sqrt{k}$, so haben wir:

$$\log t = -\log \sqrt{k} + \log(2\sqrt[4]{q} \sin v) + \frac{2q}{1+q} \cos 2v + \frac{1}{2} \frac{2q^2}{1+q^2} \cos 4v + \cdots$$

und damit die bekannte Reihe für den Logarithmus der elliptischen Function sin am $\left(\frac{2Kv}{\pi}\right)$, sodass schliesslich:

$$t = \sin \text{am} \left(\frac{2Kv}{\pi}\right)$$

die Gleichung ist, durch welche die Ellipsenfläche mit den Halbachsen a und b auf die Fläche eines Kreises vom Radius $\frac{1}{\sqrt{k}}$ abgebildet wird. Zu jedem gegebenen Werthe von u lassen sich die zugehörigen Werthe von s und v, also auch der von sin am $\frac{2Kv}{\pi}$ berechnen.

Es mag schliesslich noch bemerkt werden, dass t nur für die Randwerthe einen Kreis liefert. Für im Innern der Ellipse gelegene Ellipsen und für die Hyperbeln entstehen vielmehr Curven, welche der folgenden Gleichung vierten Grades angehören:

$$\{m(x^2+y^2) - (1-m)a^2\}\{n(x^2+y^2) - (1-n)a^2\} + (m-n)^2 a^2 x^2 = 0.$$

Für $m = n$ liefert diese Gleichung den in Rede stehenden Kreis:

$$x^2 + y^2 = \frac{1-m}{m} a^2.$$

Versammlung vom 13. October 1883.

Herr Schulze aus Dortmund wird als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Nach einer Besprechung über die Theilnahme der mathematischen Gesellschaft an der Feier, welche zu Ehren der von den meteorologisch-magnetischen Polarstationen heimkehrenden Gelehrten am 17. Nov. von den vereinigten wissenschaftlichen Vereinen Hamburgs gefeiert werden soll, beendet Herr Dr. Wagner seinen Vortrag über die Abbildung ebener Curven.

Versammlung vom 3. November 1883.

Herr Dr. Battermann zeigt seinen Uebertritt in die Zahl der auswärtigen Mitglieder der Gesellschaft an, da er in eine Stellung an die Sternwarte zu Berlin berufen worden ist.

Herr Dr. Krüss hält sodann einen Vortrag über die Verwerthung der Resultate photometrischer Messungen.

Während bei früheren photometrischen Messungen stets nur die Intensität der Lichtquellen in horizontaler Richtung bestimmt wurde, muss man bei elektrischen Bogen- und Glühlampen die Helligkeit in allen Richtungen messen, da bei ersteren wohl die Helligkeit symmetrisch um eine Vertikalachse, jedoch in verschiedenen Richtungen einer Vertikalebene sehr verschieden, bei der letzteren im Allgemeinen nach allen Richtungen verschieden ist.

Will man ermitteln, welche Leistung eine elektrische Lampe ergiebt, bei Aufwendung einer gewissen elektrischen (oder dynamischen) Arbeit, so muss man also die gesammte von der Lichtquelle ausgesandte Lichtmenge bestimmen. Zu diesem Zwecke nimmt man die Lichtquelle als im Mittelpunkte einer Kugel befindlich an und benutzt die Resultate der unter verschiedenen Richtungen gemachten Helligkeitsmessungen zur Berechnung der auf die Oberfläche der Kugel fallenden Lichtmenge.

Da bei einer Bogenlampe die Helligkeit in der Horizontalebene constant und die Lichtquelle selbst als Punkt anzusehen ist, so ist die auf den Umfang jeden Vertikalkreises ausgesandte Lichtmenge

$$Q = \frac{df}{r^2} \int i d\alpha,$$

wo df ein Element der Kugeloberfläche, r der Radius und i die Helligkeit in der Richtung α ist.

Sind unter den nicht sehr von einander verschiedenen Winkeln α_1 und α_2 einer Vertikalebene die Intensitäten der Bogenlampe i_1 und i_2, so kann man die Intensität innerhalb der von α_1 und α_2 eingeschlossenen Kugelzone als constant $= \frac{i_1 + i_2}{2}$ annehmen. Die auf diese Kugelzone fallende Lichtmenge ist dann

$$Q_{\alpha_1 \alpha_2} = r^2 \pi (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)(i_1 + i_2)$$

und die auf die ganze Kugeloberfläche fallende Lichtmenge

$$Q = r^2 \pi \sum (\sin \alpha_2 - \sin \alpha_1)(i_1 + i_2).$$

Versteht man nun unter der mittleren räumlichen Helligkeit J der Bogenlampe diejenige nach allen Richtungen constante Helligkeit, welche sie haben müsste, um die gleiche Lichtmenge auf

die Kugeloberfläche auszusenden, so ist

$$J = \frac{Q}{4r^2\pi} = \frac{1}{4}\sum(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)(i_1 + i_2).$$

Bei einer Glühlampe sei die Intensität in dem Parallelkreise $\alpha_0 = 0$ in der Richtung β_0 senkrecht zur Ebene des Kohlenfadens $= i_0$. Die Intensitäten i_{01}, i_{02} in anderen Richtungen β_1, β_2 u. s. w. sind dann im Allgemeinen von i_0 verschieden, und die mittlere Helligkeit in dem horizontalen Parallelkreise α_0 ist

$$J_0 = \frac{1}{4r\pi}\sum(\beta_2 - \beta_1)(i_{01} + i_{02}),$$

oder, wenn $\beta_2 - \beta_1 = \beta_3 - \beta_2 \ldots = \beta_n - \beta_{n-1}$ ist,

$$J_0 = \frac{1}{2}\sum(i_{01} + i_{02}) = C \cdot i_0.$$

Da man nun bei einer Glühlampe annehmen kann, dass in jedem Parallelkreise das Verhältniss der Intensitäten dasselbe ist, wie in dem Parallelkreise $\alpha_0 = 0$, da die Projektion des Kohlenbügels sich gleichmässig ändert, so bleibt C für alle α constant und es ist die mittlere räumliche Helligkeit der Glühlampe

$$J = \frac{1}{4}C\sum(\sin\alpha_2 - \sin\alpha_1)(i_1 + i_2),$$

wobei die Intensitäten i alle in dem grössten Vertikalkreise $\beta_0 = 0$ gemessen sind.

Nach diesen Gesichtspunkten wurden die von der Prüfungs-Commission der Münchner Elektricitäts-Ausstellung im Jahre 1882 vorgenommenen photometrischen Messungen an Bogen- und Glühlampen verwerthet[1]).

Bei der Pariser elektrischen Ausstellung im Jahre 1881 hatte man bei den Glühlampen die Helligkeit nur unter dem Winkel $\beta = 45^0$ gegen die Ebene des Kohlenbügels gemessen und diese Helligkeit als Mittel der horizontalen Intensität angenommen.

Wie weit dieses berechtigt war, zeigt folgende Betrachtung.

Die von einem Element df des Kohlenbügels auf ein Element df' der Kugeloberfläche ausgesandte Lichtmenge ist

$$q = i\frac{df \cdot df' \cos\beta \cos\beta'}{r^2},$$

wo β und β' die Winkel der Verbindungslinie von df und df' mit den Normalen auf df und df' bedeuten. Wenn r sehr gross, also $\beta' = 90^0$ ist, so wird

$$q = \frac{i\,df'}{r^2}\int\cos\beta\,df.$$

1) Officieller Bericht über die Internationale Elektricitäts-Ausstellung in München 1882, 2. Theil, Lichtmessungen p. 76—146.

Es sei, wie dieses bei den Edison-Lampen nahezu zutrifft, der Querschnitt des Kohlenfadens rechteckig, in der Ebene des Kohlenfadens habe er die Breite a, in derjenigen senkrecht dazu b. Die Länge der beiden Seitenstützen sei $= v$ und das Verbindungsstück von der Länge h rechtwinklig zu den beiden Seitenstützen.

Die in der Horizontalebene $\alpha_0 = 0$ unter dem Horizontalwinkel β ausgestrahlte Lichtmenge ist dann

$$Q_{0\beta} = \frac{i\,df'}{r^2}\,\{2v(a\cos\beta + b\sin\beta) + ah\cos\beta\}.$$

Hieraus folgen

$$Q_{045} = \frac{i\,df'}{r^2}\left\{\frac{2v(a+b)+ah}{\sqrt{2}}\right\}$$

und die gesammte in dieser Horizontalebene ausgestrahlte Lichtmenge

$$Q_0 = \frac{4i\,df'}{r^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\{2v(a\cos\beta + b\sin\beta) + ah\cos\beta\}\,d\beta.$$

Die mittlere horizontale Lichtmenge ist

$$Q_m = \frac{Q_0}{4\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta} = \frac{i\,df'}{r^2}\left\{\frac{2v(a+b)+ah}{\pi}\right\},$$

woraus folgt $$\frac{Q_m}{Q_{045}} = \frac{2\sqrt{2}}{\pi} = 0{,}9003 = \text{Const.}$$

Dieses Gesetz ward durch die in München vorgenommenen Messungen an Edison- und Maxim-Lampen vollauf bestätigt, wenn auch wegen etwas von dem Rechteck abweichendem Querschnitt des Kohlenfadens die Constante einen etwas von $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}$ abweichenden Werth hatte.

Aus Obigem geht ferner hervor, dass das Maximum der Helligkeit in der Ebene des Kohlenfadens liegt, wenn $b > a$, und umgekehrt, ferner dass bei kreisförmigem Querschnitt des Fadens (Müller- und Cruto-Lampe) die Helligkeit in der Horizontalebene nahezu constant sein muss.

Herr Dr. Schubert trägt dann einige Resultate seiner Studien über n-dimensionale Geometrie vor, indem er besonders auf die Erzeugung der „Combinations-Configurationen“ eingeht. Zwei kleine Aufsätze, die aus diesen Studien entstanden, hat der Verfasser der Redaction zur Veröffentlichung übergeben. Sie befinden sich am Schluss dieses Heftes.

Versammlung vom 8. December 1883.

Herr Bürgermeister Dr. Kirchenpauer, welcher als Förderer und Fürsprecher aller wissenschaftlichen Bestrebungen in Hamburg auch der Thätigkeit der mathematischen Gesellschaft ein dieselbe förderndes Interesse wiederholt gezeigt hat, wird zum Ehrenmitglied der Gesellschaft ernannt.

Herr Dr. Bock hält sodann einen Vortrag über die Entwicklung von Functionen in unendliche Producte.

Es können so entwickelt werden die transcendenten eindeutigen Functionen, wie $\sin z$, $\sin \operatorname{am} z$, die Thetafunctionen etc., welche für unendlich viele verschiedene Werthe des Arguments einen und denselben Functionalwerth liefern. Die Entwicklung n-deutiger Functionen, wenn n endlich, ist gegenstandslos; denn entsprechen einem und demselben Werthe z des Arguments die n verschiedenen Functionalwerthe $w_1, w_2, w_3, \ldots w_n$, so sind

$$w_1 + w_2 + w_3 + \cdots + w_n = W_1,$$

$$w_1 w_2 + w_1 w_3 + w_1 w_4 + \cdots + w_1 w_n + w_2 w_3 + \cdots + w_{n-1} w_n = W_2$$

und endlich

$$w_1 \cdot w_2 \cdot w_3 \cdot \ldots \cdot w_n = W_n$$

sämmtlich eindeutige Functionen von z, also sind die verschiedenen Zweige der Function w Lösungen einer algebraischen Gleichung:

$$w^n - W_1 w^{n-1} + W_2 w^{n-2} - + \cdots = 0,$$

deren Coefficienten, die W, eindeutige Functionen von z sind. Und diese Gleichung zerfällt in die n Factoren

$$(w - w_1)(w - w_2)(w - w_3) \cdot \ldots \cdot (w - w_n) = 0.$$

Die trigonometrischen und elliptischen Functionen werden definirt als die Umkehrungen von Integralen algebraischer Functionen: $\int Z \cdot dz$, wo Z in den einfachsten Fällen

$$= \frac{1}{\sqrt{1 - z^2}} \quad \text{resp.} \quad = \frac{1}{\sqrt{(1 - z^2)(1 - k^2 z^2)}}.$$

Diese Integrale leisten die Abbildung der complexen Zahlenebene auf einen Parallelstreifen, beziehungsweise auf ein Parallelogramm. Zum Zweck der Abbildung ist die zweiblättrige Riemann'sche Fläche derartig zerschnitten und wieder zusammengeheftet, dass beim zweimaligen Umkreisen eines Verzweigungspunktes die Function Z zu ihrem Anfangswerth zurückkehrt, und, nachdem diejenigen Punkte ausgesondert sind, bei deren Umkreisung $\int Z \cdot dz$ nicht den Werth

Null liefert (z. B. für $\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ der unendlich ferne Punkt auf beiden Blättern), durch sogenannte Querschnitte zu einer einfach zusammenhängenden Fläche gestaltet, derartig, dass jede geschlossene Curve auf derselben einen Flächenraum vollständig begrenzt, man also nicht von einem Punkte nahe einer Seite der Curve zu einem unendlich benachbarten auf der anderen Seite derselben gelangen kann, ohne die Curve zu schneiden. Es wird gezeigt, dass und warum das Integral einer Function, genommen über einen solchen geschlossenen Umfang, gleich Null ist, vorausgesetzt, dass innerhalb dieses Umfanges die Function eindeutig, stetig und endlich ist, durch Vergleichung eines einfachen Integrals $\int Pdx + Qdy$ mit dem Doppel-Integral

$$\int\int\left(\frac{dQ}{dx} - \frac{dP}{dy}\right)dx\,dy$$

und durch Zurückgehen auf das Kriterium für die Function einer complexen Grösse.

Ist nun $\varphi(t)$ um den Punkt $t = z$ herum endlich, eindeutig und stetig, so ist $\int_{(z)} \frac{\varphi(t)}{t-z}dt = 2\pi i \,.\, \varphi(z)$, wobei in einer Richtung zu integriren ist, dass die umschlossene Fläche zur Linken bleibt. Ebenso ist $\int_{(z)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} = 2\pi i \frac{f'(z)}{f(z)}$, genommen über einen unendlich kleinen Kreis um den Punkt z, wenn $f'(t)$ die Ableitung von $f(t)$, und $f(t)$ in der Nähe von $t = z$ weder Null noch unendlich ist. Wenn dagegen $f(t)$ für $t = \alpha$ von der m^{ten} Ordnung Null wird, so lässt sich $f(t)$ hierselbst entwickeln als Reihe $A_m(t-\alpha)^m + A_{m+1}(t-\alpha^{m+1}+\cdots)$ und $\frac{f'(t)}{f(t)}$ beginnt, als Reihe entwickelt, mit dem Posten $\frac{m}{t-\alpha}$, ist also innerhalb des Integrationsweges nicht endlich. Ebenso würde $\frac{f'(t)}{f(t)}$ den Posten $-\frac{n}{t-\beta}$ enthalten, wenn $f(t)$ für $t = \beta$ von der n^{ten} Ordnung unendlich würde.

$\frac{f'(z)}{f(z)}$ ist nun $= \frac{d}{dz}[\log f(z)]$. Dieses mit dz multiplicirt und von einer beliebigen unteren Grenze $Z = Z_0$ aus integrirt, ergiebt einen Werth für $\log\left[\frac{f(z)}{f(z_0)}\right]$, welcher als Exponent zur Basis e gesetzt den Werth von $\frac{f(z)}{f(z_0)}$ in der gewünschten Form liefert.

Es handelt sich also darum, für $\int \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z}$ einen passenden

Integrationsweg zu finden. Sei $f(t)$ für $t = \alpha_m$ von der m^{ten} Ordnung Null, für $t = \alpha_l$ von der Ordnung l, für $t = \beta_n$ von der n^{ten} Ordnung $= \infty$, für $t = \beta_0$ von der Ordnung 0, u. s. w., so ist

$$\int_{(\alpha_m)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z},$$

genommen über einen unendlich kleinen Kreisumfang um $t = \alpha_m$,

$$= \int_{(\alpha_m)} \frac{m}{t-\alpha} \cdot \frac{dt}{t-z}$$

$$= -\int_{(\alpha_m)} \frac{m}{t-\alpha} \cdot \frac{1}{z-\alpha}\left(1 + \frac{t-\alpha}{z-\alpha} + \left(\frac{t-\alpha}{z-\alpha}\right)^2 + \cdots\right) \cdot dt$$

$$= -\int_{(\alpha_m)} \frac{m}{z-\alpha} \cdot \frac{dt}{t-\alpha},$$

da die übrigen Posten schliesslich $= 0$,

$$= \frac{-2m\pi i}{z-\alpha}.$$

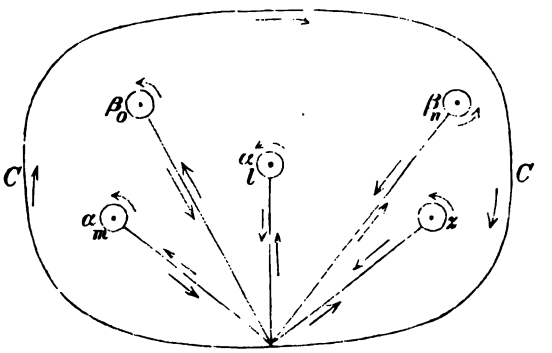
Ebenso

$$\int_{(\beta_n)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} = \frac{2n\pi i}{z-\beta}.$$

Ferner

$$\int_{(z)} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} = 2\pi i \cdot \frac{f'(z)}{f(z)} = 2\pi i \cdot \frac{d}{dz}[\log f(z)].$$

Und endlich ist $\int \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z}$,



genommen über eine geschlossene Curve von nebenstehender Configuration, $= 0$.

Dabei sind die geraden Verbindungslinien jede zweimal in ent-

gegengesetzter Richtung zu durchlaufen, dürfen also unberücksichtigt bleiben. Man erhält demnach durch Freimachung des Postens

$$\int_{(z)}^{\cdot} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} :$$

$$2\pi i \cdot \frac{d}{dz}\left[\log f(z)\right]$$
$$= -\sum \int_{(\alpha)}^{\cdot} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} - \sum \int_{(\beta)}^{\cdot} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} + \int_{(C)}^{\cdot} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z},$$

das letzte Integral genommen über eine beliebige, in unsern Fällen im Unendlichen liegende Curve C, welche keinen der Punkte α und β trifft. Also

$$\frac{d}{dz}\left[\log f(z)\right]$$
$$= \sum \frac{m}{z-\alpha} - \sum \frac{n}{z-\beta} + \int^{\cdot} \frac{f'(t)}{f(t)} \cdot \frac{dt}{t-z} = \sum \frac{m}{z-\alpha} - \sum \frac{n}{z-\beta} + U$$

gesetzt, da, wenn C im Unendlichen liegt, U von z unabhängig ist, und sogar gleich Null wird, wenn es sich um $\sin z$ oder die elliptischen oder Theta-Functionen handelt. Hieraus folgt

$$\log\left[\frac{f(z)}{f(z_0)}\right] = \sum \log \frac{(z-\alpha)^m}{(z_0-\alpha)^m} + \sum \log \frac{(z-\beta)^n}{(z_0-\beta)^n} + \int_{z_0}^{z} U \cdot dz,$$

also

$$f(z) = f_0(z) \prod \frac{(z-\alpha)^m}{(z_0-\alpha)^m} \cdot \frac{(z_0-\beta)^n}{(z-\beta)^n} \cdot e^{\int_{z_0}^{z} U \cdot dz}.$$

Mit Rücksicht darauf, dass $\sin z$, als die Umkehrung von $\int^{\cdot} \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}}$ von der ersten Ordnung gleich Null wird für $z = 0, = \pi, = 2\pi, \ldots$ und dass $\frac{\sin z}{z} = 1$ ist für $z = 0$, $\frac{\sin \pi z}{z} = \pi$ für $z = 0$, wird gefunden: $\sin \pi z = \pi z \prod_{-n}^{+n} 1 - \frac{z}{n}$, (indem $z_0 = 0$ gewählt wird), wo n mit Ausnahme des Werthes Null abwechselnd alle positiven und negativen ganzzahligen reellen Werthe der Reihe nach zu durchlaufen hat.

In ähnlicher Weise ergiebt sich

$$\text{siu am } w\frac{\Omega}{2} = \left[\frac{w\frac{\Omega}{2} \prod_{-n}^{+n} \prod_{-m}^{+m} 1 - \frac{w}{m+n\tau}}{\prod_{-n-1}^{+n} \prod_{-m}^{+m} 1 - \frac{w}{m+(n+\frac{1}{2})\tau}} \right],$$

woselbst zunächst, bei fixirtem Werthe des n, das Product in Bezug auf m gebildet werden muss. Darauf hat man das Doppelproduct zu bilden, indem die erste Productbildung für den nächsten Werth des n wiederholt wird, und so fort, und alle diese Producte erster Ordnung mit einander multiplicirt gedacht werden. Die eine Combination $m = n = 0$ ist ausgeschlossen. τ ist gleich $\frac{\Omega'}{\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$, Ω' und Ω die beiden Periodicitätsmoduln des ersten elliptischen Integrales $\int^{\cdot} \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(1-k^2z^2)}}$. Zähler und Nenner der Productentwickelung sind bis auf einen constanten Faktor $= \vartheta_1(w)$ beziehungsweise $= \vartheta_0(w)$, so dass sin am $w\frac{\Omega}{2}$ gleich ist

$$\frac{1}{\sqrt{k}} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}, \quad \text{gleich} \quad \frac{\vartheta_3}{\vartheta_2} \cdot \frac{\vartheta_1(w)}{\vartheta_0(w)}.$$

Die Vorsichtsmassregeln, welche zum Zweck der Convergenz des Productes anzuwenden sind, können der vorgerückten Zeit wegen nur angedeutet werden.

Versammlung vom 12. Januar 1884.

Herr Ahlborn hält einen Vortrag über die Bedeutung der Zahl p in den Abel'schen Functionen und ihre Beziehung zur Geometrie.

Im Anschluss an die Arbeiten von Clebsch über diesen Gegenstand (Crelle, Bd. 63 und Theorie der Abelschen Functionen von Clebsch und Gordan, Leipzig, Teubner, 1866) wird vom Vortragenden zunächst nachgewiesen, dass der Ausdruck

$$\frac{\Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}$$

von den c_i unabhängig ist, wenn $f(x_1, x_2, x_3) = 0$ ist. f ist eine ganze, homogene Function n^{ter} Ordnung in den x_i. Bezeichnet dann $\Phi(x_1, x_2, x_3)$ eine homogene, rationale, aber gebrochene Function, deren Zähler um $n-3$ Ordnungen höher ist als der Nenner, so dass man sie als eine Function $n-3^{\text{ter}}$ Ordnung ansehen kann, so wird das Integral gebildet

$$V = \int^{\cdot} \frac{\Phi \cdot \Sigma \pm c_1 x_2 dx_3}{\sum_i c_i \frac{\partial f}{\partial x_i}}.$$

Dasselbe wird durch die lineare Transformation $\mu x_i = a_i t + b_i x + c_i s_x$ in die Form eines gewöhnlichen Integrals übergeführt. Setzt man

schliesslich $t = 1$, so wird dieses gewöhnliche Integral $V = \int \frac{\Psi . dx}{F'(s_x)}$. Hierin bedeutet Ψ ebenfalls wie Φ eine Function $n - 3^{\text{ter}}$ Ordnung, F eine Function n^{ter} Ordnung. Ersetzt man mit Hülfe der Gleichung $F(s_x, x) = 0$ die s_x durch x in V, so erscheint V als abhängig von nur einer Variabeln und hat ganz die Form der von Riemann behandelten Abel'schen Integrale.

Unstetigkeiten des Integrals V, die durch Nullwerden des Nenners unter dem Integralzeichen sich ergeben würden, können dadurch gehoben werden, dass dann gleichzeitig Φ resp. Ψ verschwindet. Geometrisch bedeutet das: Die Curve $\Phi = 0$ muss durch die Doppel- und Rückkehrpunkte der Curve $f = 0$ gehen. Stellt man an dieselbe diese Bedingungen, und ist die Anzahl der Doppelpunkte und Rückkehrpunkte von $f = 0$ d resp. r, so bleiben von den $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$ Coefficienten der Function Φ noch $p = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - r$ unbestimmt. Daraus ergiebt sich: Das allgemeinste, überall endliche Integral oder Integral 1. Gattung, wie Riemann sagt, muss sich aus p speciellen Integralen desselben Grades zusammensetzen lassen. p heisst dann nach Riemann die Klasse dieses Integrals oder die Klasse der zur Function F gehörende Abelschen Functionen.

Die geometrische Beziehung der Zahl p, die Clebsch das Geschlecht der Curve $f = 0$ genannt hat, zur Curve $f = 0$ leuchtet ein. Geometrisch ist der Satz wichtig, dass durch eine eindeutige Transformation die Zahl p erhalten bleibt.

Ueber eine gewisse Familie von Konfigurationen.

(Von Hermann Schubert in Hamburg.)

In neuester Zeit haben Herr Reye (Acta mathematica, Bd. 1) und die Arbeiten des Herrn S. Kantor die Aufmerksamkeit der Geometer auf eigenthümliche, ebene und räumliche Gebilde gelenkt, die man mit dem Namen „Konfigurationen“ bezeichnet hat. Unter einer ebenen Konfiguration versteht Herr S. Kantor eine innerhalb einer und derselben Ebene gelegene Gruppe von p Punkten und s Strahlen, die so zusammenhängen, dass jeder der s Strahlen π von den p Punkten enthält und jeder von den p Punkten σ von den s Strahlen aussendet. Eine solche Konfiguration soll hier mit $(p, s; \pi, \sigma)$ bezeichnet werden. Zwischen den vier ganzen Zahlen p, s, π, σ muss natürlich die Relation $p : s = \pi : \sigma$ stattfinden. Herr Reye nennt eine $(p, s; \pi, \sigma)$ nur dann „Konfiguration“, wenn $p = s$, also auch $\pi = \sigma$ ist. Die einfacheren Konfigurationen sind den Geometern von altersher bekannt. Von den Konfigurationen, für welche $\pi = \sigma = 3$ und $p = s = 10$ ist, ist die bekannteste diejenige, deren Punkte aus den 6 Ecken zweier perspectiv liegender Dreiecke, dem Centrum der Perspectivität und den 3 Schnittpunkten entsprechender Seiten besteht.

Der Umstand, dass die letzterwähnte ebene Konfiguration auch auf so einfache Weise durch ein räumliches vollständiges Fünfeck erzeugt wird, indem man eine Ebene mit den 10 Verbindungsgeraden je zweier Ecken und den 10 Verbindungsebenen je dreier Ecken des Fünfecks zum Schnitt bringt, führte mich auf den Gedanken, in ähnlicher Weise eine ganze Familie von ∞^2 ebenen Konfigurationen durch ein n-Eck zu erzeugen, das einer unsern Raum enthaltenden π-dimensionalen, linearen Punktmannigfaltigkeit M_π angehört. Man überträgt bei einer solchen Erzeugung gewissermassen nur die bequeme Sprechweise, welche durch die Geometrie bei Gleichungssystemen mit drei Veränderlichen ermöglicht wird, von der uns vorstellbaren, dreidimensionalen, linearen Punktmannigfaltigkeit M_3, die wir Raum nennen, auf eine M_π, operirt aber eigentlich algebraisch, nämlich mit linearen Gleichungssystemen von π Variabeln. Man meint also z. B. ein System von $\pi - a$ linearen Gleichungen zwischen π Variabeln, wenn man von einer in der M_π liegenden M_a spricht. Dies vorausgeschickt, erkennt man leicht die beiden folgenden fundamentalen Sätze, die hier zur Anwendung kommen sollen:

1) In einer M_π ist eine M_{a-1} immer durch aM_0, d. h. durch a Punkte, die in ihr liegen sollen, eindeutig bestimmt.

2) In einer M_π haben eine M_a und eine M_b eine $M_{a+b-\pi}$ gemeinsam ($a \gtrless \pi$, $b \gtrless \pi$).

Um eine Verallgemeinerung der oben erwähnten Fünfecks-Konfiguration (10, 10; 3, 3) zu erhalten, denke man sich eine Gruppe von $\pi + \sigma - 1$ Punkten, die in einer M_π liegen, dann durch je $\pi - 1$ dieser Punkte eine $M_{\pi-2}$ gelegt (Satz 1) und jede der entstandenen $M_{\pi-2}$, deren Anzahl $p = \frac{(\pi+\sigma-1)!}{(\pi-1)!\,\sigma!}$ beträgt, mit einer Ebene, d. h. mit einer M_2, zum Schnitt gebracht. Dann entstehen in dieser Ebene (Satz 2) p Punkte. Man denke sich ferner durch je π von jenen $\pi + \sigma - 1$ Punkten eine $M_{\pi-1}$ gelegt, und jede der entstandenen $M_{\pi-1}$, deren Anzahl $s = \frac{(\sigma+\pi-1)!}{\pi!(\sigma-1)!}$ beträgt, mit derselben Ebene zum Schnitt gebracht. Dann entstehen in dieser Ebene s Strahlen. Die so entstandenen p Punkte und s Strahlen bilden nun eine Konfiguration $(p, s; \pi, \sigma)$. Jede Gruppe von π eine $M_{\pi-1}$ bestimmenden Punkten enthält nämlich π-mal eine Gruppe von $\pi - 1$ Punkten, und jede dieser Gruppen bestimmt eine der $M_{\pi-2}$. Es liegt also in jeder $M_{\pi-1}$ π-mal eine $M_{\pi-2}$; und deshalb liegen auch in jedem von den s Strahlen π Punkte. Ferner kann jede Gruppe von $\pi - 1$ eine $M_{\pi-2}$ bestimmenden Punkten σ-mal mit einem der $(\pi + \sigma - 1) - (\pi - 1) = \sigma$ übrigen Punkten zu einer Gruppe von π eine $M_{\pi-1}$ bestimmenden Punkten zusammengefasst werden. Folglich liegt jede $M_{\pi-2}$ σ-mal in einer $M_{\pi-1}$ oder jeder der p Punkte liegt auf σ von den s Strahlen. Es existirt demnach zu jedem Zahlenpaar π, σ eine Konfiguration, die sich aus $\frac{(\pi+\sigma-1)!}{(\pi-1)!\,\sigma!}$ Punkten und $\frac{(\pi+\sigma-1)!}{\pi!(\sigma-1)!}$ Strahlen derartig zusammengesetzt, dass jeder Strahl π Punkte enthält, und jeder Punkt σ Strahlen aussendet.

Bezeichnet man die ursprünglich angenommenen $\pi + \sigma - 1$ Punkte durch die ganzen Zahlen von 1 bis $\pi + \sigma - 1$ und darauf immer den Schnittpunkt der Ebene mit einer $\pi - 1$ dieser Punkte enthaltenden $M_{\pi-2}$ durch die Vereinigung der Zahlen, die diesen $\pi - 1$ Punkten zukommen, so stellen die Bezeichnungen der p Punkte der Konfiguration die sämmtlichen Combinationen $(\pi - 1)$ter Klasse ohne Wiederholung der Zahlen 1 bis $\pi + \sigma - 1$ dar, und es bilden immer die Bezeichnungen von π in einem und demselben Strahle liegenden Punkten die sämmtlichen π Kombinationen $(\pi - 1)$ter Klasse von je π Zahlen. Beispielsweise erhält man bei der Konfiguration

(35, 35; 4, 4), welche aus der Annahme $\pi = 4$, $\sigma = 4$ resultirt, dass immer in gerader Linie liegen: die Punkte 123, 124, 134, 234; ferner 123, 125, 135, 235; ferner 123, 126, 136, 236; ferner 123, 127, 137, 237; u. s. w. Die eben genannten vier geraden Linien wird man passend mit 1234, 1235, 1236, 1237 bezeichnen. Wegen des Zusammenhangs der ∞^2 in der angegebenen Weise erzeugbaren Konfigurationen mit Kombinationen möchte ich für dieselben den Namen „Kombinations-Konfigurationen" vorschlagen.

Da die Gruppe der $\pi + \sigma - 1$ in der M_π liegenden Punkte eindeutig bestimmt ist, sobald eine $M_{\pi-2}$ und ausserdem alle diejenigen $M_{\pi-2}$ gegeben sind, die mit der $M_{\pi-2}$ zusammen in einer $M_{\pi-1}$ liegen, so ist auch die erzeugte Kombinations-Konfiguration (p, s, π, σ) eindeutig bestimmt, wenn einer ihrer Punkte und alle diejenigen Punkte gegeben sind, welche mit diesem einen Punkte in gerader Linie liegen. Die Construction der Konfiguration aus diesen gegebenen Elementen ist bei der oben erwähnten Bezeichnung äusserst einfach. Um z. B. die (35, 35; 4, 4) zu construiren, betrachte man Punkt 123, die vier durch 123 gehenden Strahlen 1234, 1235, 1236, 1237, und auf diesen Strahlen noch die viermal drei Punkte 124, 125, 126, 127; 134, 135, 136, 137; 234, 235, 236, 237 als gegeben. Dann sind durch achtzehnmal zwei von diesen Punkten die achtzehn Strahlen. 1245, 1246, 1247, 1256, 1257, 1267; 1345, 1346, 1347, 1356, 1357, 1367; 2345, 2346, 2347, 2356, 2357, 2367 bestimmt. Durch achtzehnmal zwei von diesen Strahlen ergeben sich darauf die achtzehn Punkte 145, 146, 147, 156, 157, 167; 245, 246, 247, 256, 257, 267; 345, 346, 347, 356, 357, 367. Nun erhält man dadurch, dass zwölfmal drei von diesen Punkten in einem neuen Strahle liegen, die zwölf Strahlen 1456, 1457, 1467, 1567; 2456, 2457, 2467, 2567; 3456, 3457, 3467, 3567. Endlich schneiden sich viermal drei dieser Strahlen in einem neuen Punkte, wodurch die vier Punkte 456, 457, 467, 567 entstehen, die ihrerseits wieder alle vier in einem und demselben Strahle, dem Strahle 4567 liegen. So sind die fünfunddreissig Punkte und die fünfunddreissig Strahlen der Konfiguration eindeutig festgestellt. In dual entsprechender Weise erhält man eine eindeutige Construction der Kombinations-Konfiguration $(p, s; \pi, \sigma)$, wenn ein Strahl und alle diejenigen Strahlen gegeben sind, die sich mit ihm in einem und demselben Punkte schneiden.

Die soeben besprochenen Constructionen führen auch zu der Constantenzahl (Zahl der zur Bestimmung erforderlichen einfachen Bedingungen) der Kombinations-Konfiguration $(p, s; \pi, \sigma)$. Bei der ersterwähnten Construction erfordert nämlich die Bestimmung des

Anfangspunktes zwei einfache Bedingungen, die Bestimmung der σ ihn enthaltenden Strahlen dann noch σ Bedingungen, und die Bestimmung der $\pi - 1$ sonstigen Punkte auf jedem der σ Strahlen $\sigma(\pi - 1)$ weitere Bedingungen. Deshalb ist die gesuchte Constantenzahl gleich $2 + \sigma + \sigma(\pi - 1)$ oder gleich $\pi.\sigma + 2$. Bei der dual entsprechenden Construction erhält man dasselbe Resultat aus

$$2 + \pi + \pi(\sigma - 1).$$

Um in ähnlicher Weise zu einer Familie von ∞^2 räumlichen Konfigurationen zu gelangen, hat man unsern Raum innerhalb einer M_π zu denken, und mit einem in dieser M_π liegenden vollständigen $(\pi + \sigma - 1)$-Eck zum Schnitt zu bringen. Dann erhält man in unserm Raume $p = \frac{(\pi+\sigma-2)!}{(\pi-2)!\,\sigma!}$ Punkte, $s = \frac{(\pi+\sigma-2)!}{(\pi-1)!\,(\sigma-1)!}$ Strahlen und $e = \frac{(\pi+\sigma-2)!}{\pi!\,(\sigma-2)!}$ Ebenen, die so zu einander liegen, dass jede dieser e Ebenen π Strahlen und $\frac{1}{2}\pi(\pi - 1)$ Punkte enthält, jeder dieser s Strahlen $\pi - 1$ Punkte enthält und $\sigma - 1$ Ebenen aussendet, jeder dieser p Punkte σ Strahlen und $\frac{1}{2}\sigma(\sigma - 1)$ Ebenen aussendet. Von solchen räumlichen Kombinations-Konfigurationen giebt es ∞^2, da zu jedem Zahlenpaar π, σ eine gehört. Diejenigen unter ihnen, die aus kleinen Werthen von π und σ resultiren, sind bekannt. Beispielsweise erhält man für $\pi = 4$, $\sigma = 4$ die Konfiguration der sämmtlichen Potenzebenen, Potenzstrahlen und Potenzpunkte von sechs Kugeln, wobei zu bemerken ist, dass aus $\pi = n - 2$ und $\sigma = 4$ die Konfiguration der sämmtlichen Potenzelemente von n Kugeln entsteht.

Analog wie bei den oben ausführlicher besprochenen ebenen Kombinations-Konfigurationen wird die Uebersicht auch bei den räumlichen durch eine geschickte Bezeichnung erleichtert; nämlich dadurch, dass man jeden Punkt durch $\pi - 2$, jeden Strahl durch $\pi - 1$ und jede Ebene durch π von den Zahlen 1 bis $\pi + \sigma - 2$ bezeichnet, und immer dafür sorgt, dass die Zeichen für $\pi - 1$ auf einem Strahle liegenden Punkte die $\pi - 1$ Kombinationen $(\pi - 2)$ter Klasse von den $\pi - 1$ Zahlen sind, die den Strahl bezeichnen, u. s. w.

Eindeutige Constructionen der dem Zahlenpaar π, σ zugehörigen räumlichen Konfiguration erhält man unter anderm auf folgende Weise: Erstens durch einen Strahl, durch die $\pi - 1$ auf ihm liegenden Punkte, durch die $\sigma - 1$ von ihm ausgehenden Ebenen, und entweder durch die $\pi - 1$ in jeder dieser Ebenen sonst noch liegenden Strahlen oder durch die $\sigma - 1$ von jedem dieser Punkte sonst noch ausgehenden Strahlen; zweitens durch eine Ebene, durch die π in

ihr liegenden Strahlen und durch die $\sigma - 2$ sonst noch von jedem dieser Strahlen ausgehenden Ebenen; drittens durch einen Punkt, durch die σ von ihm ausgehenden Strahlen und durch die $\pi - 2$ sonst noch auf jedem dieser Strahlen liegenden Punkte. Bei der ersten Construction sind $4 + (\pi - 1) + (\sigma - 1) + (\pi - 1)(\sigma - 1)$, bei der zweiten $3 + 2\pi + \pi(\sigma - 2)$, bei der dritten $3 + 2\sigma + \sigma(\pi - 2)$ einfache Bedingungen gegeben. Also erhält man in allen drei Fällen übereinstimmend $\pi . \sigma + 3$ für die Constantenzahl der zum Zahlenpaar π, σ gehörigen räumlichen Kombinations-Konfiguration.

Schliesslich möchte ich nicht unerwähnt lassen, dass die hier besprochene Erzeugung einer gewissen Familie von Konfigurationen aus einem im π-dimensionalen Raume liegenden, vollständigen $(\pi + \sigma - 1)$-Eck bezw. $(\pi + \sigma - 2)$-Eck nur ein Beispiel für die Benutzung des π-dimensionalen Raumes zur Erzeugung von Konfigurations-Familien abgeben sollte. In ähnlicher Weise kann man auch andere Erzeugungsweisen als die auf das vollständige n-Eck bezügliche vom dreidimensionalen Raume auf den π-dimensionalen übertragen, dadurch in diesen Konfigurationen zwischen $(\pi - 1)$-dimensionalen und $(\pi - 2)$-dimensionalen, bez. zwischen $(\pi - 1)$-dimensionalen, $(\pi - 2)$-dimensionalen und $(\pi - 3)$-dimensionalen linearen Punktmannigfaltigkeiten hervorrufen, und so durch Schneiden mit unserm Raume zu neuen ebenen bezw. räumlichen Konfigurationen gelangen.

Nachschrift. Eine briefliche Mittheilung des Herrn Reye machte mich, nachdem ich die vorstehende Mittheilung abgefasst hatte, auf die inhaltreiche Abhandlung des Herrn Veronese in den Math. Ann. S. 161 aufmerksam. Diese Abhandlung, welche allgemein die projectiven Verhältnisse der Räume verschiedener Dimensionen überhaupt behandelt, und ebenfalls von dem Princip des Schneidens erfolgreichen Gebrauch macht, gelangt in Abschnitt I, § 1 und § 2 auch zu Gebilden, die mit den Kombinations-Konfigurationen identisch sind. Da jedoch Herr Veronese bei diesen Gebilden nicht verweilt und im Besondern nicht auf die Construction derselben oder die Auffindung ihrer Constantenzahl eingeht, so dürfte es gerechtfertigt erscheinen, wenn ich einerseits die Priorität des Herrn Veronese hinsichtlich der Benutzung des n-dimensionalen Raums zur Erzeugung von Konfigurationen anerkenne, andrerseits aber auch die vorliegende Publikation nicht zurückziehe.

Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen des dreidimensionalen Satzes, dass es zwei Strahlen giebt, welche vier gegebene Strahlen schneiden.

(Von Hermann Schubert in Hamburg.)

In einer nächstens in den Math. Ann. erscheinenden Abhandlung habe ich mit Hilfe des auf den n-dimensionalen Raum angewandten Princips von der Erhaltung der Anzahl (Calcül der abzähl. Geom. § 4) eine gewisse Gruppe von den fundamentalen Anzahlen des n-dimensionalen Raumes bestimmt. Es ist mir gestattet, das Resultat dieser Bestimmung hier als vorläufige Mittheilung zu veröffentlichen.

Die Gesammtheit aller ∞^n Werthgruppen von n Variabeln heisse n-dimensionaler Raum, und werde mit M_n bezeichnet. Die Gesammtheit derjenigen ∞^r Werthgruppen dieser n Variabeln, welche einem Systeme von $n-r$ linearen Gleichungen zwischen diesen Variabeln genügen, heisse r-stufige lineare Mannigfaltigkeit, und werde deshalb kurz als eine in der M_n liegende M_r bezeichnet. Hiernach kann das erwähnte Resultat so ausgesprochen werden: „In der M_n liegt eine endliche Anzahl von M_r, deren jede mit jeder von $(r+1)(n-r)$ gegebenen gleichfalls in der M_n liegenden M_{n-r-1} je einen Punkt gemeinsam hat. Diese endliche Anzahl ist gleich

$$\frac{1!\,2!\,3!\ldots r!\,[(r+1)(n-r)]!}{(n-r)!\,(n-r+1)!\,(n-r+2)!\ldots(n-1)!\,n!},$$

wo, wie üblich, $a!$ das Produkt aller a ganzen Zahlen von 1 bis a bedeutet.“ Für $n=3$, $r=1$ ergiebt sich z. B., dass es in unserm Raume zwei Strahlen giebt, die vier gegebene Strahlen schneiden; für $n=3$, $r=2$, dass es in unserm Raume nur eine Ebene giebt, die zugleich durch drei gegebene Punkte geht; für $n=4$, $r=1$, dass es im vierdimensionalen Raume 5 Strahlen giebt, welche sechs gegebene Ebenen schneiden; u. s. w.

Algebraisch lässt sich das obige Resultat so aussprechen:

Es seien $(r+1)(n-r)$ Systeme von je $r+1$ linearen Gleichungen zwischen n Variabeln gegeben. Dann giebt es

$$\frac{1!\,2!\,3!\ldots r!\,[(r+1)(n-r)]!}{(n-r)!\,(n-r+1)!\ldots(n-1)!\,n!}$$

Systeme von je $n-r$ linearen Gleichungen zwischen denselben Variabeln von solcher Beschaffenheit, dass es immer eine Werthgruppe der n Variabeln giebt, die sowohl einem dieser Systeme als auch jedem der gegebenen Systeme genügt.

Hamburg, December 1883.

Lösungen der Elasticitätgleichungen von der Form $f(t, x, y, z) \cos(\alpha t + a_1 x + a_2 y + a_3 z)$.

(Mitgetheilt von Dr. P. Jaerisch.)

§ 1. Lösungen der verlangten Form werden zunächst von folgender Gleichung gesucht:

$$\frac{d^2F}{dt^2} = \omega^2 \Delta^2 F, \tag{1}$$

wo ω eine Constante bedeutet und wo, wie stets, zur Abkürzung gesetzt ist

$$\Delta^2 F = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{d^2y} + \frac{d^2F}{dz^2}. \tag{2}$$

Diese Gleichung löst man durch:

$$F = e^{\alpha t + a_1 x + a_2 y + a_3 z}; \tag{3}$$

die Constanten a und α haben der Bedingung zu genügen:

$$\alpha^2 = \omega^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2). \tag{3a}$$

Lässt man nun die Constanten a und α entweder sämmtlich reell oder sämmtlich imaginär sein, so werden trigonometrische oder exponentiale Functionen als Lösungen gewonnen. So stellt man z. B. für Lichtschwingungen die Lösungen in der Form dar:

$$\cos\left(\frac{t}{\tau} - \frac{m_1 x + m_2 y + m_3 z}{\lambda}\right) 2\pi,$$

wo τ und λ Schwingungsdauer und Wellenlänge bedeuten. Die Gleichung (3a) geht für dieselbe über in:

$$\left(\frac{\lambda}{\tau}\right)^2 = \omega^2(m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$

und ergiebt bekanntlich keine Dispersion, weil $\frac{\lambda}{\tau}$ von λ oder τ unabhängig bleibt. Diese Abhängigkeit und zugleich eine Lösung in der verlangten Form wird erhalten, wenn man die Constanten zum Theil oder sämmtlich complex imaginär nimmt. Es sei

$$\alpha = \beta + i\gamma, \qquad a_i = b_i + ic_i$$

und zur Abkürzung werde gesetzt

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \qquad c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2,$$

so zerfällt die Bedingung (3a) in folgende zwei:

$$\begin{cases} \beta^2 - \gamma^2 = \omega^2(b^2 - c^2) \\ \beta\gamma = \omega^2(b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3), \end{cases} \tag{4}$$

und die Lösung (3) geht über in:

$$F = e^{\beta t + b_1 x + b_2 y + b_3 z} e^{i(\gamma t + c_1 x + c_2 y + c_3 z)}. \tag{4a}$$

§ 2. Von (4a) unterscheiden sich die entsprechenden Lösungen der Elasticitätsgleichungen nur durch constante Factoren. Um sie zur Erklärung der Dispersion und Absorption anzuwenden, werde gesetzt:

$$\gamma = \frac{2\pi}{\tau}, \qquad c_i = -\frac{m_i}{\lambda} 2\pi, \qquad b_i = 2\pi s_i,$$

wo m_i, s_i willkürliche Constanten bezeichnen, und zur Abkürzung:

$$m^2 = m_1^2 + m_2^2 + m_3^2, \qquad s^2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2,$$
$$s_m = m_s = s_1 m_1 + s_2 m_2 + s_3 m_3;$$

man erhält so (4) und (4a):

$$\begin{cases} \beta^2 - \left(\frac{2\pi}{\tau}\right)^2 = \omega^2 \left(s^2 - \frac{m^2}{\lambda^2}\right)(2\pi)^2, \\ \frac{\beta}{\tau} = -\omega^2 s_m \frac{2\pi}{\lambda}; \end{cases} \tag{5}$$

$$F = e^{\left(-\omega^2 s_m \frac{\tau}{\lambda} t \pm s_1 x \pm s_2 y \pm s_3 z\right) 2\pi} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\frac{t}{\tau} - \frac{m_1 x + m_2 y + m_3 z}{\lambda}\right) 2\pi. \tag{6}$$

Aus (5) folgt durch Elimination von β:

$$\left(\frac{\tau}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\omega^2} \frac{\omega^2 s^2 \tau^2 + 1}{\omega^2 s_m^2 \tau^2 + m^2}.$$

Definirt man nun τ als Schwingungsdauer des Lichtes von bestimmter Farbe im freien Aether und setzt $\lambda_0 = \omega_0 \tau$, wo λ_0 die Wellenlänge, ω_0 die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im freien Aether bezeichnet, und definirt man λ als entsprechende Wellenlänge der Aetherschwingungen innerhalb eines Mediums, so erhält man die Dispersionsformel:

$$\left(\frac{\lambda_0}{\lambda}\right)^2 = n^2 = \frac{\omega_0^2}{\omega^2} \frac{\omega^2 s^2 \lambda_0^2 + \omega_0^2}{\omega^2 s_m^2 \lambda_0^2 + m^2 \omega_0^2}$$

oder auch

$$n^2 = \frac{\lambda_0^2 + p_0}{p_2 \lambda_0^2 + p_1}, \tag{7}$$

wenn mit p_0, p_1, p_2 bezeichnet wird:

$$p_0 = \left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 \frac{1}{s^2}, \qquad p_1 = \frac{m^2}{s^2}, \qquad p_2 = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{s^2}{s^2} \tag{7a}$$

die Bedingung dafür, dass (6) Dispersion ergiebt, dass also n von λ_0 abhängig bleibt, ist: Es darf sich s_i nicht in der Form $s_i = c m_i$ darstellen lassen, wo c eine Constante bezeichnet.

(4a) und (4) behalten ihre Gültigkeit, wenn die b und β imaginär angenommen werden. Man erhält so entsprechend (5a) und (6):

(8) $$F = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\pm\omega^2 s_m \frac{\tau}{\lambda} t \mp s_1 x \mp s_2 y \mp s_3 z\right) 2\pi \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\frac{t}{\tau} - \frac{m_1 x + m_2 y + m_3 z}{\lambda}\right) 2\pi,$$

(9) $$n^2 = \frac{\lambda_0^2 - p_0}{p_2 \lambda_0^2 - p_1}.$$

Ob im besonderen Falle die Formeln (6) und (7) oder (8) und (9) anzuwenden sind, hat die Berechnung der Constanten q nach der Formel

$$n^2 = \frac{\lambda_0^2 + q_0}{q_2 \lambda_0^2 + q_1}$$

zu entscheiden; je nachdem sich für q_0 und q_1 positive oder negative Werthe ergeben, wird man (6), (7) resp. (8), (9) anwenden.

§ 3. Wir untersuchen, ob die Gleichung (1) weitere Integrale der verlangten Form zulässt. Wir setzen $F = fg$, wo f und g Functionen von t, x, y, z sein mögen. Die Gleichung (1) geht dadurch über in:

(10) $$g\frac{d^2 f}{dt^2} + f\frac{d^2 g}{dt^2} + 2\frac{df}{dt}\frac{dg}{dt} = \omega^2\left\{g\Delta^2 f + f\Delta^2 g + 2\left(\frac{df}{dx}\frac{dg}{dx} + \frac{df}{dy}\frac{dg}{dy} + \frac{df}{dz}\frac{dg}{dz}\right)\right\}.$$

Diese Gleichung lässt eine leichte Bestätigung der gefundenen Lösungen zu; sie wird offenbar auch erfüllt durch:

$$f = p + \xi x + \eta y + \zeta z,\quad g = e^{\alpha t + a_1 x + a_2 y + a_3 z}$$

und durch Bedingungsgleichungen zwischen den Constanten:

$$\alpha^2 = \omega^2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$
$$0 = \xi a_1 + \eta a_2 + \zeta a_3.$$

Werden die a_i und α complex imaginär angenommen, so entsteht die allgemeinere Lösung:

(11a) $$F = (p + \xi x + \eta y + \zeta z) e^{\beta t + b_1 x + b_2 y + b_3 z} \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\gamma t + c_1 x + c_2 y + c_3 z\right),$$

(11b) $$\begin{cases} \beta^2 - \gamma^2 = \omega^2(b^2 - c^2), \\ \beta\gamma = \omega^2(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3), \\ 0 = \xi b_1 + \eta b_2 + \zeta b_3, \\ 0 = \xi c_1 + \eta c_2 + \zeta c_3. \end{cases}$$

Hieraus entsteht für imaginäre b_i und β die Lösung:

(12a) $$F = \left(p + \xi x + \eta y + \zeta z\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\beta t + b_1 x + b_2 y + b_3 z\right) \times \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\gamma t + c_1 x + c_2 y + c_3 z\right),$$

$$(12\,b)\qquad \begin{cases} \beta^2+\gamma^2=\omega^2(b^2+c^2), \\ \beta\gamma=\omega^2(b_1c_1+b_2c_2+b_3c_3), \\ 0=\xi b_1+\eta b_2+\zeta b_3, \\ 0=\xi c_1+\eta c_2+\zeta c_3. \end{cases}$$

Auch diese Lösungen (11) und (12) sind leicht durch (10) als richtig zu erweisen. Die Constanten in ihnen sind sämmtlich reell.

§ 4. Es sollen nun die entsprechenden Lösungen der Elasticitätsgleichungen aufgestellt werden. Diese Gleichungen sind:

$$(13)\qquad \begin{cases} (\mu_1+\mu_2)\frac{d\Theta}{dx}+\mu_2\Delta^2 u=\frac{d^2u}{dt^2}, \\ (\mu_1+\mu_2)\frac{d\Theta}{dy}+\mu_2\Delta^2 v=\frac{d^2v}{dt^2}, \\ (\mu_1+\mu_2)\frac{d\Theta}{dz}+\mu_2\Delta^2 w=\frac{d^2w}{dt^2}, \end{cases}$$

$$(13\,a)\qquad \Theta=\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}.$$

Aus (13) und (13a) folgt für Θ die Gleichung:

$$(14)\qquad \frac{d^2\Theta}{dt^2}=(\mu_1+2\mu_2)\Delta^2\Theta.$$

Setzt man nun

$$(15\,a)\qquad \Theta=c\frac{d^2F}{dt^2},$$

und bestimmt F durch die Gleichung (14) für Θ, so ergeben sich für u, v, w aus (13) folgende Werthe, wenn man Werthsysteme ausschliesst, die nicht von allen drei Coordinaten x, y, z abhängen:

$$(15\,b)\qquad u=\frac{dF}{dx},\qquad v=\frac{dF}{dy},\qquad w=\frac{dF}{dz};$$

für c in (15a) ergiebt sich

$$(15\,c)\qquad c=\frac{1}{\mu_1+2\mu_2}.$$

Es ist noch der Fall $\Theta=0$ zu betrachten. Die Gleichungen (13) werden erfüllt durch folgende Annahme:

$$(16)\qquad \begin{cases} u=(p_1+\xi_1x+\eta_1y+\zeta_1z)e^{\alpha t+a_1x+a_2y+a_3z}=f_1y, \\ v=(p_2+\xi_2x+\eta_2y+\zeta_2z)e^{\alpha t+a_1x+a_2y+a_3z}=f_2y, \\ w=(p_3+\xi_3x+\eta_3y+\zeta_3z)e^{\alpha t+a_1x+a_2y+a_3z}=f_3y, \end{cases}$$

wenn zwischen den Constanten folgende Gleichungen bestehen:

(16a) $$\alpha^2 = \mu_2(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2),$$

(16b) $$\begin{cases} 0 = \xi_1 a_1 + \eta_1 a_2 + \zeta_1 a_3, \\ 0 = \xi_2 a_1 + \eta_2 a_2 + \zeta_2 a_3, \\ 0 = \xi_3 a_1 + \eta_3 a_2 + \zeta_3 a_3. \end{cases}$$

Die Gleichung (13a) geht in folgende über:

$$0 = f_1 \frac{dg}{dx} + f_2 \frac{dg}{dy} + f_3 \frac{dg}{dz} + g\left(\frac{df_1}{dx} + \frac{df_2}{dy} + \frac{df_3}{dz}\right),$$

weiter in:

$$0 = f_1 a_1 + f_2 a_2 + f_3 a_3 + \xi_1 + \eta_2 + \zeta_3.$$

Diese Gleichung wird für jedes x, y, z erfüllt, wenn folgende Gleichungen bestehen:

(16c) $$0 = p_1 a_1 + p_2 a_2 + p_3 a_3 + \xi_1 + \eta_2 + \zeta_3,$$

(16d) $$\begin{cases} 0 = \xi_1 a_1 + \xi_2 a_2 + \xi_3 a_3, \\ 0 = \eta_1 a_1 + \eta_2 a_2 + \eta_3 a_3, \\ 0 = \zeta_1 a_1 + \zeta_2 a_2 + \zeta_3 a_3. \end{cases}$$

Die Gleichungen (16b) und (16d) können zusammen nur bestehen, wenn zwischen den ξ_i, η_i, ζ_i folgende Beziehungen angenommen werden:

$$\xi_2 = \eta_1 = q_1, \quad \xi_3 = \zeta_1 = q_2, \quad \eta_3 = \zeta_2 = q_3.$$

Beide Systeme (16b) und (16d) gehen dadurch über in:

(16e) $$\begin{cases} 0 = \xi\ a_1 + \eta\ a_2 + q_2 a_3, \\ 0 = q_1 a_1 + \eta\ a_2 + q_3 a_3, \\ 0 = q_2 a_1 + q_3 a_2 + \zeta\ a_3, \end{cases}$$

wobei ξ_1, η_2, ζ_3 resp. durch ξ, η, ζ ersetzt sind.

Nun mögen die Constanten a und α complex imaginär angenommen werden wie in § 3, sodass in (16) für g zu setzen ist:

(17) $$g = e^{\beta t + b_1 x + b_2 y + b_3 z} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\gamma t + c_1 x + c_2 y + c_3 z\right).$$

Dadurch gehen die Bedingungsgleichungen (16a), (16c) und (16e) über in:

(17a) $$\begin{cases} \beta^2 - \gamma^2 = \mu_2(b^2 - c^2), \\ \beta\gamma = \mu_2(b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3); \end{cases}$$

(17b) $$\begin{cases} 0 = p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3 + \xi + \eta + \zeta, \\ 0 = p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3; \end{cases}$$

(17c) $$\begin{cases} 0 = \xi\ b_1 + q_1 b_2 + q_2 b_3, \\ 0 = q_1 b_1 + \eta\ b_2 + q_3 b_3, \\ 0 = q_2 b_1 + q_3 b_2 + \zeta\ b_3; \end{cases}$$

$$(17\,d)\qquad \begin{cases} 0 = \xi\ c_1 + q_1 c_2 + q_2 c_3, \\ 0 = q_1 c_1 + \eta\ c_2 + q_3 c_3, \\ 0 = q_2 c_1 + q_3 c_2 + \zeta\ c_3. \end{cases}$$

Die Weiterbehandlung dieser Bedingungsgleichungen macht die Unterscheidung nothwendig, ob die q und ξ, η, ζ sämmtlich Null sind oder nicht. Im ersteren Falle werden die Gleichungen (17c) und (17d) identisch erfüllt und die Constanten β, γ, b, c, p sind den Bedingungen (17a) und (17b) gemäss zu bestimmen. Im zweiten Falle verlangen die Gleichungen (17c) und (17d), dass folgende Beziehungen zwischen den b_i und c_i bestehen

$$(18)\qquad b_i = \varkappa c_i.$$

Dadurch gehen die Werthsysteme (17b, c, d) über in:

$$(19\,a)\qquad \begin{cases} \beta^2 - \gamma^2 = \mu_2 c^2(\varkappa^2 - 1), \\ \beta\gamma = \mu_2 c^2 \varkappa, \end{cases}$$

$$(19\,b)\qquad \begin{cases} 0 = p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3 + \xi + \eta + \zeta, \\ 0 = \xi\ c_1 + q_1 c_2 + q_2 c_3, \\ 0 = q_1 c_1 + \eta\ c_2 + q_3 c_3, \\ 0 = q_2 c_1 + q_3 c_2 + \zeta\ c_3. \end{cases}$$

Aus (19a) folgt für β und γ:

$$(19\,c)\qquad \beta = +\sqrt{\mu_2}\, c\varkappa, \quad \gamma = +\sqrt{\mu_2}\, c,$$

wo $\sqrt{\mu_2}$ sowie $c = \sqrt{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$ positiv zu nehmen ist. Ein zweites Werthsystem für β und γ ist imaginär, während β und γ oben reell vorausgesetzt wurden.

Werden in (17) auch die b und β imaginär angenommen, so ändern sich nur die erste Gleichung (17a) und die erste Gleichung (17b). Die übrigen Bedingungsgleichungen bleiben dieselben. Daher gelten jetzt die gleichen Schlüsse und wir erhalten anstatt (17), (18a) und (19b)

$$(20)\qquad g = \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\beta t \pm \varkappa(c_1 x + c_2 y \pm c_3 z)\right) \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\left(\gamma t + c_1 x + c_2 y + c_3 z\right),$$

$$(20\,a)\qquad \begin{cases} \beta^2 + \gamma^2 = \mu_2 c^2(\varkappa^2 + 1), \\ \beta\gamma = \mu_2 c^2 \varkappa, \end{cases}$$

$$(20\,b)\qquad \begin{cases} 0 = \xi + \eta + \zeta, \\ 0 = p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3, \\ 0 = \xi\ c_1 + q_1 c_2 + q_2 c_3, \\ 0 = q_1 c_1 + \eta\ c_2 + q_3 c_3, \\ 0 = q_2 c_1 + q_3 c_2 + \zeta\ c_3. \end{cases}$$

Aus (20a) folgt:

(20c) $$\beta = \pm \sqrt{\mu_2}\, c\varkappa, \quad \gamma = \pm \sqrt{\mu_2}\, c;$$

das zweite Werthsystem β, γ giebt im Wesentlichen dasselbe Resultat (20).

§ 5. Es haben sich folgende Lösungen der Elasticitätsgleichungen ergeben:

(a) $$\begin{cases} u = \dfrac{dF}{dx}, \\ v = \dfrac{dF}{dy}, \\ w = \dfrac{dF}{dz}, \\ \Theta = \dfrac{1}{\mu_1 + 2\mu_2} \dfrac{d^2F}{dt^2}, \end{cases}$$

(cf. 15a, b, c). Für F ist aus § 3 und 5 eine Lösung der Gleichung (1) zu setzen, wenn dort $\mu_1 + 2\mu_2$ für ω^2 geschrieben wird.

(b) $$\begin{cases} u = p_1 g, \\ v = p_2 g, \\ w = p_3 g, \\ \Theta = 0. \end{cases}$$

Hier ist entweder:

$$g = e^{\beta t + b_1 x + b_2 y + b_3 z} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\gamma t + c_1 x + c_2 y + c_3 z\right),$$

$$\beta^2 - \gamma^2 = \mu_2 (b^2 - c^2),$$

$$\beta\gamma = \mu_2 (b_1 c_1 + b_2 c_2 + b_3 c_3),$$

$$0 = p_1 b_1 + p_2 b_2 + p_3 b_3,$$

$$0 = p_1 c_1 + p_2 c_2 + p_3 c_3;$$

oder:

$$g = \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\beta t + b_1 x + b_2 y + b_3 z\right) \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \left(\gamma t + c_1 x + c_2 y + c_3 z\right),$$

$$\beta^2 + \gamma^2 = \mu_2 (b^2 + c^2),$$

weiter die drei letzten vorigen Bedingungsgleichungen:

(c) $$\begin{cases} u = (p_1 + \xi\, x + q_1 y + q_2 z)\varphi, \\ v = (p_2 + q_1 x + \eta\, y + q_3 z)\varphi, \\ w = (p_3 + q_2 x + q_3 y + \zeta\, z)\varphi, \\ \Theta = 0. \end{cases}$$

Hier ist, wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\chi = \pm \sqrt{\mu_2} ct + c_1 x + c_2 y + c_3 z,$$

entweder:

$$\varphi = e^{\varkappa \chi} \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \chi$$

mit den Bedingungen (19b)

oder:

$$\varphi = \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \varkappa \chi \begin{matrix} \cos \\ \sin \end{matrix} \chi$$

mit den Bedingungen (20b).

Zur Erklärung der Dispersion eignen sich nur die Lösungen (b). Die Constanten sind sämmtlich reell angenommen. Zur Abkürzung ist gesetzt:

$$b^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2, \quad c^2 = c_1^2 + c_2^2 + c_3^2.$$

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 5. Ausgegeben im Februar. 1885.

Berichte über die Versammlungen.

Versammlung vom 9. Januar 1884.

Herr Dr. Hoppe hält einen Vortrag: „Historische Mitteilungen zur Elektrizitätslehre und Potentialtheorie".

Im ersten Teile desselben wird nachgewiesen:

1) dafs Franklin den ersten Vorschlag zur Anlage von Blitzableitern schon Ende 1749 in einem Briefe an Collinson gemacht habe, nicht erst 1753;

2) dafs die Rotation des galvanischen Stromes um einen Magneten eine Entdeckung von Oersted sei;

3) dafs Ampère schon 1821, nachdem er freilich vorher anderer Meinung gewesen war, die Ansicht ausgesprochen habe: „Im unmagnetischen Eisen (auch Nickel und Kobalt) existieren schon die Molekularströme; durch das Magnetisieren werden sie gerichtet";

4) dafs Davy (1821) nicht der Entdecker des galvanischen Flammenbogens sei, dafs vielmehr, nachdem schon 1802 Ritter zwischen Kohlenspitze und Platinplatte einzelne Funken hatte überspringen lassen, De la Rive 1820 dem Naturforscherkongrefs in Genf ein durch 380 Elemente erzeugtes Bogenlicht vorführte.

Der zweite Teil des Vortrages behandelt die Entstehung der Potentialtheorie.

Obgleich erst Green 1828 das Wort „Potentialfunktion" zuerst gebrauchte, sind vielleicht schon bei Euler einige Anfänge der Potentialtheorie zu suchen, sicher ist aber schon Laplace der Begründer

derselben. In einer Arbeit dieses Mathematikers vom Jahre 1782 ist zuerst von derjenigen Funktion die Rede, welche wir jetzt Potential nennen. Die Laplace'sche Potentialtheorie findet sich vollständig in seiner Mécanique céleste entwickelt, jedoch ist es Laplace noch nicht bekannt gewesen, dafs die Gleichung des zweiten Differentialquotienten $dV = 0$ nicht richtig ist, wenn der angezogene Punkt in die anziehende Masse hineinrückt.

Während Laplace das Newton'sche Anziehungsgesetz benutzt und eine Reihe von Erscheinungen (Flut und Ebbe, Bewegung der Jupiterstrabanten) mit Zugrundelegung desselben berechnet, geht Poisson (1812) von dem Coulomb'schen Anziehungsgesetz für statische Elektrizität aus. Er legt Polarkoordinaten zu Grunde und behandelt auch den Fall, wo dV nicht gleich Null ist. Die aus seinen Formeln berechneten Dichten der c sich berührenden Kugeln stimmen mit den von Coulomb beobachteten auf drei Dezimalen überein.

Greens 1828 schon veröffentlichte Arbeit über das Potential ist erst durch Thomson (1848—1850) bekannt geworden. Wichtig ist die von Green ausgeführte Berechnung der Dichten auf der Franklin'schen Tafel mit kreisförmiger Belegung, sowie das von ihm benutzte Poisson'sche Prinzip der reziproken Radien.

Gauss giebt eine ganz eigenartige Darstellung der Potentialtheorie; er nimmt als Anziehungsfunktion irgend eine berechenbare Funktion von x, y, z, führt die Niveauflächen ein und giebt die noch jetzt übliche Definition des Potentials, er verwandelt das Raumintegral in ein Flächenintegral, wodurch die von einem Körper ausgehende Anziehung zurückgeführt wird auf die von einer Fläche ausgeübte.

Bei Dirichlet ist die Darstellungsmethode von Wichtigkeit, desgleichen sein strenger Nachweis, dafs es im gegebenen Falle nur eine Potentialfunktion giebt. Er stützt sich auf Poisson.

Clausius unterscheidet 1852 die Potentialfunktion (Gauss' Potential) von dem Potential, worunter er den Ausdruck

$$V = \sum_i \sum_k \frac{m_i m_k}{r_{ik}}$$

versteht.

Riemann, der sich Green anschliefst, führt das Potential eines Massensystems auf sich selbst ein, welches gleichbedeutend ist mit der Arbeit, die nötig ist, um die Massenpunkte aus unendlicher Ferne in ihre gegenwärtige Lage zu bringen.

Herr F. H. Reitz spricht sodann: „Über den Mareograph für den Hafen von Marseille“:

Nach einigen einleitenden Worten über die grofsen in den verschiedenen europäischen Staaten vorgenommenen Nivellements, ihre Methoden und Ausdehnung, sowie über die bis jetzt gefundenen Höhenunterschiede der mittleren Stände der Meere, beschreibt der Vortragende nach einer Zeichnung in wirkl. Gr. den für die französische Regierung von ihm konstruierten Mareograph mit Integrationsvorrichtung für die mittlere Meereshöhe, welcher am Hafen von Marseille aufgestellt werden soll.

Die Flutgröfse, welche der Apparat registrieren wird, beträgt gewöhnlich nur 0,4 Meter, der gröfste dort beobachtete Unterschied der Wasserstände übersteigt bisher nicht 0,6 Meter.

Der neue Apparat ist in manchen Teilen anders konstruiert wie die in Helgoland und Cadiz bereits in Thätigkeit befindlichen desselben Systems, z. B. liefert er zwei Exemplare der Aufzeichnung der Wasserstandskurve, von denen eins nach Paris gesandt wird und wissenschaftlichen Zwecken dienen soll, während das zweite Exemplar für die Wasserbauten in Marseille Verwendung findet. Ferner wird bei diesem Instrument durch die Registriervorrichtung selbstwirkend sowohl Höhe als Zeit auf dem die Zeichnung der Wasserstandskurve aufnehmenden Papier angegeben, was bei anderen derartigen Apparaten gewöhnlich dem dieselben Beaufsichtigenden überlassen bleibt.

Für die Bestimmung der mittleren Meereshöhe werden, ebenso wie bei den Apparaten von Helgoland und Cadiz, zwei Rollen aus Achat von dem wechselnden Wasserstande auf einer von einer Uhr gedrehten Spiegelglasscheibe (die bei diesem Apparat vertikal steht) auf und nieder bewegt. Die Rollen werden durch ein Gewicht gegen die Spiegelglasplatte gedrückt und drehen sich proportional dem Abstande vom Drehungsmittelpunkt der Glasscheibe schneller oder langsamer herum. Rücken die Rollen über den Drehungsmittelpunkt hinaus, wird ihre Bewegung rückläufig, entsprechend den Wasserständen unter Null. So bilden diese Integrierrollen, wenn man mit x die Wasserstandshöhen, mit t den der Zeit entsprechenden Bogen bezeichnet, das Integral $\int x dt$ und man erhält durch Division mit dem einem bestimmten Zeitraum entsprechenden Bogen t das mittlere x, die mittlere Meereshöhe dieses Zeitabschnittes.

Es sind zwei Rollen angebracht, um einen Nachweis des richtigen Funktionierens aller Teile des Apparates zu haben, indem beide Rollen immer den ihrem konstanten Abstande entsprechenden Unterschied in der Angabe der mittleren Höhe geben müssen.

Hauptversammlung vom 25. Februar 1884.

Der Jahrverwalter, Herr Prof. Kiessling, erstattet den Jahresbericht, nach welchem die Gesellschaft 50 Mitglieder zählt, nämlich 38 hiesige und 12 auswärtige; aufserdem 5 Ehrenmitglieder.

Die Herren Dr. Bock, Dr. Wagner, Dr. Köpcke, Dr. Schrader und Ambronn sind nach zeitweiliger Abwesenheit wieder in die Zahl der hiesigen Mitglieder eingetreten, wogegen Herr Dr. Battermann infolge seiner Übersiedelung nach Berlin auswärtiges Mitglied geworden ist.

In üblicher Weise wird sodann nach Beendigung der Verhandlungen die 194. Feier des Stiftungstages begangen unter Anwesenheit einiger Gäste.

Versammlung vom 8. März 1884.

Der abtretende Jahrverwalter, Herr Prof. Kiessling, übergiebt den Kassenbericht für das abgelaufene Gesellschaftsjahr, nach welchem ein Überschufs der Einnahmen über die Ausgaben von ℳ 5,02 vorvorhanden ist, so dafs der Kassenbestand auf ℳ 933,20 gestiegen ist. Derselbe ist von dem jetzigen Jahrverwalter, Herrn Dr. Krüss, richtig übernommen wurden.

Herr Fr. Denker wird als hiesiges Mitglied aufgenommen.

Herr Dr. E. Liebenthal hält einen Vortrag über „Zwei Probleme der elektrischen Influenz". Das eine derselben ist unter dem Namen „des Problems der zwei Kugeln" bekannt. Von den mehrfachen Lösungen desselben wurde in ausführlicherer Weise diejenige zur Sprache gebracht, welche die Aufgabe vermöge des Prinzips der sphärischen Spiegelung auf das Problem der zwei konzentrischen Kugeln zurückführt.

Bei der Behandlung des zweiten Problems, der „Influenz eines elektrischen Massenpunktes auf einen Körper, der von einer durch Rotation entstandenen Fresnel'schen Elastizitätsoberfläche begrenzt ist", folgte der Vortragende im wesentlichen der Dissertation des Herrn Dr. Bentzien. Die Aufgabe wird dadurch gelöst, dafs das Potential der Fresnel'schen Fläche vermöge des Liouville'schen Satzes durch das Potential des Rotationsellipsoids, welches das sphärische Bild der Fresnel'schen Fläche ist, unter Einführung von sogenannten Fresnel'schen orthogonalen Koordinaten ausgedrückt wird. Die dadurch eingehenden willkürlichen Konstanten werden in bekannter Weise durch die Bedingungsgleichung des Gleichgewichts der Elektrizität auf der Fresnel'schen Oberfläche und die derselben ursprünglich mitgeteilte Elektrizitätsmenge bestimmt.

Hierauf spricht Herr Dr. Bock „über einen elementaren Beweis des Satzes, dafs jede Primzahl von der Form $4n + 1$ gleich der Summe zweier ganzen Quadratzahlen ist.

Erstens läfst sich zeigen, dafs immer mindestens ein Paar Quadratzahlen existiert, dessen Summe $A^2 + B^2$ jene Primzahl p von der Form $4n + 1$ als Faktor enthält, und, was kaum des Beweises bedarf, dafs A und B beide kleiner als $\frac{1}{2}p$ genommen werden können, also dafs $A^2 + B^2 < \frac{1}{2}p^2$, also p der gröfste Primfaktor von $A^2 + B^2$ ist.

Für $p = 4n + 1$ giebt es $2n$ inkongruente Quadratzahlen:

$$1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ \ldots\ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2,$$

welche zu zweien addiert $\frac{2n(2n-1)}{2} = 2n(n-1) + n$ Kombinationen, d. h. zweiteilige Quadratsummen zulassen. $x_1^2 + y_1^2$ sei eine dieser Quadratsummen. Dann bilde man die folgenden $1 \cdot x_1^2 + 1 \cdot y_1^2$, $2^2 \cdot x_1^2 + 2^2 \cdot y_1^2$, u. s. w. bis $\left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \cdot x_1^2 + \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \cdot y_1^2$ mit der Bedingung, dafs an Stelle von νx_1 resp. νy_1 die kleinste Zahl $\left(< \frac{p-1}{2}\right)$ zu setzen ist, deren Quadrat kongruent $\nu^2 x_1^2$ resp. $\nu^2 y_1^2$ nach dem Modul p ist. So erhält man eine Gruppe aus $2n$ von einander verschiedenen Kombinationen (Quadratsummen). In $n-1$ solche Gruppen lassen sich die sämtlichen $n(2n-1)$ Kombinationen zerlegen. Die übrig bleibende Gruppe, die aus nur n Quadratsummen besteht, ist allein dadurch möglich, dafs je 2 der ursprünglichen $2n$ Kombinationen dieser Gruppe gleich werden, indem nämlich $\mu^2 x_i^2 + \mu^2 y_i^2$ mit $\nu^2 x_i^2 + \nu^2 y_1^2$ dadurch zusammenfällt,

dafs

$$\nu y_i \equiv \mp \mu x_i$$

und gleichzeitig

$$\nu x_i \equiv \pm \mu y_i \pmod{p},$$

also

$$\nu \mu y_i^2 \equiv \nu \mu x_i^2,$$

also

$$\nu \mu (x_i^2 + y_i^2) \equiv 0,$$

also

$$x_i^2 + y_i^2 \equiv 0, \pmod{p}.$$

Es giebt also für $p = 4n + 1$ sogar n Summen aus je zweien der Quadratzahlen $1^2,\ 2^2,\ \ldots\ldots \left(\frac{p-1}{2}\right)^2$, welche durch p teilbar sind.

Zweitens: Zerlegt man eine solche Quadratsumme, z. B.

$$A^2 + B^2 < \frac{p^2}{2}$$

in ihre Primfaktoren, deren gröfster p ist, und setzt zunächst voraus, dafs die übrigen Primfaktoren $q, r, s \cdots$ sämtlich von der Form $u^2 + v^2$ sind, so ergiebt sich leicht, dafs auch p von dieser Form sein mufs. Wird nämlich $A^2 + B^2$ durch einen dieser Primfaktoren $q = a^2 + b^2$ dividiert, so darf man den Quotienten $= c^2 + d^2$ setzen, und man hat nur zu zeigen, dafs c und d immer ganze Zahlen sein können. Es sei also

$$A^2 + B^2 = (a^2 + b^2)(c^2 + d^2),$$

also

$$A^2 + B^2 = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

also entweder

$$A = ac + bd$$
$$B = ad - bc$$

und demnach

$$c = c_1 = \frac{aA - bB}{a^2 + b^2},$$

$$d = d_1 = \frac{bA + aB}{a^2 + b^2}$$

oder

$$A = ad - bc$$
$$B = ac + bd$$

also

$$c = c_2 = \frac{aB - bA}{a^2 + b^2},$$

$$d = d_2 = \frac{bB + aA}{a^2 + b^2}.$$

Die beiden Möglichkeiten

$$A = ac - bd,\ B = ad + bc$$

und

$$B = ac - bd,\ A = ad + bc$$

können aufser Betracht bleiben, da sie aus den ersten beiden Fällen durch Vertauschung des c mit dem d hervorgehen. Von den beiden möglichen Werten des c, c_1 und c_2, ist nun jedenfalls einer eine ganze Zahl. Es ist nämlich

$$c_1 \cdot c_2 = \frac{AB(a^2 + b^2) - ab(A^2 + B^2)}{(a^2 + b^2)^2}.$$

Hier ist der Zähler durch $a^2 + b^2$ ohne Rest teilbar, also ist auch einer der Zähler, durch deren Multiplikation er entstanden ist, durch $a^2 + b^2$ teilbar (da $a^2 + b^2$ eine Primzahl). Mithin eins der c eine ganze Zahl, also auch das entsprechende d. Wie von $A^2 + B^2$ der eine Primfaktor, der $= a^2 + b^2$ war, abgelöst ist, wobei eine Summe aus zwei ganzen Quadratzahlen $c^2 + d^2$ übrig geblieben ist, ebenso wird nun von $c^2 + d^2$ ein zweiter Primfaktor r, von der Form $u^2 + v^2$

abgelöst, wobei ebenso eine ganzzahlige Quadratsumme übrig bleibt, und so fort, bis p, der gröfste Faktor, als ganzzahlige Quadratsumme übrig bleiben mufs.

Drittens: Dafs aber, wenn $A^2 + B^2 < \frac{p^2}{2}$, und durch p teilbar ist, die übrigen kleineren Primfaktoren q, r, s, $\cdots$ von der Form $u^2 + v^2$ sind, lehrt folgende Betrachtung. Man kann zwei Zahlen finden A_1 und B_1, kongruent resp. mit $\pm A$ und $\pm B$ nach dem Modul q, und beide kleiner als $\frac{q}{2}$, so dafs $A_1^2 + B_1^2 < \frac{q^2}{2}$, die Zahl $q\,(<p)$ als gröfsten Primfaktor enthält. Wieder wird q von der Form $u^2 + v^2$ sein, wenn die übrigen kleineren Primfaktoren von $A_1^2 + B_1^2$, x, y, z $\cdots$ von dieser Form sind, u. s. f. Ebenso verfährt man mit $A^2 + B^2$ in bezug auf r, auf s u. s. w. Schliefslich mufs man auf Quadratsummen kommen, die aufser ihrem gröfsten Primfaktor keinen andern mehr enthalten. Zufolge dem Satze unter Zweitens ergiebt sich dann rückwärts zuletzt, dafs auch p von der Form $u^2 + v^2$ ist.

Zusätzlich wurde bemerkt, dafs die Zahl $2 = 1^2 + 1^2$ mit $p = 4n + 1$ von gleicher Form ist, und dafs ein Produkt

$$2^\nu \cdot p \cdot q \cdot r \cdot s \cdot \cdots,$$

welches, abgesehen von den ν Faktoren 2, aus μ von einander verschiedenen Primfaktoren von der Form $4n + 1$ gebildet ist, sich jedenfalls auf $2^{\mu-1}$fache Weise als Quadratsumme $u^2 + v^2$ darstellen läfst. Sei

$$p = a^2 + b^2,\quad q = c^2 + d^2,\quad r = e^2 + f^2,\ \cdots,$$

so bilde man die 2^μ möglichen Produkte

$$(a \pm bi)(c \pm di)(e \pm fi) \cdots,$$

indem man in jeder Klammer jedesmal beliebig das Plus- oder Minus-Zeichen berücksichtigt. Je zwei beliebige dieser Produkte werden in einer Anzahl von Faktoren übereinstimmen; die übrigen Faktoren des einen Produktes werden die konjugierten Werte der übrigen Faktoren des anderen Produktes sein, werden also nur dann in beiden Produkten ein gleiches Multiplikationsresultat ergeben, wenn dieses reell, also gleich seinem eigenen Modul ist. Dann müfste aber sein reeller Wert zugleich ganzzahlig sein (weil alle Koëffizienten $a, b, c, d \cdots$ ganzzahlig sind), was unmöglich ist, da der Modul dieses Teilproduktes, gleich dem Produkt der Moduln der Faktoren

$$= \sqrt{g^2 + h^2} \cdot \sqrt{k^2 + l^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2} \cdot \cdots$$

nicht reell sein kann, indem nicht zwei dieser sämtlichen Irrationalitäten gleich sind, auch keine derselben zerlegbar ist.

Je zwei der möglichen 2^μ Produkte, wie $U + Vi$ und $U - Vi$ werden konjugierte Werte haben. Alle werden sie zum Modul haben die Quadratwurzel aus dem Produkt der Primzahlen $p, q, r, s \cdots$

Mit Rücksicht darauf, dafs

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac \pm bd)^2 + (ad \mp bc)^2$$

also das Produkt zweier Quadratsummen wieder eine Quadratsumme ist, folgt, dafs das Quadrat des Produkt-Moduls, jedesmal gleich einer Quadratsumme, $2^{\mu-1}$ verschiedenen und zwar in ihren beiden Bestandteilen verschiedenen komplexen Gröfsen angehört. Also ist $p \cdot q \cdot r \cdot s \cdots$ auf $2^{\mu-1}$fache Weise durch die Form $U^2 + V^2$ darstellbar. Dafs die Multiplikation mit 2 die Anzahl der Darstellungen nicht vermehrt, folgt, weil die Vertauschung der beiden entsprechenden Multiplikationen $1 + i$ und $1 - i$ nur eine Vertauschung des U mit dem V herbeiführt, was bei den anderen Primzahlen nicht möglich ist, da nicht $a = b$, auch nicht $a : b = c : d$ oder $= d : c$ sein kann.

Versammlung vom 19. April 1884.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs Herr Ingenieur Hübbe und er am 18. April dem hiesigen Architekten- und Ingenieur-Verein zu seinem 25jährigen Stiftungsfest die Glückwünsche der Mathematischen Gesellschaft dargebracht habe.

Ein an die Gesellschaft gelangtes Ersuchen von seiten eines hiesigen Komité zur Förderung von Sammlungen für ein Wöhler-Denkmal um Beteiligung wird abgelehnt.

Herr Dr. Liebenthal beendete sodann seinen am 8. März wegen vorgerückter Zeit abgebrochenen Vortrag.

Versammlung vom 10. Mai 1884.

Der Jahrverwalter verliest ein Schreiben von der Reale Accademia dei Lincei in Rom, in welchem sie, auf Antrag des Herrn Prof. Cremona, den Wunsch ausspricht, in Schriftenaustausch zu treten, was die Gesellschaft gern annimmt.

Herr Dr. Joh. Keferstein wird als einheimisches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Sodann hält Herr Dr. Schubert einen Vortrag über „Prinzipien der Zahlwort- und Zahlzeichensysteme bei den verschiedenen Völkern der Erde.“ Der historisch-mathematische Inhalt desselben wird anderweitig publiziert werden.

Versammlung vom 14. Juni 1884.

Herr Sinram hält einen Vortrag: „Beitrag zu den Gleichungen höheren Grades", in welchem nachgewiesen wird, dafs die Potenz $(a+b)^n$ sich durch geeignete Substitutionen der Binomialkoeffizienten entwickeln lasse in eine Reihe nach Potenzen von $(a+b)$. Dasselbe Prinzip wird alsdann angewandt auf Polynome und der Nutzen desselben bei der teilweisen Lösung von Gleichungen mit mehreren Unbekannten gezeigt. (Siehe Grunerts Arch. der Math. und Phys. 68. Teil. 2. Heft, S. 223.)

Hierauf teilt Herr Ingenieur Bubendey unter dem Titel „Mathematische Spielereien" einige Aufgaben mit, welche früher oft die Beschäftigung der Mitglieder der Gesellschaft gebildet haben, z. B. die Zerlegung einer Zahl in ein Produkt aus mehreren Faktoren, derartig, dafs in demselben sowie in den sämtlichen Faktoren zusammen dieselben Ziffern vorkommen. $(2 \cdot 81 \cdot 79 = 12798)$.

Hierher gehört eine Aufgabe, mit welcher sich neuerdings ein holländischer Lehrer beschäftigt hat, angeregt durch die Arbeiten des Herrn Wasserbau-Direktor Nehls über „Geometrische Näherungen der Quadratur des Kreises."

Diese Aufgabe besteht darin, ganzzahlige Brüche zu bilden von bestimmtem Wert und der Form, dafs alle Ziffern von 1 bis 9, aber nur je einmal im Zähler und Nenner vorkommen; z. B.

$$\frac{1}{2} = \frac{6729}{13458} = \frac{6792}{13584} = \frac{6927}{13854} = \frac{9267}{18534}.$$

Sodann demonstriert Herr Dr. Krüss einige von ihm konstruierte Apparate, welche der praktischen Photometrie dienen.

Bei einem Bunsen'schen Photometer sind zwei einander vollständig gleiche Reflexionsprismen von besonderer Form und aus derselben Glasart angebracht, wodurch ermöglicht wird, dafs die Bilder der beiden Seiten des Papierschirmes mit dem Fettfleck in einer scharfen Linie aneinander grenzen, während bei der bisher üblichen Anordnung die beiden miteinander zu vergleichenden Bilder des Fettfleckes weit auseinander liegen.[1])

Das Optische Flammenmafs des Vortragenden besteht im wesentlichen aus einem achromatischen Objektiv, mit welchem in der Entfernung seiner doppelten Brennweite eine matte Glasscheibe mit Millimeterteilung fest verbunden ist. Das auf derselben entstehende

1) Rep. d. Phys. 20, S. 729 (1884).

Bild eines Objektes (Flamme einer Kerze) hat infolge obig ordnung natürliche Gröfse.[1])

Ein sodann vorgezeigtes Spektrophotometer dient d relativen Helligkeiten in den verschiedenen Teilen des Sp zweier Lichtquellen zu bestimmen. Zu diesem Zwecke ist einem symmetrischen Doppel-Mikrometerspalt[2]) versehen, vor beiden Hälften sich je ein Reflexionsprisma befindet. Der Apparat ist so montiert, dafs er mit Leichtigkeit gegen ein g liches Bunsen'sches Photometer ausgewechselt werden kann, dafs die optische Achse des letzteren in dieselbe Stellung kor welcher sich vorher die Trennungslinie der beiden Spalthälften

Versammlung vom 13. September 1884.

Herr Dr. Köpcke hält einen Vortrag über die Reihe $\sum_1^\infty \sin$

Die Reihe $\sum_1^\infty \sin n!\, x\pi$ konvergiert für alle rationalen u Riemann für gewisse irrationale Werte; für diese irrational für alle rationalen x divergiert damit die Reihe $\sum_1^\infty \cos n!$. giebt aber dennoch irrationale x, für welche diese Reihe konve Ein solcher Wert ist:

$$x_1 = \frac{1}{4!\,2} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!\,2} - \frac{1}{7!} - \frac{1}{8!\,2} + \frac{1}{9!} - \frac{1}{10!\,2} + \frac{1}{11!} +$$

Dafür ist nämlich:

$$\left.\begin{aligned} 4!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} - \alpha_1 \\ 5!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} - \alpha_2 \\ 6!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} + \alpha_3 \\ 7!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} + \alpha_4 \\ 8!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} - \alpha_5 \\ 9!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} - \alpha_6 \\ 10!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} + \alpha_7 \\ 11!\,x_1 &\equiv \tfrac{1}{2} + \alpha_8 \end{aligned}\right\} \text{mod } 2,$$

1) Journ. f. Gasbel. 1883. S. 717.

2) Carls Repert. 18. S. 217, 1882 (D. R. P. Nr. 17092).

worin

$$\alpha_1 = \frac{1}{5} - \frac{1}{5\cdot 6\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 6\cdot 7} + \cdots$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{6\cdot 2} - \frac{1}{6\cdot 7} - \frac{1}{6\cdot 7\cdot 8\cdot 2} + \cdots$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7\cdot 8\cdot 2} - \frac{1}{7\cdot 8\cdot 9} + \cdots$$

$$\alpha_4 = \frac{1}{8\cdot 2} - \frac{1}{8\cdot 9} + \frac{1}{8\cdot 9\cdot 10\cdot 2} - \cdots$$

$$\alpha_5 = \frac{1}{9} - \frac{1}{9\cdot 10\cdot 2} + \frac{1}{9\cdot 10\cdot 11} + \cdots$$

$$\alpha_6 = \frac{1}{10\cdot 2} - \frac{1}{10\cdot 11} - \frac{1}{10\cdot 11\cdot 12\cdot 2} + \cdots$$

$$\alpha_7 = \frac{1}{11} + \frac{1}{11\cdot 12\cdot 2} - \cdots$$

$$\alpha_8 = \frac{1}{12\cdot 2} - \frac{1}{12\cdot 13} + \cdots$$

für diese Werte α beweist man leicht die Ungleichheiten:

$$\alpha_1 > \alpha_3 > \alpha_5 > \alpha_7 > \alpha_9 > \cdots$$
$$\alpha_2 > \alpha_4 > \alpha_6 > \alpha_8 > \alpha_{10} > \cdots$$

Alles dies gilt auch für das allgemeine Glied von x_1:

$$\frac{1}{(4\mu)!\,2} - \frac{1}{(4\mu+1)!} + \frac{1}{(4\mu+2)!\,2} - \frac{1}{(4\mu+3)!} - \frac{1}{(4\mu+4)!\,2} + \frac{1}{(4\mu+5)!} - \frac{1}{(4\mu+6)!\,2} + \frac{1}{(4\mu+7)!} + \cdots,$$

wobei die α-Werte unendlich klein werden. Unsere Reihe wird also, von den ersten Gliedern abgesehen:

$$\sum_4^\infty \cos n!\,x\pi = \cos\left(\frac{1}{2} - \alpha_1\right)\pi + \cos\left(\frac{1}{2} - \alpha_2\right)\pi + \cos\left(\frac{1}{2} + \alpha_3\right)\pi + \cos\left(\frac{1}{2} + \alpha_4\right)\pi + \cdots\cdots$$

$$= (\sin\alpha_1\pi + \sin\alpha_2\pi) - (\sin\alpha_3\pi + \sin\alpha_4\pi) + \cdots, \qquad (A)$$

Weil aber:

$$\sin\alpha_1\pi - \sin\alpha_3\pi + \sin\alpha_2\pi - \sin\alpha_4\pi > 0$$

und auch:

$$\sin\alpha_3\pi - \sin\alpha_5\pi + \sin\alpha_4\pi - \sin\alpha_6\pi > 0,$$

ist die Reihe (A) eine Reihe, deren bis 0 hin abnehmende Glieder abwechselndes Zeichen besitzen, folglich konvergent, was nachgewiesen werden sollte.

Darauf demonstriert Herr Ahlborn das im Besitz des Realgymnasiums des Johanneums befindliche, zerlegbare Tellurium-Lunarium von Mang.

Versammlung vom 11. Oktober 1884.

Herr Dr. Schrader macht einige nachträgliche Mitteilungen über die am 4. Oktober stattgefundene Mondfinsternis.

Hierauf hält Herr Dr. Bock einen Vortrag über „Hydrodynamik nach dem Hamilton'schen Prinzip."

Aus dem Prinzip der virtuellen Geschwindigkeiten:

$$\sum X_i dx_i + Y_i dy_i + Z_i dz_i = 0,$$

wenn das System der n Punkte, deren Koordinaten $x_i y_i z_i$ und auf welche die Kräftekomponenten $X_i Y_i Z_i$ wirken, im Gleichgewichte ist, sobald $dx_i dy_i dz_i$ solche ∞ kleine Verschiebungen der Punkte bedeuten, die mit den Bedingungen des Systems verträglich sind — folgt für den Fall, daſs nicht Gleichgewicht ist, leicht das d'Alembert'sche Prinzip

$$\sum \left(X_i - m \frac{d^2 x_i}{dt^2}\right) dx_i + \cdots + \cdots = 0,$$

und diesem Grundgesetz genügen die Lagrange'schen Bewegungsgleichungen:

$$\begin{aligned} m_i \frac{d^2 x_i}{dt^2} &= X_i + \lambda \frac{d\varphi}{dx_i} + \mu \frac{d\psi}{dx_i} \\ m_i \frac{d^2 y_i}{dt^2} &= Y_i + \lambda \frac{d\varphi}{dy_i} + \mu \frac{d\psi}{dy_i} \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot &\quad \cdot \quad \cdot \end{aligned}$$

wo $\varphi = 0$, $\psi = 0$, $\cdots$ die Gleichungen sind, denen das gegebene System von Punkten zu genügen hat.

n Punkte und m Bedingungsgleichungen vorausgesetzt, so sind $3n$ Beschleunigungen und m Multiplikatoren λ, μ, $\nu \cdots$ zu bestimmen, wozu diese $3n$ Gleichungen und die m Bedingungsgleichungen ausreichen. Die Bedeutung der zunächst willkürlich eingeführten λ, μ, $\nu \cdots$ ergiebt sich jetzt derart, daſs $\lambda \cdot \frac{d\varphi}{dx}$ der Druck ist, welchen der Punkt xyz in der Richtung der x-Achse infolge seiner Verbindung mit den übrigen Punkten erfährt.

Hieraus endlich geht das Hamilton'sche Prinzip hervor, welches wieder diese selben Gleichungen sämtlich in eine Formel zusammen bringt:

$$d \int_{t_0}^{t} dt (U + L + \lambda\varphi + \mu\psi + \cdots) = 0,$$

wo U die gesamte Kräftefunktion, L die gesamte lebendige Kraft. — Die Variation ist lediglich nach den Koordinaten auszuführen und die Summe der Faktoren, mit denen ein beliebiges dx, dy oder dz multipliziert auftritt, gleich Null zu setzen.

a, b, c seien die Koordinaten zur Zeit t_0 desjenigen Punktes, der zur Zeit t die Koordinaten x, y, z hat. ϱ sei die Dichtigkeit in diesem Punkte. $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dx}{dc}$ u. s. w. sind stets endlich vorausgesetzt, d. h. es findet kein Zerreifsen statt.

Dann sind die Bedingungsgleichungen für die Unveränderlichkeit des Volumens

$$\int\int\int da\, db\, dc\,(\Delta - 1) = 0,$$

jeder Posten dieser Summe $= 0$.

$$\frac{1}{6}\,\Delta\, da\, db\, dc = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} \frac{dx}{da} & \frac{dy}{da} & \frac{dz}{da} \\ \frac{dx}{db} & \frac{dy}{db} & \frac{dz}{db} \\ \frac{dx}{dc} & \frac{dy}{dc} & \frac{dz}{dc} \end{vmatrix} da\, db\, dc = \frac{1}{6}\, da\, db\, dc$$

ist das Volumen des Tetraëders, dessen Ecken zur Zeit t_0 die Koordinaten $a\,b\,c$, $a + da, b\,c$, $a, b + db, c$, $a, b, c + dc$ resp. hatten.

$$d\int\int\int da\, db\, dc \cdot p\,(\Delta - 1)$$

entspricht der Variation von $\lambda\varphi$ oder $\mu\psi$; indem p die Stelle des Lagrange'schen Multiplikators λ oder μ, $\Delta - 1 = 0$ die Stelle der Bedingungsgleichung einnimmt. Für jeden Punkt im Innern der Flüssigkeit ergiebt sich dann

$$\varrho\,\frac{d^2x}{dt^2} = \varrho\,\frac{dU}{dx} - \frac{dp}{dx},$$
$$\varrho\,\frac{d^2y}{dt^2} = \varrho\,\frac{dU}{dy} - \frac{dp}{dy},$$
$$\varrho\,\frac{d^2z}{dt^2} = \varrho\,\frac{dU}{dz} - \frac{dp}{dz}.$$

Hieraus folgt, dafs p der Druck in der Flüssigkeit am Orte xyz. An der freien Oberfläche ergiebt sich $p = 0$. Der Druck auf die vom Wasser berührte Oberfläche etwaiger fester Körper hat die Komponenten

$$-p \cdot \cos(n, x)\, d\sigma,$$
$$-p \cdot \cos(n, y)\, d\sigma,$$
$$-p \cdot \cos(n, z)\, d\sigma,$$

$d\sigma$ das Flächenelement, (n, x) der Winkel zwischen der Richtung der nach dem Innern der Flüssigkeit gerichteten Normalen und der x-Achse.

Der Druck ist also senkrecht gegen die Fläche. Die festen Kör bewegen sich also so, als ob die Flüssigkeit nicht vorhanden w und statt dessen auf die benetzten Stellen der Druck p in der Richtu der Normalen wirkte.

Im Zustande der Ruhe, wenn die Flüssigkeit allein unter de Einflusse der Schwere steht, ist $p = \varrho \cdot gx$, wenn die x-Achse vertik abwärts geht, und die yz-Ebene das Niveau der Flüssigkeit ist.

Hieraus würde der Gewichtsverlust eines Körpers im Wasse abzuleiten sein.

Für einen schwimmenden Körper folgen die bekannten Sätz über Masse des verdrängten Wassers und Lage des Schwerpunktes.

Versammlung vom 8. November 1884.

Herr Prof. Dr. Gomes Teixeira in Coimbra bietet das von ihm herausgegebene „Journal de sciencias mathematicas e astronomicas" in Schriftenaustausch an, was angenommen wird.

Herr Schulze hält einen Vortrag: „Zur Geschichte der hypergeometrischen Reihe."

Die hypergeometrische Reihe

$$1 + \frac{\alpha\beta}{1 \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1 \cdot 2 \cdot \gamma \cdot (\gamma+1)} x^2 + \cdots = F(\alpha\beta\gamma x),$$

schon von Euler entdeckt, wurde zuerst von Gauss in den „Disquisitiones generales circa seriem hyperg. (1811)" untersucht. Nach ihm sind alle bekannten Reihen der Analysis durch hypergeometrische Reihen ausdrückbar. Zwischen je drei „kontiguen" Funktionen

$$(F(\alpha \pm 1,\ \beta,\ \gamma,\ x),\ \ F(\alpha,\ \beta \pm 1,\ \gamma,\ x) \text{ etc. } \cdots)$$

existieren lineare homogene Relationen. Aus ihnen ergiebt sich z. B.

$$0 = \gamma(\gamma+1)F(\alpha,\beta,\gamma,x) - (\gamma+1)(\gamma - (\alpha+\beta+1)x)F \cdot (\alpha+1,$$
$$\beta+1,\gamma+1,x) - (\alpha+1)(\beta+1)x(1-\alpha)F(\alpha+2,\beta+2,\gamma+2,x),$$

d. h.

$$0 = \alpha\beta F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x) - (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dF}{dx} - (x-x^2)\frac{d^2F}{dx^2}.$$

Gauss hat diese Differentialgleichung nicht allgemein integriert, sondern nur eine Reihe partikulärer Integrale geliefert, welche sich in der aus seinem Nachlafs publizierten Abhandlung „Determinatio seriei nostrae per aequat. different. II ordinis" finden.

Aufserdem hat er den Zusammenhang mit den Π-Funktionen oder Legendre's Γ-Funktionen nachgewiesen, sowie eine Entwickelung in Kettenbrüche geliefert.

Die allgemeine Lösung rührt von Kummer her, dessen in Crelle's Journ. Bd. 15 publizierte Methode folgende ist.

Die Differentialgleichungen

1) $$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0,$$

2) $$\frac{d^2v}{dz^2} + P(z)\frac{dv}{dz} + Q(z)v = 0$$

mögen als komplete Integrale haben

$$y = A\varphi(x) + B\varphi_1(x)$$
$$v = A'\psi(x) + B'\psi_1(z),$$

wo $z = f(x)$.

Nun sei $y = \omega(x)v$ also $y = A'\omega\psi(z) + B'\omega\psi_1(z)$ ein zweites komplete Integral der Gleichung 1), so ergeben sich durch Substitution von $y = \omega v$ in 1) und Vergleichung mit 2) zwei Gleichungen, deren eine einen Ausdruck für ω liefert.

Die Elimination von ω, $\frac{d\omega}{dx}$, $\frac{d^2\omega}{dx^2}$ aus beiden Gleichungen und der transformierten Gleichung 1) liefert zwischen z und x eine Differentialgleichung dritter Ordnung.

Nun sei

$$p(x) = \frac{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x}{x - x^2}; \quad q(x) = \frac{-\alpha\beta}{x - x^2},$$
$$P(z) = \frac{\gamma' - (\alpha' + \beta' + 1)z}{z - z^2}; \quad Q(z) = \frac{-\alpha'\beta'}{z - z^2},$$

ferner sei

1) α', β', γ' von α, β, γ abhängig,

2) α, β, γ von einander unabhängig,

3) z eine Funktion von x.

Infolge der Bedingung 2) zerfällt die Differentialgleichung dritter Ordnung in 10 Gleichungen, aus deren Form Kummer schliefst, dafs $z = \frac{ax + b}{cx + d}$.

Für z ergeben sich dann 6 Ausdrücke in x:

$$x,\ 1 - x,\ \frac{1}{x},\ \frac{1}{1 - x},\ \frac{x}{1 - x},\ \frac{1 - x}{x},$$

In jedem dieser Fälle existieren 4 Integrale und somit ist 24 die Gesamtzahl der Integrale der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe.

Hierauf bespricht Herr Dr. Schrader im allgemeinen die heute in der praktischen Astronomie angewandten Methoden der Positionsbestimmungen mit besonderer Berücksichtigung der absoluten Bestimmungen mit Hilfe eines Äquatoreales.

Versammlung vom 13. Dezember 1884.

Herr Kpt. Koldewey berichtet über die Prüfungen von Sextanten, wie sie von ihm auf der Deutschen Seewarte vorgenommen werden, wobei die zum Teil von ihm erdachten Methoden zur Bestimmung der Exzentrizität, der Teilungsfehler, der Fehler in Spiegel- und Fernrohrstellung, der Untersuchung der Spiegel auf ihre Planparallelität erläutert werden, letzteres unter Demonstration des dazu verwendeten Apparates.

Der Vortragende hebt hervor, dafs der Zweck dieser Untersuchungen ein zweifacher sei: einerseits den Seeleuten genaue Messungen zu ermöglichen und andererseits die einheimische Fabrikation zu heben. Letzteres sei der Seewarte in erfreulicher Weise gelungen, wie aus der von Herrn Eylert publizierten Arbeit „Der Sextant" (Archiv der Deutschen Seewarte für 1881) hervorgehe.

Herr Dr. Krüss spricht hierauf über Spektralapparate mit automatischer Einstellung der Prismen auf das Minimum der Ablenkung.

Die Stellung eines Prisma im Minimum der Ablenkung ist für die Erzeugung und Beobachtung des Spektrum aus mehreren Gründen eine bevorzugte. Die rechnerische Untersuchung zeigt ferner, dafs bei Anwendung von mehr als einem Prisma von 60° brechendem Winkel es nicht genügt, dafs ein jedes Prisma für eine Stelle des Spektrum, etwa diejenige der Linie D, im Minimum der Ablenkung stehe, sondern dafs es notwendig ist, für jeden zu beobachtenden Strahl alle Prismen in das Minimum der Ablenkung zu stellen, einmal wegen des sonst eintretenden grofsen Lichtverlustes in dem brechbareren Teile des Spektrum und ferner weil sonst die brechbaren Strahlen infolge von Total-Reflexion überhaupt die Prismenkette nicht durchdringen würden.

Der Vortragende erläutert die mechanischen Einrichtungen, durch welche eine automatische Einstellung der Prismen ermöglicht wird, und demonstriert an einem von ihm konstruierten Spektral-Apparat mit drei Prismen und Rückkehr der Strahlen infolge Anwendung eines Reflexionsprisma eine von ihm erdachte wesentliche Vereinfachung des Mechanismus solcher Apparate.

Da auch bei Anwendung nur eines Prisma von 60°, hauptsächlich im Interesse der Ausnutzung der vollständigen Objektivöffnung des Beobachtungsfernrohres die Einstellung des Prisma auf das Minimum der Ablenkung für jeden beobachteten Strahl wünschenswert ist, so hat der Vortragende auch bei einem solchen Apparate die automatische Einstellung des Prisma eingerichtet und führt einen derartigen Apparat vor.

Versammlung vom 10. Januar 1885.

Es wird über die demnächst vorzunehmende Herausgabe der „Mitteilungen Nr. 5“ verhandelt und beschlossen, dieselben von jetzt an in der neuen Orthographie erscheinen zu lassen.

Herr Dr. Keferstein hält einen Vortrag: „Beitrag zur Theorie des Billardspieles.“

Bekanntlich geht bei der Bewegung einer homogenen Kugel auf einer festen horizontalen Ebene unter dem Einfluſs gleitender Reibung derjenige Punkt der Kugel mit konstanter Geschwindigkeit beständig in gerader Linie fort, welcher auf dem durch den Kugelmittelpunkt gehenden Lot zur Billardebene oberhalb dieses Mittelpunktes und in einer Entfernung gleich $\frac{2}{5}$ des Kugelradius von ihm liegt. Dieser Punkt heiſst das obere Erschütterungszentrum der Kugel. Wir fragen: Unter welchen Bedingungen geht das obere Erschütterungszentrum in der Stoſsrichtung des Queues d. h. in Richtung der Achse des Queue resp. deren Horizontalprojektion weiter? Den Stoſs zwischen Queue und Kugel behandeln wir nach der Poisson'schen Methode, ohne jedoch den Stoſs vollkommen und unvollkommen elastischer Körper auf denjenigen von unelastischen zurückzuführen. Vielmehr finden wir die zur vollständigen Lösung des Problems nötige 13. Gleichung durch die Überlegung, daſs für vollkommen elastische Körper der Radius der Wirkungssphäre der Atome im Beginn und am Ende des Zusammentreffens derselbe sein muſs und erhalten, wenn g und γ die Anfangswerte der Geschwindigkeiten des Berührungspunktes, g' und γ' die Endwerte derselben Geschwindigkeiten sind:

$$g' + g = \gamma' + \gamma$$

und für unvollkommen elastische Massen, deren Elastizitätskoeffizient ε ist, folgt entsprechend

$$g' + \varepsilon\gamma = \gamma' + \varepsilon\gamma.$$

Die Masse der Kugel und die des Queues sei vollkommen homogen. Das Queue betrachten wir als einen geraden Cylinder mit einer vorn angesetzten Halbkugel, deren Radius r sein möge, während ϱ die Entfernung des Mittelpunktes dieser Halbkugel vom Schwerpunkt des Queues sein soll. Den Koordinatenanfang legen wir in den Berührungspunkt von Kugel und Queue, positive z-Achse sei die nach dem Innern der Kugel gerichtete Normale daselbst, die x- und y-Achse seien symmetrisch zu der Ebene der z-Achse und der Achse des Queues gelegen. R sei der Radius der Kugel, M ihre Masse, $\frac{2}{5} MR^2$ also

ihr Hauptträgheitsmoment und ihr Trägheitsmoment in Bezug auf die z-Achse $\frac{2}{5} MR^2$, für die x- und y-Achse $\frac{7}{5} MR^2$. Die Geschwindigkeitskomponenten des Schwerpunktes der Kugel nach den Achsen der x, y, z in einem beliebigen Momente des Stofses (resp. am Ende desselben) seien u, v, w, die Winkelgeschwindigkeiten um dieselben Achsen p, q, r, die Gesamtgeschwindigkeitskomponenten eines Punktes x, y, z der Kugel also $u + zq - yr$; $v + xr - zp$; $w + yp - xq$. Die entsprechenden Komponenten für das Queue bezeichnen wir mit gestrichenen Buchstaben. Die Trägheitsmomente A des Queues in bezug auf die x- und y-Achse werden einander gleich und beide gleich

$$(1 - \gamma_1^2) A' + \gamma_1^2 C' + (x_0'^2 + z_0'^2) M',$$

das Trägheitsmoment C des Queues in bezug auf die z-Achse wird:

$$(1 - \gamma_3^2) A' + \gamma_3^2 C' + 2 x_0'^2 M';$$

wenn M' die Masse des Queues, C' sein Hauptträgheitsmoment in bezug auf die Längsachse, A' die Gröfse der anderen Hauptträgheitsmomente, γ_3 der Kosinus des Winkels zwischen Längsachse des Queues und z-Achse, γ_1 der Kosinus des Winkels zwischen Längsachse und x- und y-Achse ist, und $x_0' = y_0' = \varrho\gamma_1$; sowie $z_0' = r + \varrho\gamma_3$ die Koordinaten des Schwerpunktes des Queues in bezug auf das gewählte System bezeichnen. Ferner wird

$$\int y' z' dm' = \int x' z' dm' = (A' - C') \gamma_1 \gamma_3 + x_0' z_0' M',$$

$$\int x' y' dm' = (A' - C') \gamma_1^2 + x_0'^2 M';$$

der unbekannte, die Wirkung des Stofses repräsentierende Normaldruck im Berührungspunkt sei N, die Gröfse der Reibung fN, wenn f Reibungskoeffizient von Kugel und Queue. Den Winkel, welchen die Richtung der relativen Geschwindigkeit des Berührungspunktes von Kugel und Queue in irgend einem Momente des Stofses mit der x-Achse bildet, nennen wir φ, so dafs

$$\cos\varphi = \frac{u - u'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}},$$

$$\sin\varphi = \frac{v - v'}{\sqrt{(u - u')^2 + (v - v')^2}}.$$

Die Bewegungsgleichungen für die Kugel werden:

1) $$M(du + Rdq) = -fN\cos\varphi dt,$$

2) $$M(dv - Rdp) = -fN\sin\varphi dt,$$

3) $$Mdw = \quad Ndt,$$

4) $\frac{7}{5} MR^2 dp - MR dv = 0;$

5) $\frac{7}{5} MR^2 dq + MR du = 0;$

6) $\frac{2}{5} MR^2 dr = 0.$

Diejenigen für das Queue:

7) $M' d(u' + z_0' q' - x_0' r') = fN \cos\varphi dt,$

8) $M' d(v' + x_0' r' - z_0' p') = fN \sin\varphi dt,$

9) $M' d(w' + x_0' p' - x_0' q') = -Ndt;$

10) $M' x_0' dv' - M' x_0' du' + C dr' - dp' \int x' z' dm' - dq' \int x' z' dm' = 0;$

11) $M' z_0' du' - M' x_0' dw' + A dq' - dr' \int x' z' dm' - dp' \int x' y' dm' = 0;$

12) $M' x_0' dw' - M' z_0' dv' + A dp' - dq' \int y' x' dm' - dr' \int x' z' dm' = 0.$

Und bei Annahme vollkommener Elastizität beider Körper, wenn w_0' die Komponente der Anfangsgeschwindigkeit des Schwerpunktes des Queues in Richtung der z-Achse bezeichne, ist

13) $w = w' + w_0'.$

Setzt man für A, C, $\int x' z' dm'$ und $\int x' y' dm'$ ihre Werte ein und berücksichtigt, dafs bei der Wahl des Koordinatensystems $du + R dq = dv - R dp$; und $d(u' + z_0' q' - x_0' r') = d(v' + x_0' p' - x_0' q')$ sein mufs, so findet man: $\operatorname{tg}\varphi = 1$; und weil im Anfang des Stofses

$$\sin\varphi = -\frac{u_0'}{\sqrt{u_0'^2 + v_0'^2}}; \quad \cos\varphi = -\frac{v_0'}{\sqrt{u_0'^2 + v_0'^2}}; \quad \varphi = 225^0;$$

die Richtung des Gleitens des Berührungspunktes von Kugel und Queue ist also während der ganzen Dauer des Stofses konstant. Die 12 Bewegungsgleichungen lassen sich daher ohne weiteres integrieren, und man erhält:

$$u = v = \frac{7}{4}\sqrt{2} f D w_0'; \quad w = D w_0';$$

$$\text{wo } D = \frac{2A'M'}{A'(M+M') + MM'(2x_0'^2 - \sqrt{2} f x_0' z_0')}.$$

$$p = -q = \frac{5}{4R}\sqrt{2} f D w_0'; \quad r = 0.$$

Ist nun i der Winkel, welchen die Längsachse des Queues mit ihrer Horizontalprojektion bildet, so erhält man bei Einführung eines geeigneten Koordinatensystems mit Anfangspunkt im Schwerpunkt des Queues und eines entsprechenden in der Kugel, als Bedingung dafür, dafs nur die Geschwindigkeitskomponente des oberen Erschütterungszentrums der Kugel nach der Längsachse des Queues von Null

verschieden wird, d. h. dafür, daſs jenes Zentrum in Richtung dieser Längsachse resp. deren Horizontalprojektion fortgeht:

$$\frac{1}{2}\sqrt{2}f = \frac{\gamma_1}{\gamma_3 + \sin i};$$

oder für $\gamma_3 = \cos\vartheta$, mithin $\gamma_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sin\vartheta$;

$$f = \frac{\sin\vartheta}{\cos\vartheta + \sin i};$$

was bei Stoſs mit horizontalem Queue

$$f = \operatorname{tg}\vartheta$$

ergiebt.

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 6. Ausgegeben im März 1886.

Berichte über die Versammlungen.

Hauptversammlung vom 17. Februar 1885.

Der Jahrverwalter, Herr Dr. Krüss, giebt den Jahresbericht über das 195. Gesellschaftsjahr, aus welchem hervorgeht, dafs die Gesellschaft 4 Ehrenmitglieder, 40 hiesige und 11 auswärtige, ordentliche Mitglieder zählt. Ein Ehrenmitglied, Herrn Reese, hat der Verein durch den Tod verloren. Zum Adjunkten wird Herr Dr. Wagner gewählt, zum Bibliothekar Herr Ingenieur Joh. Bubendey wiedergewählt.

Einnahmen: ℳ 1288,23. Ausgaben: ℳ 413,77.

Kassenbestand: ℳ 874,46.

Bei Gelegenheit des Jubiläums des hiesigen Realgymnasiums sind von Herrn Oberlehrer H. Ahlborn „Mitteilungen aus der Geschichte der mathematischen Gesellschaft zu Hamburg“ publiziert.

Die Gesellschaft ist im verflossenen Jahre in Schriftenaustausch getreten mit der Reale Accademia dei Lincei in Rom und mit Herrn Prof. Gomez Teixeira in Coimbra, dem Herausgeber eines portugiesischen mathematischen Journals.

Nach Schlufs der Hauptversammlung blieben die Mitglieder zur Feier des 195. Stiftungsfestes zu einem Festmahle zusammen, an dem eine gröfsere Anzahl von Gästen sich beteiligte. Das Fest verlief in der heitersten Stimmung.

Versammlung vom 7. März 1885.

Als ordentliche, hiesige Mitglieder wurden aufgenommen die Herren: Direktor Dr. Voller und Dr. Mügge.

Der Jahrverwalter, Herr Ahlborn, hält einen Vortrag über „Girards Invention nouvelle en l'algèbre", eine im Jahre 1629 erschienene Algebra, welche von unserem Ehrenmitgliede, Herrn Prof. Bierens de Haan, jüngst neu herausgegeben ist.

Das historisch interessante Werk hat dadurch besonders Bedeutung erlangt, dafs der Verfasser überall die Übereinstimmung der Gradzahl der Gleichung mit der Anzahl der Wurzeln hervorhebt, dafs er alle Wurzeln, auch negative und imaginäre, bestimmt, ja den negativen auch eine geometrische Bedeutung beilegt, worin sich Anklänge an die Methode der analytischen Geometrie von Descartes finden.

Darauf giebt Herr Dr. Schubert die von einem Franzosen herrührende neue Erklärung des Wortes sinus, wonach spanische Mönche das indische ziwa, welches arabisiert dschiba gesprochen wird, misverständlicherweise für das Wort dschaib = Meerbusen angesehen. Die Möglichkeit eines solchen Irrtums beruht auf dem Fehlen der Vokale in der arabischen Schrift.

Zum Schlusse hält Herr Dr. Krüss einen Vortrag „Über die Mafseinheiten des Lichts", unter welchem Titel der Vortragende eine Abhandlung in der „Zeitschrift für Elektrotechnik" hat erscheinen lassen.

Versammlung vom 18. April 1885.

Der Jahrverwalter berichtet, dafs Herr Prof. Stern sen. in Bern ihm brieflich noch 5 andere Lösungen der Aufgabe auf Seite 105 unserer Mitteilungen mitgeteilt hat, nämlich:

$$\frac{7692}{15384'}\quad\frac{7932}{15864'}\quad\frac{7923}{15846'}\quad\frac{9327}{18654'}\quad\frac{9273}{18546}$$

Herr Dr. Schubert hält einen Vortrag: „Über die Axiome der der n-dimensionalen Geometrie", worüber derselbe in den „Mathematischen Annalen" eine längere Abhandlung publiziert hat.

Versammlung vom 9. Mai 1885.

Herr Dencker hält einen Vortrag: „Über den Taxanom". Die Einrichtung des Apparates wird beschrieben.

Im Anschlufs daran teilt Herr Reitz mit, dafs bereits vorgeschlagen sei, dasselbe Prinzip der Drehung eines Rades zur Messung

von Basisentfernungen zu benutzen, was allerdings nur möglich sei, wenn der betreffende Apparat sehr genau funktioniere.

Hierauf macht Herr Dr. Schubert auf die „Kalendertabellen" von Felix Müller (Berlin, Georg Reimer) aufmerksam, welche unter anderem eine praktisch eingerichtete Tabelle enthalten, aus der sich mit Leichtigkeit der Wochentag für jedes Datum finden läfst.

Zum Schlusse hält Herr Dr. Bock einen Vortrag: „Über Potentialwerte verschiedener Kräfte und Folgerungen daraus". Der Vortrag wird in der Juni-Versammlung fortgesetzt. Das Folgende ist ein Auszug aus demselben.

Ein Hauptsatz der analytischen Mechanik, das Hamilton'sche Prinzip, das eine in hohem Mafse einheitliche Behandlung der verschiedenartigsten mechanischen Probleme gestattet, bezieht sich auf die Arbeit, welche während der Bewegung und durch dieselbe geleistet wird und welche sich in drei Arten zerlegen läfst:

1) diejenige, welche eine Änderung der lebendigen Kraft (der aktuellen Energie) bewirkt,

2) diejenige, welche die potentielle Energie, die Beziehungen der einander anziehenden oder abstofsenden Massen oder Mengen ändert,

3) diejenige, welche geleistet wird gegen den Widerstand, der aus etwaigen dem betrachteten Massensystem auferlegten Bedingungen fliefst.

Das Hamilton'sche Prinzip besagt, dafs bei jeder wirklich stattfindenden Bewegung die Summe dieser drei Arten von Arbeit, für jedes Zeitelement kleiner ist, als sie sein würde, wenn man sich, unter denselben Bedingungen und bei denselben Kräften, die Bewegung anders erfolgt dächte. Oder präziser ausgedrückt: diese Summe ist ein Minimum und ihre Variation nach den Koordinaten demnach gleich Null, wobei auch virtuelle Verrückungen zulässig sind, welche nicht den Bedingungsgleichungen des Systems genügen.

Bei der wirklich stattfindenden Bewegung ist zwar die sub 3 erwähnte Arbeit gleich Null, weil, wie schon d'Alembert erkannte, das System der verlorenen Kräfte im Gleichgewicht ist. Hieraus folgt aber noch nicht, dafs die Summe der Arbeiten der ersten und zweiten Art allein schon ein Minimum ist. Denn wenn auch die supponierte Arbeit der dritten Art in Wirklichkeit keine Arbeit ist, so braucht darum ihre Variation nicht gleich Null zu sein.

Unser Thema beschäftigt sich ausschliefslich mit dem zweiten Bestandteil der durch die Bewegung ponderabler oder hypothetischer Massen geleisteten Arbeit.

Wir setzen voraus bestimmte, für den Augenblick festgelegte,

diskrete oder kontinuierlich einen Raum erfüllende oder eine Fläche bedeckende Punkte, Raum- oder Flächenelemente, von denen die Wirkung ausgeht, ferner Einen Punkt (Raum- oder Flächenelement) mit der Einheit der Masse oder Menge, also eventuell mit der Einheit der positiven Elektrizität, auf welchen die Wirkung ausgeübt wird und durch dessen Bewegung die potentielle Energie geändert werden soll.

Das Potential der Kräfte der ersteren Punkte — besser vielleicht, das der beiderseitigen Wirkung — ist dann das Arbeitsquantum, welches erforderlich ist, den letztgenannten Punkt unter dem alleinigen Einflufs derselben aus unendlicher Ferne an denjenigen Ort zu bringen, an welchem er sich befindet, auf welchen also das Potential sich bezieht.[1]) Es ist ein Ausdruck in den Koordinaten der beiderseitigen Beziehungspunkte, wie schon aus dem Umstand hervorgeht, dafs nach den Koordinaten variiert wird. Gleichwohl kann es die mannigfaltigsten Formen haben.

Das auf das Coulomb'sche Gesetz gegründete Potential V einer Elektrizitätsmenge ist bekanntlich

$$= \sum - \int \frac{e}{r^2} \cdot dr = \sum \frac{e}{r}.$$

Man ersieht hieraus, dafs Änderungen desselben nur von Anfangs- und Endlage des bewegten Punktes abhängen, nicht vom Integrationswege — was aus dem Gesetz vom Parallelogramm der Kräfte folgt.

Es ist endlich stetig und eindeutig in Beziehung auf alle Punkte des Raumes u. s. w.

Potentialdifferenzen zu messen dient eine von Kohlrausch angegebene Methode mittels Kondensator und Sinuselektrometer.

Demselben Zweck dient das Torsionsgalvanometer von Siemens, das Quadrantenelektrometer von Thomson, der auch ein absolutes Elektrometer konstruiert hat.

Soweit bei den letzteren beiden das Potential aller vorhandenen Elektrizität in Beziehung auf die Punkte der Erde als verschwindend klein gedacht wird, dürfte allerdings ein Irrtum vorliegen.

Von diesen in der Technik gebräuchlichen Methoden abgesehen, ist die Lösung des Potentialproblems, d. h. die Auffindung des Potentials

1) Bezüglich des Potentials der elektrischen, unter dem Weberschen Gesetz stehenden Kräfte fällt die Beschränkung weg, dafs die wirkenden Massen- oder Mengenelemente für den Augenblick in Ruhe zu denken sind. Hier wird jedem derselben nur eine momentan konstante relative Geschwindigkeit gegen den allen gegenüberstehenden Einen Anziehungspunkt beigelegt.

beliebig verteilter E-Mengen in Beziehung auf alle Punkte des Raumes wesentlich eine Integrationsaufgabe, nämlich die Lösung der Differentialgleichung

$$\Delta V = 0 \text{ resp. } = -4\pi D.$$

Nach mathematischen Gesichtspunkten geordnet finden wir zunächst das Potential bei stationärem Strom in einem linearen Leiter, unter der Voraussetzung, dafs die Richtung der Kraft zugleich die des Stroms und des Leiters, dafs die Menge der den Einheitsquerschnitt in der Sekunde durchströmenden positiven E proportinal der Kraft A ist (nämlich $= \lambda \cdot A$, wo λ als Leitungsfähigkeit zu bezeichnen ist), wenn man den Querschnitt des Drahtes q nennt:

$$V = -As + B = -A \cdot \lambda \cdot q \cdot \frac{s}{\lambda q} + B$$
$$= -iw + B,$$

da $A \cdot \lambda \cdot q$ dann $= i$, und $\frac{s}{\lambda \cdot q}$ gleich dem Widerstand in demjenigen Drahtstück, welches die Länge s hat.

Hieraus folgt mit Benutzung der Eigenschaft der Eindeutigkeit das Ohm'sche Gesetz in seiner allgemeinsten Form: $\sum iw = E$ für jeden geschlossenen Stromkreis, ohne dafs etwaige Abzweigungen Einflufs hätten, wo dann E die Summe ist der Sprünge, welche der Potentialwert beim Übergang aus einem Medium in das andere erfährt.

Die Arbeit des Stroms auf einer Strecke, an deren Enden das Potential die Werte V_1 und V_2 hat, ist also pro Sekunde

$$= \frac{i(V_1 - V_2)}{9{,}81} = \frac{i^2 w}{9{,}81}$$

in mechanischen Einheiten $= \frac{i^2 w}{75 \cdot 9{,}81}$ Pferdekräften.

Hieraus folgt die Methode der Wheatstone'schen Brücke (zuerst von Weber angegeben), ferner eine Methode durch einfache Intensitätsmessung und Widerstandsbestimmung die elektromotorische Kraft eines Elementes zu finden.

Man findet unmittelbar $E = I \cdot W$, wenn die Aufstellung so besorgt ist, dafs in der Transversalen kein Strom stattfindet. E, die elektromot. Kraft des Elements im Innern, ist gleich dem Produkt aus dem Widerstand W auf dem Bogen xyz und der Stromintensität ebendaselbst.

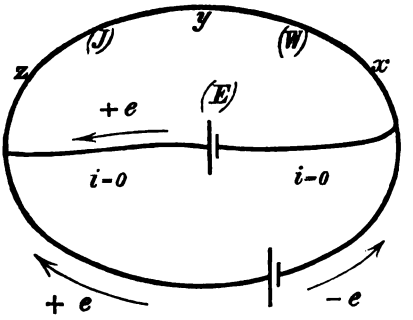
Führt man Polarkoordinaten ein und setzt

$$z = r \cdot \cos \vartheta$$
$$x = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \omega$$
$$y = r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \omega,$$

dann wird

$$\Delta V = \frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r^2}\cdot\frac{d^2V}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r^2\cdot\sin^2\vartheta}\cdot\frac{d^2V}{d\omega^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{dV}{dr} + \frac{\operatorname{cotg}\vartheta}{r^2}\cdot\frac{dV}{d\vartheta}$$

und dieses $= 0$ resp. $= -4\pi D$.



Bedeckt die Elektrizität mit überall gleicher Dichtigkeit eine Rotationsfläche um die Z-Achse, so wird demgemäfs

$$V = \frac{A}{r} + \frac{B}{r}\cdot\log\left(\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2}\right)$$

eine besondere Lösung der Differentialgleichung. V hängt dann nicht von ω ab.

Eine additive Konstante tritt nicht auf, da V in der Unendlichkeit Null werden mufs.

Für einen Kondensator ist die Potentialdifferenz $V_1 - V_2$ der beiden Platten in Beziehung zu bringen mit der positiven Ladung Q_1 der einen Platte. Dann ist

$$Q_1 = (V_1 - V_2)\cdot\frac{F}{4\pi S},$$

wo S der Abstand der beiden Platten und F die Gröfse der einander zugekehrten Flächen. Ein dielektrisches Medium fügt dem Bruch $\frac{F}{4\pi S}$ der Kapazität, einen Faktor gröfser als 1 hinzu, der in merkwürdiger Beziehung zum optischen Brechungsexponenten desselben Stoffes steht.

Das Potential in dem Flüssigkeits-Hohlcylinder zwischen Zink und Kupfer oder Thonzelle und Zink ist

$$V = A\cdot\log r + B,$$

wenn r der Abstand des Beziehungspunktes von der Rotationsachse ist.

In einer unendlichen Platte mit einem Einströmungs- und einem Ausströmungspunkte ist

$$V = A\cdot\log\frac{r_1}{r_2} + B,$$

wo r_1 und r_2 die Entfernungen von diesen beiden Punkten bis zum Beziehungspunkte sind.

Dann sind die Linien gleichen Potentials Kreise, ebenso die Kraftlinien.

Setzt man das Mariotte'sche Gesetz voraus und ferner isothermische Zustandsänderung, so läfst sich die Arbeit, die beim Verdichten einer Gasmasse geleistet wird, einfach bestimmen. Ist das Gas in einem Cylinder eingeschlossen und mit dem Gewicht P belastet, so wird eine Änderung seiner Höhe um dh durch die Arbeit $-P \cdot dh$ erreicht, und das ist $-p \cdot q \cdot dh$ oder $-p \cdot dv$, wenn q den Querschnitt, v das Volumen, und p den auf die Flächenheit bezogenen Druck bezeichnet. Denselben Arbeitsausdruck $-p \cdot dv$ erhält man leicht ersichtlich in allen Fällen.

Nennt man nun für den Druck $p = 1$, die Dichte D_1 und das Volumen v_1, also $v_1 \cdot D_1 = m$, so ist allgemein die Dichtigkeit $\varrho = p \cdot D_1$ und $v = \frac{v_1}{p} = \Delta \cdot v_1$, wenn man mit Δ das relative Volumen bezeichnet. Dadurch wird

$$-p \cdot dv = -\frac{1}{\Delta} \cdot v_1 d\Delta = -\frac{d\Delta}{\Delta} \cdot \frac{m}{D_1} = \frac{m}{D_1} \cdot \frac{dp}{p}.$$

Also für endliche Volumenänderung ist die von aufsen geleistete Arbeit

$$A = \frac{m}{D_1} \int \frac{dp}{p} = \frac{m}{D_1} (\log p + C)$$

$$= \frac{m}{D_1} \log \frac{p}{p_0}.$$

Ist der Druck in der Gasmasse nicht überall derselbe, so wird

$$A = \frac{1}{D_1} \int\int\int dm \log \left(\frac{p}{p_0}\right).$$

Geht diese Arbeit in lebendige Kraft über, was z. B. der Fall ist, wenn, Gas unter einem Druck p stehend, plötzlich aus einem Gefäfs hinausgelassen wird gegen den von der Atmosphäre geleisteten Druck p_0, dann wird

$$\frac{dm}{D_1} \log \frac{p}{p_0} = \frac{1}{2} dm v^2$$

$$\frac{1}{D_1} \cdot \log \frac{p}{p_0} = \frac{1}{2} v^2.$$

Ändert man bei beständigem p und p_0 die Art des Gases, so ändert sich auf der linken Seite nur D_1, also hängt v in der Art von D_1 ab, dafs die Ausflufsgeschwindigkeit umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte des Gases ist.

Eine zweite einfache Anwendung des Potentialausdrucks begründet die barometrische Höhenmessung. Ruhe und gleiche Temperatur in der Atmosphäre vorausgesetzt, so wird der Expansion überall durch

die Schwerkraft das Gleichgewicht gehalten. Die Summe der Potentiale der beiden Kräfte ist für alle Punkte der Luft also von gleicher Gröfse. Das Potential der Expansion nimmt vom Druck p_u am Meeresspiegel, bis zum Druck p auf dem Berggipfel zu, um $\frac{dm}{D_1} \log \frac{p}{p_u}$, das Potential der Schwere um $dm \cdot g \cdot h$. Beide Potentialdifferenzen müssen einander ausgleichen, also

$$\frac{1}{D_1} \cdot \log \frac{p_u}{p} = g \cdot h$$

$$h = \frac{1}{g \cdot D_1} \cdot \log \frac{p_u}{p}.$$

Aus dem benutzten Potentialwert ist auch die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer ebenen Longitudinalwelle in ruhender Atmosphäre nachweisbar als umgekehrt proportional der Quadratwurzel aus der Dichte des Gases. Man hat zwei Gleichungen zur Verfügung:

(I) $$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D_1} \log p\right) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{D_1} \cdot \log \varrho\right)$$

$$= -\frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x},$$

wo man für

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

setzen kann:

$$u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + v \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + w \cdot \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial u}{\partial t},$$

wenn man mit u, v, w die Komponenten der Geschwindigkeit,

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt}$$

bezeichnet.

Die zweite Gleichung bietet das Mariotte'sche Gesetz

$$\varrho \cdot \Delta = \text{const.}, \text{ also } \frac{d}{dt}(\varrho \cdot \Delta) = 0,$$

also

$$\Delta \frac{d\varrho}{dt} + \varrho \cdot \frac{d\Delta}{dt} = 0$$

oder

(II) $$\Delta\left(u\frac{\partial \varrho}{\partial x} + v\frac{\partial \varrho}{\partial y} + w\frac{\partial \varrho}{\partial z} + \frac{\partial \varrho}{\partial t}\right) + \Delta\varrho\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0,$$

denn

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

ist die relative Zunahme des Volumens. Schreitet die Longitudinalwelle in der Richtung der x-Achse fort und geschieht in allen Punkten solcher Ebenen, die parallel der yz-Ebene liegen, dasselbe, so wird

$$(1) \qquad u \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x},$$

$$(2) \qquad \varrho \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0.$$

Wenn man die erste Gleichung nach t, die andere nach x partiell differentiiert, erhält man

$$\frac{\partial \varrho}{\partial x} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \varrho \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \cdot \partial t} = 0$$

$$\frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{\varrho^2} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial t} \cdot \frac{\partial \varrho}{\partial x} - \frac{1}{D_1} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{\partial^2 \varrho}{\partial x \cdot \partial t} = \frac{\partial u}{\partial t} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + u \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x \cdot \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

hieraus

$$\frac{1}{D_1} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

da die meisten Glieder für mäfsig kleine Amplituden verschwinden; und hieraus endlich die Relation.

Versammlung vom 13. Juni 1885.

Herr Dr. Bock hält den zweiten Teil seines Vortrags „Über Potentialwerte verschiedener Kräfte," worüber im Vorangehenden berichtet ist.

Darauf macht Herr Bubendey einige Mitteilungen „Über die Beziehungen der reinen Mathematik zum Bauwesen."

Die grofsen Fortschritte, welche das letzte Jahrhundert auf dem Gebiete der höheren Mathematik und der theoretischen Physik gebracht hat, konnten nur auf denjenigen Gebieten der Baukunst Verwertung finden, auf denen es möglich war, eine klare und scharfe Gestaltung der Voraussetzungen, die der betreffenden Aufgabe zu Grunde liegen, zu gewinnen. Aus diesem Grunde mufsten die Ergebnisse der theoretischen Hydraulik ohne Einflufs bleiben auf die Bestimmugen der Ausflufs- und Durchflufsmengen, ebenso hat es nicht gelingen wollen, für die Bewegung des Wassers in Flüssen und offenen Kanälen allgemein gültige Formeln aufzustellen, welche allen mitwirkenden Einflüssen Rechnung tragen.

Im Gegensatze hierzu hat die Elastizitätslehre im hohen Grade wichtige Resultate für die Praxis erzielt. Das Gesetz, dafs die Spannung der Formveränderung proportional ist, hat sich innerhalb der wirklich angewandten Grenzen als richtig erwiesen. Vor allem kommt der grofse Wert der Elastizitätslehre bei der Lösung der statisch unbestimmten Konstruktionen zur Geltung, z. B. der auf drei Stützen gelagerte Balken.

Es ist nicht gelungen, zwischen der Arbeit, welche bei der Ei rammung eines Pfahles geleistet wird, und der ruhenden Last, welc der Pfahl später tragen kann, theoretische Beziehungen aufzustelle

Versammlung vom 12. September 1885.

Die Gesellschaft genehmigt den Schriftenaustausch mit Joh Hopkins' University, Baltimore, U. S., Herausgeberin des „Americ Journal of Mathematics."

Der hiesigen Stadtbibliothek ist von unserem Mitgliede, Her Prof. Bubendey, das Crellesche Journal vom 18. Bande ab geschen worden mit der Verpflichtung, das Journal weiter zu halten. Da sehr wünschenswert ist, dafs auch die ersten 17 Bände am hiesig Orte zu haben sind, wird der Jahrverwalter beauftragt, eine Eingal an die Oberschulbehörde zu machen, dahin gehend, dafs die erst 17 Bände obigen Journals von Seiten der Stadtbibliothek angescha werden.

Herr Dr. Böger wird als hiesiges, ordentliches Mitglied a genommen.

Darauf hält Herr Dr. Hoppe einen Vortrag „Über die Prinzipi der Elektrodynamik". Der Vortrag wird in der Oktoberversammlu fortgesetzt. Der Inhalt ist in Kürze folgender: Von den Prinzipi der Elektrodynamik hat ein Teil nur mathematisches Interesse u macht keine Annahmen über das Wesen, sondern nur über d Wirkungsweise der Elektrizität. Hierher gehören die Arbeiten v Ampère, F. Neumann und Maxwell. Andere gehen weiter und stell sich die Aufgabe, das Wesen der Elektrizität annähernd zu definier und auf Grund dieser Anschauungen Gesetze abzuleiten. Hierh gehören die Arbeiten von Weber, Clausius, Hankel und andere Der Vortragende vergleicht die Werte dieser Prinzipien und b spricht die Autoren Ampère, Weber, Gauss, Riemann, Bet C. Neumann, Matthieu und Clausius. Am zweiten Vortragsabe wird die Hypothese von Edlund besprochen, nach der der ele trische Strom Lichtäther ist und in dem Transport der Äth moleküle besteht, und es werden gewichtige Bedenken gegen diesel geltend gemacht. Zum Schlusse wird eingehender behandelt d Theorie von Maxwell, dessen Verdienst nicht nur das sei, ne Ansichten über die Wirkungsweise der Elektrizität entwickelt haben, die einen hohen Grad von Wahrscheinlichkeit für sich hab sondern der durch seine Arbeiten auch die Veranlassung gegeb hat zu einer Reihe neuer Versuche, die zu interessanten Entdeckung geführt haben. Maxwell postuliert die Mitwirkung eines Mediu

welches in mechanische Spannung versetzt wird. Da es sich nach ihm sodann um eine Bewegung von elektrischen Strömen in Leitern handelt, wendet er die Lagrangeschen Differentialgleichungen an und gelangt schliefslich dahin anzunehmen, dafs die Elektrizität ein Bewegungszustand des Lichtäthers sei. Unter den wenigen Bedenken, die hiergegen sich geltend machen lassen, hebt der Vortragende die Thatsache hervor, dafs Gold für Licht durchlässig sei, während die Theorie für Leiter der Elektrizität Undurchsichtigkeit ergiebt.

Versammlung vom 17. Oktober 1885.

Von Herrn Franz Fischer wird der Gesellschaft eine Photographie von Gauss geschenkt, die nach einem in Göttingen im Privatbesitze befindlichen Ölgemälde hergestellt ist.

Die Gesellschaft beschliefst, Herrn Prof. Weierstrass zu seinem 70. Geburtstage durch ein Telegramm zu beglückwünschen.

Herr Dr. Hoppe hält den zweiten Teil seines Vortrags „Über die Prinzipien der Elektrodynamik", worüber in dem Berichte über die vorige Versammlung schon referiert ist.

Versammlung vom 14. November 1885.

Der Jahrverwalter macht die Mitteilung, dafs ihm von dem Präses der Oberschulbehörde, Herrn Bürgermeister Dr. Kirchenpauer, auf die seitens der mathematischen Gesellschaft erfolgte Eingabe brieflich die Anschaffung der ersten 17 Bände des Crelleschen Journals und der fehlenden ersten Bände der Mathematischen Annalen noch im Jahre 1885 oder anfangs 1886 zugesichert ist.

Im Anschlufs daran berichtet Herr Lazarus über eine Sitzung der Kommission für die Neuanschaffungen der Stadtbibliothek. Die Gesellschaft beschliefst, Herrn Dr. Schubert um Vervollständigung der Liste der für notwendig erachteten Anschaffungen mathematischer Werke zu bitten.

Im Oktober 1885 hat die Gesellschaft ihr ältestes hiesiges, ordentliches Mitglied, Herrn Mechaniker G. Repsold, durch den Tod verloren.

Durch den Fortgang des Mitjahrverwalters, Herrn Dr. Schrader, ist die Neuwahl eines Adjunkten nötig. Die Wahl fällt auf Herrn Ingenieur Reitz.

Herr Grimsehl wird als hiesiges, ordentliches Mitglied aufgenommen.

Herr Dr. Schubert zeigt eine Reihe von Bildnissen berühmter

Mathematiker aus der Zeit bis zum Jahre 1800 vor, welche einer Sammlung des Herrn Strack entnommen sind.

Herr Dr. Hoppe macht Mitteilungen über die neuesten Telephonuntersuchungen von Mercadier in Paris, aus denen hervorgeht, dafs es nicht elastische Schwingungen der Eisenplatte sind, welche inducierend auf die Induktionsrolle wirken, dafs vielmehr die Wirkungen durch intermolekulare Schwingungen der Platte hervorgerufen werden.

Zum Schlusse hält Herr Dr. Köpcke einen Vortrag „Über Differenzierbarkeit und Anschaulichkeit willkürlicher Funktionen", welcher in der Dezembersitzung fortgesetzt wird. Über denselben hat der Vortragende nachstehendes Referat gegeben:

I.

In Rekapitulation eines früheren Vortrages vom 9. Februar 1878 werden kurz die damals bekannten Beispiele willkürlicher Funktionen mit unanschaulichen Eigenschaften erwähnt: die überall unstetige Funktion Riemanns; die beiden Weierstrass'schen Funktionen, deren eine überall Maxima und Minima und dabei nirgend einen Differentialquotienten besitzt, deren andere stets wächst und in allen rationalen Argumentwerten ohne Differentialquotienten ist; endlich das eigene Beispiel des Vortragenden mit Symmetriepunkten in jedem Intervall. Auch an die Erweiterung des Begriffs des Differentialquotienten, dafs nämlich eine stetige Funktion überall einen Winkelraum von Tangenten besitzt, wird wiederum erinnert. Diese Erweiterung ist im gleichen Jahre 1878 durch Dini in „Fondamenti per la teorica delle Funzioni" veröffentlicht.

Der Vortragende hat lange Zeit versucht, die Unmöglichkeit einer differentiierbaren Funktion mit Maximis in jedem Intervalle nachzuweisen, da das Hankelsche (1870) Beispiel einer solchen an Fehlern im Beweise leidet. Paul du Bois-Reymond (1875) hält Funktionen dieser Art für unmöglich, ist aber nicht zu einem Beweise für diesen Glauben gelangt. Dem Vortragenden ist es dagegen geglückt, ein Beispiel dieser Art von willkürlichen Funktionen zu bilden.

Dieses Beispiel wird definiert und dann der Beweis skizziert, dafs die so entstehende Funktion

1) überall eindeutig definiert ist,
2) überall stetig ist,
3) überall einen Differentialquotienten und
4) in jedem Intervall Maxima besitzt.

Hierauf erörtert der Vortragende die Frage, was bei allen diesen Beispielen die Unmöglichkeit des Anschauens veranlassen mag? Will

man als Grund die Maxima, oder das Fehlen des Differentialquotienten oder die fortwährende Unstetigkeit eines vorhandenen Differentialquotienten geltend machen, so bringen stets diejenigen Beispiele in Verlegenheit, in denen der betreffende Grund nicht vorliegt. Der Vortragende macht darauf aufmerksam, dafs sich z. B. die Frage: „Ist das erste Integral der stets wachsenden Weierstrassschen Funktion anschaulich?“ gar nicht sofort entscheiden läfst und sucht dann die Behauptung zu stützen:

„Alle anschaulichen Kurven haben anschauliche Differential- und Integralkurven.“

II.

Das im vorigen Vortrage kurz behandelte Beispiel einer differentiierbaren Funktion mit Maximis in jedem Intervall wird ausführlich behandelt.

Eine gebrochene Linie mit den Eckpunkten

$$1)\ x = 0,\ y = 0;\ 2)\ x = \tfrac{1}{2},\ y = \tfrac{1}{2};\ 3)\ x = 1,\ y = 0$$

werde als Funktion mit $\mathfrak{G}(x)$ bezeichnet.

Eine zweite gebrochene Linie entstehe in folgender Weise:

Lege durch den Nullpunkt eine Gerade G_0 mit $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{10}$, durch den Punkt $x = \frac{1}{4}$ der Abscissenachse aber 6 Gerade

$$\text{mit } \frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{array}{cccccc} G_1 & G_3 & G_5 & G_7 & G_9 & G_{11} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{3}{10} & -\frac{5}{10} & -\frac{7}{10} & -\frac{9}{10} & -\frac{11}{10} \end{array}$$

Durch den Schnittpunkt $(G_0 G_3)$ von G_0 mit G_3 sei eine Parallele G_1' zu G_1 gelegt; dann durch $(G_1' G_5)$ eine Gerade $G_3' \parallel G_3$, durch $(G_3' G_7)$ ein $G_5' \parallel G_5$, endlich durch $(G_5' G_9)$ ein $G_7' \parallel G_7$ — dann bilden Teile der Linien $G_0\ G_1'\ G_3'\ G_5'\ G_7'\ G_{11}$ eine gebrochene Linie; zwischen $x = \frac{1}{4}$ und $x = \frac{1}{2}$ erstrecke sich ein zu ihr symmetrischer, dann aber negativ genommener Ast; zwischen $x = \frac{1}{2}$ und $x = 1$ sei die Funktion symmetrisch zu ihrem Bau zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$. Diese vollständige gebrochene Linie werde als Funktion mit $g_1(x)$ bezeichnet.“

Dann sei

$$\mathfrak{G}(x) + g_1(x) = \mathfrak{G}_1(x).$$

Zu jedem geradlinigen Teile von $\mathfrak{G}(x)$ mit einem $\frac{\Delta y}{\Delta x} = p$ wird dann

in ähnlicher Weise, wie $g_1(x)$ zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{2}$ gebaut ein Teil von $g_2(x)$ definiert; nur werden dafür die Werte

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{p}{10^2} \text{ und } -\frac{p}{10^2},\ -\frac{3p}{10^2},\ \cdots -\frac{101p}{10^2}$$

gewählt.

Dann sei

$$\mathfrak{G}_1(x) + g_2(x) = \mathfrak{G}_2(x).$$

Fährt man so fort, so dafs

$$\mathfrak{G}_n(x) = \mathfrak{G}(x) + g_1(x) + g_2(x) + \cdots + g_n(x)$$

ist, dann nähern sich die Funktionen $\mathfrak{G}_n(x)$ mit wachsendem n ei Grenzkurve $\mathfrak{G}(x)$ mit den behaupteten vier Eigenschaften.

Es wird zunächst eine analytische Darstellung von $\mathfrak{G}(x)$ dadu gegeben, dafs das Argument x als obere Grenze einer Summe v Strecken ξ aufgefafst wird, die von Ecke zu Ecke der Kurven $\mathfrak{G}_n$ gerechnet sind; dann wird $\mathfrak{G}(x)$ eine unendliche Reihe von endlicl Reihen, deren jede mit einem endlichen Produkte multipliziert ist

Aus den Beweisen sind folgende Punkte hervorzuheben.

$\frac{\Delta \mathfrak{G}_n(x)}{\Delta x}$ hat durch eine gewisse Strecke konstanten Wert v der Form eines Produktes $P_x(n)$ mit Faktoren von der Gestalt

$$\pm\left(1 + \frac{1}{10^n}\right),\ \pm\frac{1}{10^n},\ \pm\left(1 - \frac{m}{10^n}\right),$$

$$m \leq 10^n - 3.$$

Für jedes x ist die Reihe und die Reihenfolge der Faktoren eindeutig bestimmt. Es wird bewiesen, dafs die $P_x(n)$ mit wachsender für jedes x sich einem eindeutig definierten Werte $P(x)$ nähern, gleich nur für einzelne x das Produkt $P_x(n)$ für $n = \infty$ unbedi konvergent sein würde.

Es sei dann $\frac{\Delta \mathfrak{G}_n(x)}{\Delta x} = P_x(n)$, so lange $x + \Delta x \leq \xi_n$. Dann v aus den Definitionen die Ungleichheit abgeleitet:

$$P_x(n+1) - \frac{6 \cdot P_x(n)}{10^{n+1}} < \left(\frac{\Delta \mathfrak{G}_{n+1}(x)}{\Delta x}\right)_{x+\Delta x < \xi_n} \leq P_x(n) + \frac{P_x(n)}{10^{n+1}}$$

Dann wird n_1 so grofs gewählt, dafs für ein beliebig kleines ε

$$P(x) - \varepsilon < P_x(n_1 + m) \leq P(x) + \varepsilon$$

$$m \geq 1$$

Dann sei Δx so klein, dafs $x + \Delta x \leq \xi_{n_1}$, so wird bewiesen:

$$P(x) - 3\varepsilon < \frac{\Delta \mathfrak{G}(x)}{\Delta x} < P(x) + 3\varepsilon$$

Es kann daher $\mathfrak{G}(x)$ in x keinen Tangentenwinkelraum haben, sondern es ist

$$\frac{d\mathfrak{G}(x)}{dx} = P(x)$$

Der Vortragende macht besonders darauf aufmerksam, dafs diese Funktion also nicht das Integral ihres Differentialquotienten ist und dafs Dini in seinem schon citierten Werke von dieser Möglichkeit bereits redet — aber nur, weil er im Gegensatze zu du Bois-Reymond es für höchst wahrscheinlich hält, dafs Funktionen mit den Eigenschaften des vorgetragenen $\mathfrak{G}(x)$ möglich seien.

Versammlung vom 12. Dezember 1885.

Da Herr Reitz die Annahme der Wahl zum Adjunkten abgelehnt hat, so wird nochmals zur Wahl geschritten und nunmehr Herr Kapitän Koldewey gewählt, der die Wahl annimmt.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs der Vorstand Herrn Ingenieur Steinhaus zur 25jährigen Mitgliedschaft die Glückwünsche der Gesellschaft überbracht hat.

Die Herren Drs. Bolte und Luther werden als ordentliche, hiesige Mitglieder in die Gesellschaft aufgenommen.

Veranlafst durch eine Mitteilung des Herrn Kapitän Schück, beauftragt die Gesellschaft den Vorstand, an geeigneter Stelle in Altona die Überführung einer Statue des Astronomen Schumacher, der einst der Gesellschaft angehört hat, an einen passenden Ort anzuregen.

Die Geslschaft beschliefst, ein neues Heft „Mitteilungen“ herauszugeben.

Auf Anregung des Herrn Bubendey wird der Vorstand beauftragt die nötigen Schritte zu thun, um unsere Bibliothek mit derjenigen der patriotischen Gesellschaft zu vereinigen, um sie dadurch der Benutzung zugänglicher zu machen.

Zum Schlusse hält Herr Dr. Köpcke den zweiten Teil seines Vortrags „Über Differenzierbarkeit und Anschaulichkeit willkürlicher Funktionen“. Vergl. den Bericht über die Novemberversammlung.

Versammlung vom 9. Januar 1886.

Herr Dr. Böger hält einen Vortrag über die Aufgabe: „Durch fünf Punkte eine Kurve zweiter Ordnung zu legen“, worüber derselbe Nachstehendes berichtet:

Die mir bekannten Lösungen der Aufgabe:

Eine Kurve zweiter Ordnung zu zeichnen, welche durch den

Punkt P geht und in den Geraden g und h gegebene involutorische Punktreihen erzeugt,

unterscheiden verschiedene Fälle, jenachdem die Punktreihen g und h Doppelpunkte haben oder nicht. Es ist daher eine Konstruktion vielleicht nicht überflüssig, welche für alle Fälle gleichzeitig gilt. Eine solche allgemeine Lösung ermöglicht der folgende Satz:

Liegen zwei involutorische Elementargebilde ineinander, so entsprechen dem Elemente A die beiden A und $\mathfrak{A}$. Es läfst sich nun immer ein Element B, dem B und $\mathfrak{B}$ entsprechen mögen, so bestimmen, dafs $AB \cdot \mathsf{AB} \cdot \mathfrak{AB}$ eine Involution bilden. Die Gesamtheit der so definierten Elemente AB bildet in dem gemeinsamen Träger der gegebenen Elementargebilde ein drittes involutorische Gebilde[1]).

Mit Hülfe dieses Satzes ergiebt sich die folgende Konstruktion:

Dem Schnittpunkte $U = g \cdot h$ mögen in den involutorischen Punktreihen g und h die Punkte G und H entsprechen; die Verbindungslinie GH heifse u.

Durch Projektion der Punktreihen g und h von P aus erhält man in P zwei involutorische Strahlenbüschel, die nach dem Hülfssatze einen dritten involutorischen Strahlenbüschel erzeugen. Die letztere schneidet u in einer involutorischen Punktreihe. Wenn man dann diese von P und dem von P durch U und u harmonisch getrennten Punkte Q aus projiziert, so bilden die Schnittpunkte derjenigen Strahlen von P und Q, welche durch entsprechende Punkte von u gehen, die verlangte Kurve.[2])

Zum Schlusse hält der Jahrverwalter einen Vortrag „Über die Aufsuchung linearer und quadratischer Teiler ganzer Funktionen, die nur ganzzahlige Koefficienten enthalten". Es wird die Methode des Herrn Selivanoff im 4. und 5. Hefte des 13. Bandes des Bulletin de la Société mathématique de France entwickelt und an Beispielen erläutert. Dem neuen Verfahren kommt keine praktische Bedeutung für das Aufsuchen ganzzahliger Wurzeln numerischer Gleichungen zu, wohl aber ist es theoretisch interessant.

---

1) Vergl. H. Wiener, Rein geometrische Theorie der Darstellung binärer Formen durch Punktgruppen auf der Geraden, Art. 63.

2) Die oben angedeutete Konstruktion habe ich als Ausgangspunkt für eine Arbeit „Über Büschel und Netze von ebenen Polarsystemen zweiter Ordnung" genommen. Dem Leser, der wünschen sollte dieselbe kennen zu lernen, stelle ich gern ein Exemplar zur Verfügung.

Hamburg-Eimsbüttel, den 9. Januar 1886. Böger.

Versammlung vom 13. Februar 1886.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs er dem auswärtigen, ordentlichen Mitgliede, Herrn Prof. Dr. Ofterdinger in Ulm, zum 25jähr. Mitgliedsjubiläum die Glückwünsche der Gesellschaft dargebracht. In längerem Brief spricht Herr Ofterdinger seinen Dank aus.

Die Gesellschaft beschliefst, Herrn Ingenieur Hübbe, der 30 Jahre als thätiges Mitglied der Gesellschaft angehört hat, und jetzt wegen dauernder Krankheit seinen Austritt erklärt hat, zum Ehrenmitgliede zu ernennen.

Darauf spricht Herr Kapitän Koldewey „Über Kompafskonstruktionen", indem er historisch die Entwicklung in der Konstruktion des Kompasses an vorgelegten Modellen erläutert.

Zum Schlusse spricht Herr Dr. Schubert „Über neue Methoden richtige Rösselsprünge zu bilden", indem er namentlich die Methoden, der Franzosen Polignac, Laquière u. a. hervorhebt, woran sich einige Bemerkungen schliefsen über Speziallösungen der Aufgabe, die Anzahl sämtlicher Rösselsprünge für 64 Felder anzugeben.

Eingegangene Schriften.

Die Gesellschaft hielt wie bisher das „Archiv für Mathematik und Physik", empfing im Austausch die erschienenen Hefte von

Atti della Reale Accademia dei Lincei zu Rom, Bulletin de la Société mathématique de France, Jornal de Sciencias math. e astron. von Dr. Teixeira, American Journal of Mathematics.

Die folgenden Herren und Institute haben unserer Bibliothek eigene Schriften zugehen lassen, für welche die Gesellschaft ihnen zu besonderem Danke verpflichtet ist: Herr Prof. Bierens de Haan, Herr Prof. Cremona, Herr Prof. Harnack, Herr Kluck-Kluczycki, Herr Kapitän Koldewey, Herr Dr. Krüss, Herr Prof. Ofterdinger, Herr Prof. Peters, Herr Dr. Schubert, Herr Prof. Thiele, Herr Direktor Dr. Voller, Herr Prof. Weyer, Deutsche Seewarte, Statistisches Bureau des Hamburgischen Staats Circolo mathematico di Palermo.

Lösung des Charakteristiken-Problems für lineare Räume beliebiger Dimension.

(Von Hermann Schubert in Hamburg.)

Eine Kurve a-ter Ordnung und eine Fläche b-ter Ordnung schneiden sich bekanntlich in a mal b Punkten (Satz von Bézout); für den Punkt gelingt es also, die Zahl der gemeinsamen Elemente eines von ihm erzeugten einstufigen Systems (Kurve) S und eines von ihm erzeugten zweistufigen Systems (Fläche) S' durch zwei Zahlen auszudrücken, von denen die eine nur auf S, die andere nur auf S' Bezug nimmt, indem nämlich die eine Zahl angiebt, wieviel Punkte von S auf einer gegebenen Ebene liegen, und die andere Zahl angiebt, wieviel Punkte von S' auf einem gegebenen Strahle liegen. Auch für den Strahl gelingt es, die Zahl der gemeinsamen Strahlen eines einstufigen und eines dreistufigen Systems oder zweier zweistufiger Systeme durch Zahlen auszudrücken, von denen jede nur auf eins der gegebenen Systeme Bezug nimmt; so ist z. B. die Anzahl der gemeinsamen Strahlen zweier zweistufiger Strahlsysteme (Kongruenzen) S und S' gleich $\mu \cdot \mu' + \nu \cdot \nu'$,[1]) wo μ und μ' angeben, wieviel Strahlen von S bezw. von S' durch einen gegebenen Punkt gehen, und wo ν und ν' angeben, wieviel Strahlen von S bezw. von S' in einer gegebenen Ebene liegen.[2]) Verallgemeinert man nun die durch die Formel von Bézout oder die Formel von Halphen gelöste Aufgabe in zwei Richtungen, erstens dahin, dafs statt des dreidimensionalen linearen Raums ein n-dimensionaler linearer Raum zu Grunde gelegt wird, zweitens dahin, dafs statt des Punktes als eines nulldimensionalen Raums oder eines Strahls als eines eindimensionalen Raums ein linearer Raum beliebig hoher Dimension als Element der beiden gegebenen Systeme gedacht wird, so entsteht die Aufgabe, die Anzahl der

1) Diese Anzahl bestimmte zuerst Herr Halphen in den Comptes rendus vom Jahre 1872, pag. 41, dann mit Hilfe des Korrespondenz-Prinzips Herr Zeuthen in den Comptes rendus vom Jahre 1874. Eine sehr einfache Ableitung gab ich 1876 in den Math. Ann. Bd. 10, pag. 96; ebenda und auch auf pag. 62 meines „Kalküls der abzählenden Geometrie" (Leipzig, Teubner 1879) stellte ich ferner die Formeln für die Anzahl der gemeinsamen Strahlen zweier Strahlsysteme als spezielle Fälle der von mir abgeleiteten Strahlenpaar-Formeln hin.

2) Analoge Sätze gelten auch für die Ebene, den Strahlbüschel und andere aus einer endlichen Anzahl von Punkten, Strahlen und Ebenen bestehenden Gebilde. Solche Sätze stellte ich in den Gött. Nachr. vom Juli 1877 und im „Kalkül d. abz. Geom." § 39 bis § 42 auf.

gemeinsamen Elemente zweier gegebener, von einem k-dimensionalen linearen Raume erzeugter Systeme S und S' durch Zahlen (Gradzahlen) auszudrücken, von denen jede nur auf S oder auf S' Bezug nimmt. Natürlich mufs, damit die gesuchte Zahl endlich ist, die Stufensumme der beiden voneinander unabhängig gedachten Systeme S und S' gleich der Konstantenzahl des die Systeme erzeugenden Raums sein. Indem ich diese Aufgabe im Folgenden (§ 4, F. 4) löse, erledige ich für einen in einem n-dimensionalen linearen Raume liegenden k-dimensionalen linearen Raum das Problem, welches ich in den Gött. Nachr. vom Juli 1877 und in § 37 meines „Kalküls d. abz. Geom." als Charakteristikenproblem eines Gebildes bezeichnet habe. Dort nannte ich nämlich Charakteristikenproblem für ein Gebilde Γ, das die Konstantenzahl c hat, die Aufgabe, die Zahl der gemeinsamen Elemente eines s-stufigen Systems S und eines von ihm unabhängigen $(c-s)$-stufigen Systems S' solcher Gebilde durch Zahlen (Gradzahlen) auszudrücken, von denen jede angiebt, wieviel Elemente von S bezw. von S' gewisse Bedingungen (Grundbedingungen) erfüllen.[1])

In dem uns vorstellbaren Raume hat jedes Punktsystem (Kurve oder Fläche), ebenso auch jedes Ebenensystem, nur eine einzige Gradzahl. Von den Strahlsystemen hat das einstufige (Linienfläche) und das dreistufige (Linienkomplex) je eine Gradzahl, das zweistufige Strahlsystem (Linienkongruenz) aber hat zwei verschieden definierte Gradzahlen. Legt man allgemein einen n-dimensionalen linearen Raum zu Grunde, so hat zwar jedes von einem Punkte erzeugte System nur eine Gradzahl, für die Systeme aber, die von einem linearen Raume von höherer als der nullten und niederer als der $(n-1)$-ten Dimension erzeugt werden, wird es notwendig, viele Gradzahlen zu definieren. Da ich den wesentlichen Inhalt der gegenwärtigen Abhandlung schon besafs, als ich meine erste Abhandlung über n-dimensionale Geometrie[2]) veröffentlichte, so konnte ich schon damals die Definitionen der die sämtlichen Gradzahlen ergebenden Grundbedingungen aufstellen und die Veröffentlichung der hier (§ 4) folgenden Resultate versprechen. Die in jener Abhandlung für die Grundbedingungen eingeführten Symbole,[3]) welche den Gang der folgenden

1) Diese Definition hat neuerdings auch Herr Study in seiner Habilitationsschrift über das Charakteristikenproblem der Kegelschnitte (Leipzig 1885) adoptiert.

2) Diese Abhandlung erschien in den Math. Ann. Bd. 26, S. 26 bis 51 unter dem Titel: „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raums." Sie soll im Folgenden kurz „Fund. Anz." genannt werden.

3) Vergl. „Fund. Anz." S. 30.

Untersuchung und das Verständnis der daraus entspringenden Resultate wesentlich erleichtern, behalte ich hier bei, und wiederhole ihre Definition in § 1.

§ 1.

Bezeichnungen.

I) Das Symbol $[a]$ bedeutet immer einen a-dimensionalen linearen Raum, der in dem zu Grunde gelegten n-dimensionalen Raume liegt; also $[0]$ einen Punkt, $[1]$ einen Strahl, $[2]$ eine Ebene u. s. w., endlich $[n]$ den n-dimensionalen linearen Raum, in dem alle vorkommenden Gebilde gedacht werden.

II) Das Symbol $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ setzt allgemein k einen $[k]$ voraus, dafs ein $[a_0]$, ein $[a_1]$, ein $[a_2]$ u. s. w. bis zu einem $[a_k]$ derartig gegeben sind, dafs der $[a_0]$ in dem $[a_1]$ liegt, der $[a_1]$ in dem $[a_2]$ liegt, und überhaupt jeder $[a_i]$ in dem $[a_{i+1}]$ liegt, und bezeichnet dann die Gesamtheit aller derjenigen $[k]$, welche mit dem $[a_0]$ einen Punkt, mit dem $[a_1]$ einen Strahl, und überhaupt mit dem $[a_i]$ einen $[i]$ gemeinsam haben. Hiernach ist ein Symbol $[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ sinnlos, wenn nicht

$$0 \leqq a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_{k-1} < a_k \leqq n$$

ist. Da aber auch alle mit diesen Ungleichungen im Einklang befindlichen Symbole Sinn haben, so giebt es im ganzen $\frac{(n+1)!}{(n-k)!\,(k+1)!}$ derartiger Symbole.[1]) Jede durch ein Symbol von der Form $[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ dargestellte Gesamtheit soll ein Grundgebilde des $[k]$ heifsen. Die Stufe s jedes von einem $[k]$ erzeugten Grundgebildes ergiebt sich aus seinem Symbole $[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ durch die Formel:

$$(1) \qquad s = a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k - \tfrac{1}{2} k\,(k+1).^2)$$

Hiernach bedeutet beispielsweise das Symbol:

1) $[d]$ die Gesamtheit der Punkte eines d-dimensionalen linearen Raums; Stufe: d;

2) $[0, 2]$ die Gesamtheit der Strahlen eines Strahlbüschels; Stufe: 2;

3) $[0, n]$ die Gesamtheit der Strahlen, welche, in dem $[n]$ liegend, durch einen Punkt gehen; Stufe: $n - 1$;

4) $[2, 3]$ die Gesamtheit aller Strahlen eines dreidimensionalen linearen Raums; Stufe: 4;

---

1) Vgl. Fund. Anz. S. 32.

2) Vgl. Fund. Anz. S. 33.

5) $[n-1, n]$ die Gesamtheit aller Strahlen des $[n]$; Stufe: $(n-1)$; es ist also $2(n-1)$ die Konstantenzahl des Strahls im $[n]$;

6) $[0, 1, n]$ die Gesamtheit der Ebenen, welche, im $[n]$ liegend, durch einen Strahl gehen; Stufe: $n-2$;

7) $[0, n-1, n]$ die Gesamtheit der Ebenen, welche, im $[n]$ liegend, durch einen Punkt gehen; Stufe: $2n-4$;

8) $[0, 2, n]$ die Gesamtheit der Ebenen, welche, im $[n]$ liegend, durch die ∞^1 Strahlen eines Strahlbüschels gehen; Stufe: $n-1$;

9) $[1, 2, 3]$ die Gesamtheit aller in einem $[3]$ liegenden Ebenen; Stufe: 3;

10) $[n-2, n-1, n]$ die Gesamtheit aller Ebenen des $[n]$; Stufe: $3(n-2)$; es ist also $3(n-2)$ die Konstantenzahl der Ebene in $[n]$;

11) $[1, 2, 4, 5]$ die Gesamtheit derjenigen $[3]$, welche, in einem $[5]$ liegend, eine in dem $[5]$ gelegene Ebene in einem Strahle zu schneiden vermögen; Stufe: 6;

12) $[n-k, n-k+1, n-k+2, \ldots, n-1, n]$ die Gesamtheit aller $[k]$ des $[n]$; Stufe: $(k+1)(n-k)$; es ist also $(k+1)(n-k)$ die Konstantenzahl des $[k]$ im $[n]$.

III) Das Symbol $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ bedeutet die Bedingung, welche verlangt, dafs ein $[k]$ einem gegebenen Grundgebilde angehört, dessen Symbol (vgl. II) $[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ ist. Jede solche Bedingung heifst Grundbedingung des $[k]$. Die Dimension d der Grundbedingung $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ ergiebt sich aus der Stufe s des zugehörigen Grundgebildes und der Konstantenzahl c des $[k]$ (vgl. II, Nr. 12) durch die Beziehung $d = c - s$, aus welcher man mit Hilfe von Formel (1) erhält:

$$d = (k+1)\,n - \frac{1}{2}k(k+1) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k).$$

Hiernach bedeutet beispielsweise das Symbol:

1) (d) die $(n-d)$-fache Bedingung, dafs ein Punkt auf einem gegebenen $[d]$ liegen soll;

2) $(0, n)$ die $(n-1)$-fache Bedingung, dafs ein Strahl, in dem $[n]$ liegend, durch einen gegebenen Punkt gehen soll;

3) $(a-1, a)$ die $(2n-2a)$-fache Bedingung, dafs ein Strahl in einem gegebenen $[a]$ liegen soll;

4) $(0, a, b)$ die $(3n-3-a-b)$-fache Bedingung, dafs eine Ebene in einem gegebenen $[b]$ liegen und dabei einen Strahl besitzen soll, der ganz einem in dem $[b]$ gelegenen $[a]$ angehört und zugleich durch einen in diesem $[a]$ liegenden Punkt geht;

5) $(0, 3, 4, \ldots, k+1, k+2)$ die $(kn + n - k^2 - 3k)$-fache Bedingung, dafs ein $[k]$ in einem gegebenen $[k+2]$ liegen und dabei durch einen in diesem $[k+2]$ gelegenen Punkt gehen soll.

IV) Das Symbol $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ soll in Bezug auf ein vorliegendes, von einem $[k]$ erzeugtes System S, dessen Stufe gleich $(k+1)n - \frac{1}{2}k(k+1) - (a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k)$ ist, zugleich die endliche Anzahl (Gradzahl) derjenigen $[k]$ bezeichnen, welche sowohl dem Systeme S angehören wie auch die gegebene Grundbedingung $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ erfüllen.

Hiernach bedeutet beispielsweise das Symbol:

1) $(n-2)$ in Bezug auf ein vorliegendes zweistufiges Punktsystem (Fläche) die Zahl der Punkte, die dasselbe mit einem gegebenen $[n-2]$ gemein hat; (Grad der Fläche);

2) $(n-2, n-1)$ in Bezug auf ein vorliegendes zweistufiges Strahlsystem die Zahl der Strahlen, die dasselbe mit einem gegebenen $[n-1]$ gemein hat;

3) $(0, 1, n)$ in Bezug auf ein vorliegendes $(2n-4)$-stufiges Ebenensystem die Zahl derjenigen Ebenen dieses Systems, welche einen gegebenen Strahl enthalten;

4) $(n-k-1, n-k+1, n-k+2, \ldots, n-1, n)$ in Bezug auf ein vorliegendes einstufiges System von linearen Räumen $[k]$ die Zahl derjenigen $[k]$ dieses Systems, welche mit einem gegebenen $[n-k-1]$ einen Punkt gemein haben.

V) Von den Grundgebilden treten in der folgenden Untersuchung diejenigen besonderen Grundgebilde mehrfach auf, welche ein Symbol von der Form $[0, 1, 2, \ldots, b, a_{b+1}, a_{b+2}, \ldots a_{k-1}, a_k]$ haben. Jedes derartige Grundgebilde soll ein Büschel von Räumen $[k]$, und der $[b]$, durch welchen alle $[k]$ eines Büschels hindurchgehen, soll der Träger dieses Büschels heifsen. Beispielsweise ist ein Grundgebilde mit dem Symbole $[0, 1, 2, 5, 7]$ ein $[4]$-Büschel, dessen Träger eine Ebene ist. Der Strahlbüschel der gewöhnlichen Geometrie hat also einen Punkt, der Ebenenbüschel einen Strahl als Träger.

VI) Büschel-System soll eine Gesamtheit von Büscheln mit dem Symbole $[0, 1, 2, \ldots, b, a_{b+1}, a_{b+2}, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ dann heifsen, wenn die Räume $[a_k]$, $[a_{k-1}]$, ... bis $[a_{b+1}]$ für alle Büschel dieselben sind, wenn aber ihre Räume $[b]$ verschieden voneinander sind, und ein System von Räumen $[b]$ bilden. Das letztgenannte System soll das Grundsystem des Büschelsystems heifsen. So bildet z. B. in unserm Raume die Gesamtheit aller Strahlen, die eine Raumkurve einpunktig treffen, ein Büschelsystem, dessen Büschel das

Symbol [0,3] haben, also Punkte als Träger besitzen, und dessen Grundsystem die genannte Raumkurve ist.

VII) Wenn die sämtlichen linearen Räume $[k]$, welche ein System zusammensetzen, einen und denselben festen Punkt enthalten, so nennen wir das System einen Kegel und den festen Punkt den Scheitel des Kegels. Ein s-stufiger Strahlenkegel mit dem Scheitel P wird also von ∞^s durch den Punkt gehenden Strahlen gebildet, und ein s-stufiger $[k]$-Kegel mit dem Scheitel P besteht aus ∞^s durch den Punkt P gehenden $[k]$.

§ 2.

Die zentrische Kollineation im n-dimensionalen linearen Raume.

Die Abbildung, welche in unserm dreidimensionalen Raume durch die zentrische Kollineation hervorgerufen wird, läfst sich auf den $[n]$ in folgender Weise übertragen. Man nehme einen festen Punkt P als Kollineationszentrum und einen festen $(n-1)$-dimensionalen linearen Raum E als Kollineationsraum an und bestimme das Bild A' zu jedem Punkt A dadurch, dafs man den Verbindungsstrahl PA zieht und auf PA denjenigen Punkt A' konstruiert, welcher der Gleichung

$$\frac{PA}{PA'} : \frac{E_a A}{E_a A'} = \lambda$$

genügt, wo E_a den Schnittpunkt des Strahls PA mit E bezeichnet und λ eine beliebige Zahl (charakteristisches Doppelverhältnis) ist. Der Kürze wegen nennen wir den so bestimmten Punkt A' das λ-Bild des Punktes A in Bezug auf P und E. Es ergiebt sich nun, dafs die λ-Bilder aller Punkte eines Strahls wiederum einen Strahl bilden, und dafs überhaupt die λ-Bilder aller Punkte eines $[k]$ wiederum einen $[k]$ bilden, der mit dem ursprünglichen $[k]$ und mit dem E einen und denselben $[k-1]$ gemein hat. Demgemäfs nennen wir auch denjenigen $[k]$, dessen sämtliche Punkte die λ-Bilder der sämtlichen Punkte eines vorliegenden $[k]$ sind, das λ-Bild des letzteren. Endlich soll λ-Bild eines s-stufigen Systems S von Räumen $[k]$ dasjenige s-stufige System heifsen, welches von den λ-Bildern aller $[k]$ des Systems S gebildet wird. Mit Benutzung dieser Definition kann man das Prinzip, aus welchem im Folgenden die gesuchten allgemeinen Charakteristikenformeln hervorgehen, kurz so aussprechen: Die endliche Anzahl derjenigen Räume $[k]$, welche zwei Systemen von Räumen $[k]$ gemeinsam sind, wird unendlich oder bleibt erhalten, wenn man das eine System durch ein beliebiges

λ-Bild desselben ersetzt. Es ist dieser Satz ein spezieller Fa der n-dimensionalen Verallgemeinerung der in § 4 meines Kalk. abz. Geom. mit III bezeichneten Form des Prinzips von der Erhaltun der Anzahl. Wenn wir nun bei der oben erörterten zentrisch-kollineare Transformation das charakteristische Doppelverhältnis λ speziell gleic Null setzen, so erhalten wir aus den λ-Bildern Nullbilder, übe deren Verhalten die Definition von λ folgendes ergiebt: Wenn ei Raum $[a]$ das feste Zentrum P der Kollineation nicht en hält, so liegt das Nullbild von $[a]$ in dem festen Koll neationsraum E; wenn aber ein Raum $[a]$ den Punkt P en hält, so kann als Nullbild von $[a]$ jeder $[a]$ angesehen werde welcher durch den $[a-1]$ hindurchgeht, der dem E un dem ursprünglichen $[a]$ gemeinsam ist. Hierdurch sind wir den Stand gesetzt, das Nullbild eines beliebigen s-stufigen Systems von linearen Räumen $[k]$ beschreiben zu können, wobei wir w immer voraussetzen, dafs das gewählte Kollineationszentrum P u der gewählte $(n-1)$-dimensionale Kollineationsraum E keine b sondere Lage zu dem abzubildenden Systeme S haben. Dann ist falls $s < n-k$ ist, nicht möglich, dafs durch den Punkt P Räu des Systems S hindurchgehen, und man erhält also als Nullbild von S nichts weiter als ein in E liegendes s-stufiges System. Ist ab $s \geqq n-k$, so wird der Punkt P Scheitel eines $(s-n+k)$-stufig Kegels (vgl. § 1, VII) von Räumen $[k]$, die sämtlich dem Syste S angehören. Dieser Kegel schneidet den E in einem $(s-n+$ stufigen Systeme von $[k-1]$, und alle $[k]$, die von allen $[k-$ des ebengenannten Systems ausgehen und sonst beliebig im $[n]$ lieg bilden ein $(s-n+k+n-k)$-stufiges, also s-stufiges, dem Nullbilde von S angehöriges System von Räumen $[k]$. Falls also $s \geqq n-$ ist, zerfällt das Nullbild von S in zwei Systeme. Das eine ist ganz in E, also in einem $[n-1]$, gelegenes s-stufiges System das andere ist ein im $[n]$ gelegenes Büschelsystem B_1 (vgl. § 1, V dessen Büschel $(k-1)$-dimensionale Träger haben, die ein in liegendes $(s-n+k)$-stufiges System C_1, das Grundsystem von bilden. Beispielsweise setzen wir speziell $k=1$, $n=3$, d. h. denken uns ein in unserm dreidimensionalen Raume liegendes Syst von Strahlen. Ist dasselbe einstufig, so besteht sein Nullbild den Tangenten einer ebenen Kurve. Ist das System aber zweistu so zerfällt sein Nullbild in zwei Teile, erstens in die Gesamtheit in der Kollineationsebene liegenden Strahlen, zweitens in μ Strahl bündel, deren Scheitel die Schnittpunkte dieser Ebene mit den μ du das Kollineationszentrum gehenden Strahlen des Systems sind. M

bemerke, dafs die Zahl dieser Strahlenbündel gleich der Ordnung des Systems sein mufs, und dafs jeder Strahl der Kollineationsebene ν mal ein Strahl des Nullbildes sein mufs, wenn ν die Klasse des Systems ist, weil dann die Verbindungsebene jedes Strahls mit P ν Strahlen des Systems enthält.

Sowie eben für $k = 1$, $n = 3$, $s = 2$ aus den Gradzahlen des ursprünglichen Systems die charakteristischen Zahlen des Nullbildes erkannt wurden, so lassen sich auch allgemein die auf das Nullbild bezüglichen Zahlen aus den Gradzahlen des ursprünglichen Systems ersehen. Es liefern nämlich diejenigen Gradzahlen $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ eines Systems S, bei denen $a_0 > 0$ ist, die Gradzahlen des oben mit A_1 bezeichneten Teils des Nullbildes, und diejenigen Gradzahlen, bei denen $a_0 = 0$ ist, die Gradzahlen des das Büschelsystem B_1 erzeugenden Grundsystems C_1. Um dies zu zeigen, nehmen wir an, dafs es in S x Räume $[k]$ giebt, welche die Grundbedingung $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ erfüllen, wo (§ 1, III) die Summe $a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k$ gleich $(k+1)n - \frac{1}{2}k(k+1) - s$ sein mufs, wenn wieder s die Stufe des Systems S bedeutet. Ist nun $a_0 > 0$, so lege man ein Grundgebilde $[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ so, dafs der Punkt P auf den diesem Grundgebilde angehörigen Raum $[a_0]$ fällt, und dafs demzufolge auch die übrigen das Grundgebilde konstituierenden Räume $[a_1]$, $[a_2]$, $\ldots$, $[a_k]$ durch P gehen. Dann fallen die Nullbilder der x Räume $[k]$, welche dem Systeme S und dem Grundgebilde $[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k]$ zugleich angehören, in den Kollineationsraum E und sind dort diejenigen Räume, welche dem oben mit A_1 bezeichneten Systeme und dem Schnitt des Grundgebildes mit E, also einem Grundgebilde mit dem Symbole $[a_0 - 1, a_1 - 1, \ldots, a_k - 1]$ gemeinsam sind. Demnach ist, falls $a_0 > 0$ ist, die Gradzahl $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ des Systems S gleich der Gradzahl $(a_0 - 1, a_1 - 1, \ldots, a_{k-1} - 1, a_k - 1)$ des Systems A_1. Ist ferner $a_0 = 0$, was nur der Fall sein kann, wenn $s \leqq n - k$ ist, so lege man den Punkt $[0]$ eines Grundgebildes $[0, a_1, a_2, \ldots, a_k]$ in den Punkt P. Dann mufs, wenn die Gradzahl $(0, a_1, a_2, \ldots, a_k)$ des Systems S gleich y ist, y auch die Zahl der Räume $[k]$ sein, welche dem erwähnten Grundgebilde und dem Systeme S zugleich angehören. Es giebt also auch y Räume, welche dem oben mit C_1 bezeichneten, in E gelegenen Systeme und dem Schnitt des Grundgebildes mit E, also einem Grundgebilde mit dem Symbole $[a_1 - 1, a_2 - 1, \ldots, a_{k-1} - 1, a_k - 1]$ gemeinsam sind. Somit sind sämtliche Gradzahlen des Systems C_1 ebensowohl wie die des Systems A_1 durch die sämtlichen Gradzahlen des ursprünglichen Systems gegeben,

und zwar so, wie der folgende Satz ausspricht: Jede Gradzahl (a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k) eines s-stufigen Systems S von Räumen [k] stimmt, falls $a_0 > 0$ ist, mit der Gradzahl ($a_0 - 1$, $a_1 - 1$, .. $a_k - 1$) des seinem Nullbilde angehörigen, ganz in dem $(n-1)$ dimensionalen Kollineationsraume gelegenen, s-stufige Systems A_1 von Räumen [k] überein; dagegen stimmt jed Gradzahl (0, a_1, a_2, ..., a_{k-1}, a_k) des Systems S mit der Grad zahl ($a_1 - 1$, $a_2 - 1$, ..., $a_k - 1$) desjenigen $(s - n + k)$-stufige Systems C_1 von Räumen [k—1] überein, welches Grundsyste zu dem Büschelsysteme B_1 ist, das mit A_1 zusammen da ganze Nullbild S_1 von S darstellt; das System A_1 oder B ist als nicht vorhanden anzusehen, falls die Stufe s de Systems S verursacht, dafs jedes Symbol (a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k, wo $a_0 > 0$ ist, sinnlos wird, bezw., dafs jedes Symbol, w $a_0 = 0$ ist, sinnlos wird.

§ 3.

Transformation eines beliebigen Systems in ein nur aus Grundgebilden bestehendes System.

Die in § 2 besprochene, auf der zentrischen Kollineation fü $\lambda = 0$ beruhende Transformation nehmen wir jetzt mehrere Mal nacheinander vor. Hat man in Bezug auf einen $(n-1)$-dimensio nalen Kollineationsraum E_1 das Nullbild S_1 eines s-stufigen Systems bestimmt, so nehme man nun in E_1 einen Punkt als Kollineations zentrum, sowie beliebig im [n] einen neuen $(n-1)$-dimensionalen Kolli neationsraum, der den E_1 in einem $(n-2)$-dimensionalen Raume E schneidet und bestimme nunmehr das Nullbild S_2 von S_1, das wir zweite Nullbild von S nennen wollen. In S_2 kann vorhanden sein: erstens ei von dem A_1 des S_1 herrührendes, in E_2 liegendes, s-stufiges System zweitens ein gleichfalls von dem A_1 des S_1 herrührendes, in E liegendes, s-stufiges Büschelsystem, dessen $(k-1)$-dimensionale Träge ein in E_2 liegendes $(s - n + k + 1)$-stufiges System bilden, dritten ein von dem B_1 des S_1 herrührendes, im [n] liegendes, s-stufige Büschelsystem, dessen $(k-1)$-dimensionale Träger ein $(s - n + k)$ stufiges System bilden, viertens ein von dem B_1 des S_1 herrühren des, im [n] liegendes, s-stufiges Büschelsystem mit $(k-2)$-dimensio nalen Trägern, die ein in E_2 liegendes $(s - 2n + 2k)$-stufiges Syste bilden. Aus dem am Schlufs von § 2 ausgesprochenen Satze ergieb sich ferner: erstens, wie die Gradzahlen des erstgenannten System aus denjenigen Gradzahlen (a_0, a_1, ..., a_{k-1}, a_k) des Systems S her

vorgehen, bei denen $a_0 > 1$ ist, zweitens, wie die Gradzahlen des das zweitgenannte System erzeugenden $(s - n + k + 1)$-stufigen Grundsystems aus denjenigen Gradzahlen von S hervorgehen, bei denen $a_0 = 1$ ist, drittens, wie die Gradzahlen des das drittgenannte System erzeugenden $(s - n + k)$-stufigen Grundsystems aus denjenigen Gradzahlen von S hervorgehen, bei denen $a_0 = 0$ und zugleich $a_1 > 1$ ist, viertens wie die Gradzahlen des das viertgenannte System erzeugenden $(s - 2n + 2k)$-stufigen Grundsystems aus denjenigen Gradzahlen hervorgehen, bei denen $a_0 = 0$ und zugleich $a_1 = 1$ ist. In derselben Weise kann man vom zweiten Nullbilde zum dritten Nullbilde, vom dritten zum vierten, u. s. w. gelangen. Setzt man diese Transformationsweise hinreichend weit fort, so mufs man schliefslich auf ein Nullbild kommen, das aus einer endlichen Anzahl von Grundgebilden besteht, von denen jedes so oft zu rechnen ist, wie eine gewisse Gradzahl des ursprünglichen s-stufigen Systems S angiebt. Um dieses zu verdeutlichen, nehmen wir an, dafs für das System S die durch das Symbol $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ definierte Gradzahl gleich x sei, d. h., dafs es in S x Räume $[k]$ gebe, welche die beliebig gegebene Grundbedingung $(a_0, a_1, \ldots, a_k)$ erfüllen, wo wegen der Formel (2) in § 1:

$$(3) \quad a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k = (k+1)n - \tfrac{1}{2}k(k+1) - s$$

sein mufs. Dann wird das erste Nullbild S_1 von S ein in einem $[n-1]$ liegendes, s-stufiges System von Räumen $[k]$ enthalten müssen, dessen Gradzahl $(a_0 - 1, a_1 - 1, \ldots, a_{k-1} - 1, a_k - 1)$ auch gleich x ist. Denkt man sich die Transformation weiter fortgesetzt, so erkennt man, dafs das a_0-te Nullbild ein in einem $[n - a_0]$ liegendes s-stufiges System von Räumen $[k]$ enthalten mufs, dessen Gradzahl $(0, a_1 - a_0, a_2 - a_0, \ldots, a_{k-1} - a_0, a_k - a_0)$ gleich x ist. Nunmehr sind wir, weil das Symbol dieser Gradzahl mit 0 beginnt, zu einem Nullbilde gelangt, das einen $[k]$-Kegel enthält, dessen Scheitel das neue Kollineationszentrum ist, und dessen eine Gradzahl x ist. Daher mufs das nächste, also das $(a_0 + 1)$-te Nullbild, ein System von Grundgebilden mit dem Symbole $[0, 1, 2, \ldots, k-1, n - a_0]$ enthalten und die $(k-1)$-dimensionalen Träger dieser Grundgebilde müssen ein $(s - n + a_0 + k)$-stufiges System bilden, dessen Gradzahl $(a_1 - a_0 - 1, a_2 - a_0 - 1, \ldots, a_k - a_0 - 1)$ gleich x ist. Wir gehen nun zur Betrachtung des $(a_1 - a_0 - 1)$-ten Nullbildes des letztgenannten $(a_0 + 1)$-ten Nullbildes über. Dieses Nullbild, das a_1-te des ursprünglichen Systems S, mufs ein System von Grundgebilden mit dem Symbole $[0, 1, 2, \ldots, k-1, n - a_0]$ enthalten, deren $[k-1]$-dimensionale

Träger ein in einem $[n - a_1]$ liegendes $(s - n + a_0 + k)$-stufiges System bilden, dessen Gradzahl $(0, a_2 - a_1, a_3 - a_1, \ldots, a_k - a_1)$ gleich x ist. Da das Symbol dieser Gradzahl mit 0 beginnt, also jedes neue Kollineationszentrum Scheitel eines diesem a_1-ten Nullbilde angehörigen $[k - 1]$-Kegels wird, so mufs das $(a_1 + 1)$-te Nullbild des Systems S ein System von Grundgebilden mit dem Symbole $[0, 1, 2, \ldots k - 2, n - a_1, n - a_0]$ enthalten, und die $(k - 2)$-dimensionalen Träger dieser Grundgebilde müssen ein $(s - 2n + 2k - 1 + a_0 + a_1)$-stufiges System bilden, dessen Gradzahl $(a_2 - a_1 - 1, a_3 - a_1 - 1, \ldots, a_k - a_1 - 1)$ gleich x ist. So weiter zum a_2-ten, a_3-ten u. s. w. Nullbilde übergehend, erkennt man, dafs das a_k-te Nullbild ein System von Grundgebilden mit dem Symbole $[0, n - a_{k-1}, n - a_{k-2}, \ldots n - a_1, n - a_0]$ enthalten mufs, deren nulldimensionale Träger (Punkte) ein in einem $[n - a_k]$ liegendes $(s - kn + \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + a_0 + a_1 + \ldots + a_{k-1})$-stufiges, d. h. wegen Formel (3) $(n - a_k)$-stufiges System bilden, dessen Gradzahl (0) gleich x ist. Nun bedeutet aber ein in einem $[n - a_k]$ liegendes, $(n - a_k)$-stufiges Punktsystem nichts anderes als die Gesamtheit aller Punkte des $[n - a_k]$, und, wenn die Gradzahl (0) dieses Punktsystems gleich x ist, so bedeutet dies, dafs man sich in jedem Punkte des $[n - a_k]$ x Punkte zu denken hat. Hieraus folgt, dafs das zuletzt erwähnte System von Grundgebilden selbst ein Grundgebilde ist, dessen Symbol

$$[n - a_k,\ n - a_{k-1},\ \ldots,\ n - a_1,\ n - a_0]$$

heifst und dessen Multiplizität gleich x ist. Hiernach können wir den Satz aussprechen:

Wenn x die Gradzahl $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ eines Systems S von k-dimensionalen linearen Räumen ist, so enthält sein a_k-tes Nullbild ein Grundgebilde $[n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0]$, dessen Multiplizität x ist.

Was eben für eine beliebige Gradzahl bewiesen ist, gilt natürlich für jede denkbare Gradzahl des Systems S. Es wird also z. B. die Gradzahl $(b_0, b_1, \ldots, b_k)$ des Systems S in seinem b_k-ten Nullbilde ein Grundgebilde hervorrufen, welches das Symbol $[n - b_k, n - b_{k-1}, \ldots, n - b_1, n - b_0]$ hat, und dessen Multiplizität gleich jener Gradzahl ist. Wenn nun $b_k < a_k$ ist, so wird das b_k-te Nullbild zwar das Grundgebilde $[n - b_k, n - b_{k-1}, \ldots, n - b_1, n - b_0]$, aber noch nicht das Grundgebilde $[n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0]$ enthalten, sondern statt dessen ein System, aus welchem nach $a_k - b_k$ Nullbild-Transformationen ein dieses Grundgebilde enthaltende System hervorgehen mufs. Da bei diesen $a_k - b_k$ Transformationen das

Grundgebilde $[n - b_k, n - b_{k-1}, \ldots, n - b_1, n - b_0]$ in seiner Zusammensetzung und in seiner Multiplizität unverändert erhalten bleibt, so muſs, falls $b_k < a_k$ ist, das a_k-te Nullbild beide Grundgebilde enthalten. Um daher zu einem Nullbilde eines Systems S zu gelangen, das nur noch Grundgebilde enthält, hat man die Transformationen bis zum p_k-ten Nullbilde fortzusetzen, wo p_k die gröfste unter den Zahlen ist, welche in den Symbolen aller denkbaren Gradzahlen von S am Schluſs stehen. Da jedes der in diesem letzten Nullbilde G liegenden Grundgebilde aus einer Gradzahl des ursprünglichen Systems S hervorgeht, und da umgekehrt auch jede Gradzahl von S bei hinreichend lange fortgesetzten Transformationen schliefslich ein Grundgebilde hervorruft, so können wir das Resultat unserer Untersuchung aussprechen wie folgt:

Jedes s-stufige System S von k-dimensionalen linearen Räumen geht durch wiederholte, auf zentrischer Kollineation mit dem Doppelverhältnis null beruhende Transformationen schliefslich in ein s-stufiges System G über, das aus sovielen s-stufigen Grundgebilden besteht, als das System S Gradzahlen besitzt, und zwar ist jeder Gradzahl ein Grundgebilde in der Weise zugeordnet, dass, wenn $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ eine Gradzahl ist, das zugeordnete Grundgebilde durch das Symbol $[n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0]$ definiert wird und so oft zu rechnen ist, wie die Gradzahl angiebt.

Die genannten Grundgebilde sind in ihrer Lage nicht voneinander unabhängig, sondern es liegen in gewisser Weise von den die Grundgebilde konstituierenden linearen Räumen die niederer Dimension in denen höherer Dimension. Da diese Inzidenz für die Auffindung der Charakteristikenformeln ohne Bedeutung ist, so beschränke ich mich hier darauf, nur für den Strahl das letzte Nullbild eines Systems genauer zu beschreiben. Ein s-stufiges Strahlsystem habe die Gradzahlen $(n - s - 1, n)$, $(n - s, n - 1)$, $(n - s + 1, n - 2)$, ..., bis $\left(n - \frac{1}{2}s - 1, n - \frac{1}{2}s\right)$, wenn s gerade ist, und bis $\left(n - \frac{1}{2}s - \frac{3}{2}, n - \frac{1}{2}s + \frac{1}{2}\right)$, wenn s ungerade ist. Dann besteht das letzte Nullbild aus den Grundgebilden $[0, s + 1]$, $[1, s]$, $[2, s - 1]$, ..., bis $\left[\frac{1}{2}s, \frac{1}{2}s + 1\right]$, wenn s gerade ist, und bis $\left[\frac{1}{2}s - \frac{1}{2}, \frac{1}{2}s + \frac{3}{2}\right]$, wenn s ungerade ist, und zwar derartig, dass die Multiplizität jedes durch $[i, s + 1 - i]$ bezeichneten Grundgebildes gleich der mit $(n - s - 1 + i, n - i)$ bezeichneten Gradzahl ist. Was nun die Räume anbetrifft,

welche jene Grundgebilde zusammensetzen, so giebt es deren $s+2$, wenn s gerade ist, und $s+1$, wenn s ungerade ist, wobei aber noch vorausgesetzt ist, daſs $s \gtrless n-1$ bleibt. Ist s gerade, so kommt bei diesen Räumen jede Dimension von der nullten bis $(s+1)$-ten einmal vor. Ist s ungerade, so kommt mit Ausnahme der Dimension $\frac{1}{2}(s+1)$ jede Dimension einmal vor, und zwar liegt immer jeder Raum niederer Dimension in jedem Raume höherer Dimension. Ist $s \gtrless n-1$, so giebt es in den Grundgebilden, aus denen das letzte Nullbild besteht, wenn s gerade ist, $2n-s$ Räume, wenn s ungerade ist, $2n-s-1$ Räume. Was die Dimensionen und die gegenseitige Lage dieser Räume anbetrifft, so kommt bei geradem s jede Dimension von der $(s+1-n)$-ten bis zur $n$ten einmal vor, bei ungeradem s aber kommt jede dieser Dimensionen, mit Ausnahme der Dimension $\frac{1}{2}(s+1)$ einmal vor; dabei liegt wieder jeder Raum niederer Dimension in jedem Raume höherer Dimension.

§ 4.

Bestimmung der Anzahl der gemeinsamen Elemente zweier Systeme von k-dimensionalen linearen Räumen.

Zwei von einander unabhängige Systeme S und S' von k-dimensionalen linearen Räumen, von denen das eine s-stufig, das andre s'-stufig ist, besitzen, wenn $s+s'-(k+1)(n-k)=d$ ist, ein d-stufiges System von gemeinsamen Elementen, und wenn $s+s'-(k+1)(n-k)=0$ ist, eine endliche Anzahl x von gemeinsamen Elementen. Diese endliche Anzahl x kann man bei Anwendung des in § 2 ausgesprochenen Prinzips als Funktion der Gradzahlen der beiden Systeme erhalten, wenn man das eine System, wir wählen S, auf die in § 3 erörterte Weise in ein nur aus Grundgebilden bestehendes System G transformiert, und dann die Anzahl der den Systemen G und S' gemeinsamen Elemente aufsucht. Jeder $[k]$, der diesen beiden Systemen gemeinsam ist, muſs, da G nur aus Grundgebilden besteht, in einem dieser Grundgebilde liegen. Es handelt sich also darum, zu bestimmen, wieviel S' angehörige Räume $[k]$ in jedem dieser Grundgebilde liegen. Das System S' hat nun aber nach der Definition der Gradzahlen (§ 1) mit einem Grundgebilde, dessen Symbol $[n-a_k, n-a_{k-1}, \ldots, n-a_1, n-a_0]$ ist, soviel Räume $[k]$ gemein, als seine Gradzahl $(n-a_k, n-a_{k-1}, \ldots, n-a_1, n-a_0)'$ anzeigt. Da ferner nach § 3 die Multiplizität eines in G liegenden, durch das Symbol

$[n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0]$ bezeichneten Grundgebildes gleich der Gradzahl $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ des Systems S ist, so haben G und S' wegen des Grundgebildes $[n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0]$ soviele Räume $[k]$ gemein, als das Produkt

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \cdot (n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0)'$$

angiebt, wo der ungestrichelte Faktor eine Gradzahl von S, der gestrichelte Faktor eine Gradzahl von S' darstellt. Dasselbe gilt natürlich auch für jedes andere der das System G zusammensetzenden Grundgebilde. Es ergiebt sich also für die Zahl x der den beiden gegebenen Systemen S und S' gemeinsamen Elemente die Summe aller denkbaren Produkte von der obigen Form, oder

$$(4) \quad x = \sum (a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \cdot (n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0)',$$

wo immer der erste Faktor jedes Produkts eine Gradzahl von S, der zweite Faktor eine Gradzahl von S' darstellt, und wo das Summenzeichen soviele solcher Produkte umfafst, als jedes der beiden Systeme Gradzahlen besitzt. Nennt man je zwei Gradzahlen von S und S' einander „konjugiert", wenn ihre Symbole so auseinander hervorgehen, wie

$$(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k) \text{ und } (n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0)'$$

auseinander hervorgehen, so kann man das gefundene Hauptresultat in Worten so aussprechen:

Ist die Stufensumme zweier Systeme von k-dimensionalen linearen Räumen gleich $(k + 1)(n - k)$, also gerade so grofs, dafs beide Systeme eine endliche Anzahl derartiger Räume gemeinsam haben, so ist diese endliche Anzahl gleich der Summe der Produkte aller möglichen konjugierten Gradzahlen der beiden Systeme.

Dieser Satz löst das Charakteristiken-Problem für lineare Räume beliebiger Dimension. Setzt man speziell $k = 1$, so ergeben sich die n-dimensionalen Verallgemeinerungen des Halphenschen Satzes der Liniengeometrie. Da diese Spezialisierung in § 5 für sich behandelt werden soll, so beschränken wir uns hier darauf, einige andere Spezialisierungen beispielsweise anzugeben:

1) Für $n = 4$, $k = 2$, $s = 3$, also $s' = 3$ erhält man, da $a_0 + a_1 + a_2 = 6$ werden mufs, also nur zwei Gradzahlen $(0, 2, 4)$ und $(1, 2, 3)$ bezw. $(0, 2, 4)'$ und $(1, 2, 3)'$ existieren, den folgenden Satz: In einem vierdimensionalen linearen Raume schneiden sich zwei dreistufige Systeme von Ebenen in $a \cdot a' + b \cdot b'$ Ebenen, wenn a angiebt, wieviel Ebenen des einen Systems

aus einem gegebenen Strahlbüschel einen Strahl auszuschneiden vermögen, wenn b angiebt, wieviel Ebenen desselben Systems in einem gegebenen dreidimensionalen linearen Raume liegen, und wenn a' und b' die analogen Zahlen für das andere System bedeuten.

2) Für $n = 6$, $k = 2$, $s = 6$, also $s' = 6$ erhält man, da $a_0 + a_1 + a_2 = 9$ werden mufs, für jedes der beiden sechsstufigen Systeme S und S' fünf Gradzahlen, nämlich für S: (0, 3, 6), (0, 4, 5), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (2, 3, 4) und für S' die ihnen beziehungsweise konjugierten Gradzahlen: $(0, 3, 6)'$, $(1, 2, 6)'$, $(0, 4, 5)'$, $(1, 3, 5)'$, $(2, 3, 4)'$. Demgemäfs gilt der Satz: In einem sechsdimensionalen linearen Raume haben zwei sechsstufige Systeme von Ebenen

$$a \cdot a' + b \cdot c' + c \cdot b' + d \cdot d' + e \cdot e'$$

Ebenen gemeinsam, wo a angiebt, wieviel Ebenen von S aus einem in einem [3] gelegenen Strahlenbündel einen Strahl auszuschneiden vermögen, wo b angiebt, wieviel Ebenen von S in einem gegebenen [5] liegen und zugleich durch einen in diesem [5] liegenden Punkt gehen, wo c angiebt, wieviel Ebenen von S eine gegebene Ebene in einem Strahle zu schneiden vermögen, wo d angiebt, wieviel Ebenen von S in einem gegebenen [5] liegen und zugleich einen Strahl besitzen, der ganz einem in diesem [5] gelegenen [3] angehört und dabei auch einen in diesem [3] liegenden Strahl schneidet, wo e angiebt, wieviel Ebenen von S in einem gegebenen [4] liegen, und wo endlich a', b', c', d', e' dieselbe Bedeutung für das andere System S' haben.

3) Für ein allgemein bleibendes n, $k = 3$, $s = 3$, also $s' = 4n - 15$, erhält man, da $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 4n - 9$ werden mufs, für das System S die drei Gradzahlen $(n-6, n-2, n-1, n)$, $(n-5, n-3, n-1, n)$, $(n-4, n-3, n-2, n)$, denen im System S' beziehungsweise konjugiert sind: $(0, 1, 2, 6)'$, $(0, 1, 3, 5)'$, $(0, 2, 3, 4)'$. Wenn also in einem n-dimensionalen linearen Raume ein dreidimensionaler linearer Raum Element eines gegebenen dreistufigen Systems S und eines gegebenen $(4n-15)$-stufigen Systems S' ist, so haben beide Systeme soviel Elemente gemeinsam, wie die folgende Summe von drei Produkten aus je zwei S und S' angehörigen Gradzahlen angiebt:

$$\begin{aligned} &(n-6, n-2, n-1, n) \cdot (0, 1, 2, 6)' \\ +\ &(n-5, n-3, n-1, n) \cdot (0, 1, 3, 5)' \\ +\ &(n-4, n-3, n-2, n) \cdot (0, 2, 3, 4)'. \end{aligned}$$

4) Für allgemein bleibende n und k, und $s = 2$, also $s' = (k+1)(n-k) - 2$ erhält man:

$$x = (n-k-2, n-k+1, n-k+2, \ldots, n-1, n) \cdot (0, 1, 2, \ldots, k-2, k-1, k+2)'$$
$$+ (n-k-1, n-k, n-k+2, \ldots, n-1, n) \cdot (0, 1, 2, \ldots, k-2, k, k+1)',$$

d. h. in Worten: In einem n-dimensionalen linearen Raume schneidet ein zweistufiges System S von k-dimensionalen linearen Räumen ein $[(k+1)(n-k) - 2]$-stufiges System S' von ebensolchen Räumen in $a \cdot f' + b \cdot g'$ Elementen, wo a angiebt, wieviel Räume von S mit einem gegebenen $[n-k-2]$ einen Punkt gemein haben, wo b angiebt, wieviel Räume von S einen gegebenen $[n-k]$ in einem Strahle zu schneiden vermögen, wo f' angiebt, wieviel Räume von S' in einem gegebenen $[k+2]$ liegen und zugleich durch einen in diesem $[k+2]$ gelegenen $[k-1]$ hindurchgehen, und wo g' angiebt, wieviel Räume von S' in einem gegebenen $[k+1]$ liegen und durch einen in diesem $[k+1]$ gelegenen $[k-2]$ hindurchgehen.

§ 5.

Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen des Halphenschen Satzes der Liniengeometrie.

Indem wir bei der in § 4 abgeleiteten allgemeinen Charakteristiken-Formel $k = 1$ setzen, erhalten wir die Charakteristiken-Formel des Strahles. Ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, darf man annehmen, dafs von zwei gegebenen Strahlsystemen S und S' mit der Stufensumme $2(n-1)$ die Stufe von S gleich $n-1-p$ und die Stufe von S' gleich $n-1+p$ ist, wo p eine nicht negative ganze Zahl ist. Die Gradzahlen von S sind dann:

$$(p, n),\ (p+1, n-1),\ (p+2, n-2),\ (p+3, n-3),\ \ldots,$$

während die ihnen konjugierten Gradzahlen von S' folgende Symbole haben:

$$(0, n-p)',\ (1, n-p-1)',\ (2, n-p-2)',\ (3, n-p-3)',\ \ldots$$

Bei S geht die Reihe der Gradzahlen bis $\left(\frac{n+p-1}{2}, \frac{n+p+1}{2}\right)$, wenn $n+p$ ungerade, also die Stufe von S gerade ist, und bis $\left(\frac{n+p-2}{2}, \frac{n+p+2}{2}\right)$, wenn $n+p$ gerade, also die Stufe von S ungerade ist. Bei S' geht die Reihe der Gradzahlen bis $\left(\frac{n-p-1}{2},\right.$

$\frac{n-p+1}{2}\Big)'$, wenn die Stufe von S' gerade, und bis $\left(\frac{n-p-2}{2}, \frac{n-p+2}{2}\right)$ wenn die Stufe von S' ungerade ist. Die gegebenen Systeme müsse entweder beide von gerader Stufe sein, und dann haben sie beid $\frac{n-p+1}{2}$ Gradzahlen, oder sie müssen beide von ungerader Stuf sein, und dann haben sie beide $\frac{n-p}{2}$ Gradzahlen. Was die Bedeutun der Gradzahl-Symbole anbetrifft, so erinnere man sich, dafs $(a, \alpha$ bezw. $(a, \alpha)'$ die Zahl derjenigen Strahlen des Systems S bezw. de Systems S' bedeutet, welche in einem gegebenen α-dimensionale linearen Raume liegen und zugleich einen in diesem Raume gelegene a-dimensionalen linearen Raum einpunktig treffen. Vermittelst d oben angegebenen Gradzahlen läfst sich nun, gemäfs der Formel C des § 4 die Zahl x der den beiden Systemen gemeinsamen Strahl ausdrücken wie folgt:

$$(5) \qquad x = (p, n) \cdot (0, n-p)' + (p+1, n-1) \cdot (1, n-p-1)' + (p+2, n-2) \cdot (2, n-p-2)' + \cdots$$

welche Summe mit $\left(\frac{n+p-1}{2}, \frac{n+p+1}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-p-1}{2}, \frac{n-p+1}{2}\right)$ schliefst, wenn beide Systeme von gerader Stufe sind, dagegen m. $\left(\frac{n+p-2}{2}, \frac{n+p+2}{2}\right) \cdot \left(\frac{n-p-2}{2}, \frac{n-p+2}{2}\right)'$ schliefst, wenn beid Systeme von ungerader Stufe sind. Beispielshalber spezialisieren wi für $p = 0$ und erhalten:

$$(6) \qquad x = (0,n) \cdot (0,n)' + (1,n-1) \cdot (1,n-1)' + (2,n-2) \cdot (2,n-2)' + \cdots$$

als die Anzahl der Strahlen, die zwei gegebenen $(n-1)$-stufige Systemen gemeinsam ist. Ist noch spezieller $n = 3$, so ergiebt sic hieraus

$$(7) \qquad x = (0, 3) \cdot (0, 3)' + (1, 2) \cdot (1, 2)',$$

d. h. der Inhalt des Halphenschen Satzes $\mu \cdot \mu' + \nu \cdot \nu'$ der Linie geometrie.

§ 6.

Ausdehnung auf den Fall, dafs die beiden gegebenen Systeme unendlich viele Elemente gemein haben.

Wenn die Stufensumme $s + s'$ zweier gegebener Systeme vo k-dimensionalen linearen Räumen um d gröfser ist als $(k+1)(n-k$ und demgemäfs die beiden Systeme ein d-stufiges System D vo solchen Räumen gemeinsam haben, so hängt jede Gradzahl de Systems D von den Gradzahlen der Systeme S und S' durch ein

Formel ab, die man durch symbolische Multiplikation der Formel 4 des § 4 erhalten kann. Man hat nämlich, um die Gradzahl $(b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k)$ des Systems D zu erhalten, jene Formel mit der Grundbedingung $(b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k)$ zu multiplizieren, und erhält so ein Resultat, das sich in folgender Form schreiben läfst:

$$(8)\quad (b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k) = \sum \Big((a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)\ (b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k) \Big) \cdot (n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0)'.$$

Hier mufs $b_0 + b_1 + \cdots + b_{k-1} + b_k = (k+1)n - \frac{1}{2}k(k+1) - d$ und $a_0 + a_1 + \cdots + a_{k-1} + a_k = \frac{1}{2}k(k+1) + s'$ sein. Die Grundbedingungen $(n - a_k, n - a_{k-1}, \ldots, n - a_1, n - a_0)'$ sind unmittelbar als Gradzahlen zu lesen, die sich auf das System S' beziehen. Dagegen sind die zusammengesetzten Bedingungen $(a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k)$ $(b_0, b_1, \ldots, b_{k-1}, b_k)$ noch durch nicht-zusammengesetzte Grundbedingungen auszudrücken, und letztere dann erst als Gradzahlen zu lesen, die sich auf das System S beziehen. Da aber die Aufgabe, eine aus zwei Grundbedingungen zusammengesetzte Bedingung durch nicht-zusammengesetzte Grundbedingungen auszudrücken, in voller Allgemeinheit bis jetzt nur für den Strahl von mir gelöst ist, so gebe ich vorläufig auch nur für diesen die Funktionen an, welche die Gradzahlen des zwei Systemen S und S' gemeinsamen Systems D durch die Gradzahlen von S und S' ausdrücken. Diese Funktionen ergeben sich aus Formel (8) durch Benutzung des wichtigen Satzes, den ich in § 4 meiner Fund. Anz. (Math. Ann. Bd. 26) mit (11) bezeichnet habe. Man erhält z. B., wenn ein $(3n - 2 - a - \alpha - p)$-stufiges Strahlsystem S und ein $(n - 1 + p)$-stufiges Strahlsystem S' gegeben ist, und bei dem S und S' gemeinsamen Strahlsysteme nach der Gradzahl (a, α), wo $\alpha - a \geqq n - p$ ist, gefragt wird:

$$\begin{aligned}(9)\quad (a,\alpha) = {} & (a, \alpha + p - n + 1) \cdot (0, n-p)' + (a-1, \alpha + p - n + 2) \\ & \cdot (0, n-p)' + \cdots + (a + p - n + 1, \alpha) \cdot (0, n-p)' \\ & + (a-1, \alpha + p - n + 2) \cdot (1, n-p-1)' + (a-2, \alpha + p - n + 3) \\ & \cdot (1, n-p-1)' + \cdots + (a + p - n + 2, \alpha - 1) \cdot (1, n-p-1)' \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

welche Summe so weit fortzusetzen ist, bis die Symbole der Gradzahlen sinnlos werden.

Ist die Stufe des Systems S gleich $n - p$ und die des Systems S' gleich $n - 1 + p$, so haben S und S' ein einstufiges System gemeinsam, für dessen einzige Gradzahl $(n - 2, n)$ man erhält:

$$(10)\quad (n-2,n) = (p-1,n)\cdot(0,n-p)' + (p,n-1)\cdot(0,n-p)' + (p,n-1)\cdot(1,n-p-1)' + (p+1,n-2)\cdot(1,n-p-1)' + (p+1,n-2)\,(2,n-p-2)' + (p+2,n-3)\cdot(2,n-p-2)' + \cdots,$$

welche Summe fortzusetzen ist:

$$\text{bis } \left(\frac{n+p-3}{2}, \frac{n+p+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n-p-1}{2}, \frac{n-p+1}{2}\right)',$$

wenn die Stufe von S ungerade ist,

$$\text{und bis } \left(\frac{n+p-2}{2}, \frac{n+p}{2}\right)\cdot\left(\frac{n-p-2}{2}, \frac{n-p+2}{2}\right)',$$

wenn die Stufe von S gerade ist.

Ist ferner die Stufe des Systems S gleich $n-p+1$ und die des Systems S' gleich $n-1+p$, so haben S und S' ein zweistufiges System gemeinsam, für dessen Gradzahl $(n-3, n)$ man erhält:

$$(11)\quad (n-3,n) = (p-2,n)\cdot(0,n-p)' + (p-1,n-1)\cdot(0,n-p)' + (p,n-2)\cdot(0,n-p)' + (p-1,n-1)\cdot(1,n-p-1)' + (p,n-2)\cdot(1,n-p-1)' + (p+1,n-3)\cdot(1,n-p-1)' + \cdots,$$

welche Summe bei ungerader Stufe von S bis

$$\left(\frac{n+p-6}{2}, \frac{n+p+2}{2}\right)\cdot\left(\frac{n-p-2}{2}, \frac{n-p+2}{2}\right)' + \left(\frac{n+p-4}{2}, \frac{n+p}{2}\right)\cdot\left(\frac{n+p-2}{2}, \frac{n+p+2}{2}\right)'$$

fortzusetzen ist, dagegen bei gerader Stufe von S mit dem folgenden Addenden schliefst:

$$\left(\frac{n+p-5}{2}, \frac{n+p+1}{2}\right)\cdot\left(\frac{n-p-1}{2}, \frac{n-p+1}{2}\right)'.$$

Setzt man in (11) speziell $p=1$, so erhält man die Zahl, welche angiebt, wieviel von den zwei n-stufigen Strahlsystemen gemeinsamen Strahlen einen gegebenen $[n-3]$ einpunktig treffen. Bezeichnet in diesem Falle f_i die Gradzahl $(i, n-1-i)$ des einen Systems, und f_i' die entsprechende Gradzahl des andern Systems, so läfst sich die Funktion, welche die gesuchte Zahl darstellt, in folgender Weise symmetrisch schreiben:

$$(12)\quad (n-3,n) = f_0\cdot f_0' + f_1\cdot f_1' + f_2\cdot f_2' + f_3\cdot f_3' + \cdots + [f_0\cdot f_1' + f_1\cdot f_0'] + [f_1\cdot f_2' + f_2\cdot f_1'] + [f_2\cdot f_3' + f_3\cdot f_2'] + [f_3\cdot f_4' + f_4\cdot f_3'] + \cdots$$

Schliefslich betrachten wir noch zwei $(2n-4)$-stufige Strahlsysteme S und S' als gegeben. Dieselben haben ein $(2n-6)$-stufiges

Strahlsystem gemeinsam, für dessen drei Gradzahlen (0, 5), (1, 4), (2, 3) man erhält:

$$(13) \quad (0,5) = (0,3)\cdot(0,3)',$$

$$(14) \quad (1,4) = (0,3)\cdot(0,3)' + (0,3)\cdot(1,2)' + (1,2)\cdot(0,3)',$$

$$(15) \quad (2,3) = (0,3)\cdot(0,3)' + (1,2)\cdot(1,2)'.$$

§ 7.

Die Anzahl der gemeinsamen Strahlen von $n-1$ gegebenen $(2n-4)$-stufigen Strahlsystemen.

Die Formeln für die Gradzahlen des zweien Systemen gemeinsamen Systems führen auch leicht zu den Formeln, welche bei h gegebenen Systemen von k-dimensionalen linearen Räumen die endliche Anzahl der allen Systemen gemeinsamen Räume ausdrücken, wobei, damit diese Anzahl eine endliche sei, erforderlich ist, dafs die Stufensumme der h Systeme gleich $(h-1)(k+1)(n-k)$ ist. Wir setzen beispielsweise $k = 1$, $h = n-1$ und die Stufe jedes Systems gleich $2n-4$ voraus, und suchen demgemäfs die Formel, welche die Anzahl der Strahlen, die $n-1$ gegebenen $(2n-4)$-stufigen Strahlsystemen gemeinsam sind, durch die Gradzahlen dieser Systeme ausdrückt. Jedes der $n-1$ gegebenen Systeme $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_{n-1}$ besitzt nur zwei Gradzahlen, nämlich (0, 3) und (1, 2). Der Kürze wegen bezeichnen wir die Gradzahlen (0, 3) und (1, 2) eines S_i genannten Systems mit den Buchstaben a_i bezw. b_i. Aus den Formeln (13), (14), (15) des § 6 erhalten wir zunächst für das S_1 und S_2 gemeinsame System:

$$(0,5) = a_1 a_2;\quad (1,4) = a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1;\quad (2,3) = a_1 a_2 + b_1 b_2;$$

und hieraus für das S_1, S_2 und S_3 gemeinsame System:

$$(0,7) = a_1 a_2 a_3;\quad (1,6) = (2a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1) a_3 + a_1 a_2 b_3;$$
$$(2,5) = (3a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1 + b_1 b_2) a_3 + (a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1) b_3;$$
$$(3,4) = (a_1 a_2 + a_1 b_2 + a_2 b_1) a_3 + (a_1 a_2 + b_1 b_2) b_3.$$

Führt man die hier angedeuteten Multiplikationen aus, so erhält man Ausdrücke, die in den Indices symmetrisch sind und dadurch eine Kontrole liefern. Wegen dieser Symmetrie können wir die Gestalt der schon entwickelten und der weiteren Formeln durch folgende Bezeichnung abkürzen. Es bezeichne $A_i B_k$ die Summe aller möglichen $\frac{(i+k)!}{i!\,k!}$ Produkte, deren jedes i Faktoren a und k Faktoren b so enthält, dafs diesen $i+k$ Faktoren die sämtlichen Zahlen von 1 bis $i+k$ als Indices angehängt sind, z. B.:

$$A_3B_2 = a_1\,a_2\,a_3\,b_4\,b_5 + a_1\,a_2\,a_4\,b_3\,b_5 + a_1\,a_2\,a_5\,b_3\,b_4$$
$$+ a_1\,a_3\,a_4\,b_2\,b_5 + a_1\,a_3\,a_5\,b_2\,b_4 + a_1\,a_4\,a_5\,b_2\,b_3$$
$$+ a_2\,a_3\,a_4\,b_1\,b_5 + a_2\,a_3\,a_5\,b_1\,b_4 + a_2\,a_4\,a_5\,b_1\,b_3 + a_3\,a_4\,a_5\,b_1$$

Mit Benutzung dieser Bezeichungsweise kann man die Gradzahl des den drei Systemen S_1, S_2, S_3 gemeinsamen Systems folgend mafsen schreiben:

$$(0, 7) = A_3;\ (1, 6) = 2A_3 + A_2B_1;\ (2, 5) = 3A_3 + A_2B_1 + A_1$$
$$(3, 4) = A_3 + A_2B_1 + B_3.$$

Hieraus ergeben sich für die Gradzahlen des den vier Syste S_1, S_2, S_3, S_4 gemeinsamen Systems die folgenden Ausdrücke, in de die Reihenfolge der Addenden umgekehrt ist:

$$(4, 5) = B_4 + A_2B_2 + A_3B_1 + 3A_4;$$
$$(3, 6) = A_1B_3 + A_2B_2 + 3A_3B_1 + 6A_4;$$
$$(2, 7) = A_2B_2 + 2A_3B_1 + 6A_4;$$
$$(1, 8) = A_3B_1 + 3A_4;$$
$$(0, 9) = A_4.$$

Durch Fortsetzung des Verfahrens findet man:

$$(5, 6) = B_5 + A_2B_3 + A_3B_2 + 3A_4B_1 + 6A_5;$$
$$(6, 7) = B_6 + A_2B_4 + A_3B_3 + 3A_4B_2 + 6A_5B_1 + 15A_6;$$
$$(7, 8) = B_7 + A_2B_5 + A_3B_4 + 3A_4B_3 + 6A_5B_2 + 15A_6B_1 + 36$$

Hieraus ergiebt sich zunächst, dafs die gesuchte Zahl x der d Systemen S_1, S_2, ... S_{n-1} gemeinsamen Strahlen durch einen A druck von der Form:

$$(16)\quad c_0 \cdot B_{n-1} + c_1 \cdot A_1B_{n-2} + c_2 \cdot A_2B_{n-3} + c_3 \cdot A_3B_{n-4} +$$
$$+ c_{n-1} \cdot A_{n-1}$$

dargestellt wird, wo $c_0 = 1$, $c_1 = 0$, $c_2 = 1$, $c_3 = 1$, $c_4 = 3$, $c_5 = 6$ u.s. ist. Die Werte dieser Koeffizienten kann man als Funktionen v Binomialkoeffizienten durch folgende Überlegung erhalten. M denke sich, dafs jedes der $n - 1$ gegebenen Systeme ein Grui gebilde von der Form $[n - 3, n]$ ist. Dann ist die Gradzahl a je Systems gleich 1, die Gradzahl b aber gleich 0. Daher werden diesem Falle die Ausdrücke B_{n-1}, A_1B_{n-2}, ..., $A_{n-2}B_1$ sämtl gleich null, und nur der Ausdruck A_{n-1} wird gleich 1. Daher st der Koeffizient c_{n-1} von A_{n-1} die Anzahl der Strahlen dar, wel $n - 1$mal die Bedingung $(n - 3, n)$ zu erfüllen vermögen. Für di Anzahl habe ich aber in meinen Fund. Anz. (S. 51) den Ausdru

$$(17)\quad (2n - 4)_{n-3} - (n - 1)_1\,(2n - 7)_{n-3} + (n - 1)_2\,(2n - 10)_n$$
$$- (n - 1)_3\,(2n - 13)_{n-3} +$$

gefunden. Setzt man in diesem Ausdruck nacheinander $n = 2$, $n =$

$n = 4$, u. s. w., so erhält man die Werte der sämtlichen Koeffizienten c_1, c_2, c_3 u. s. w. bis c_{n-1}. Demnach ergiebt sich die gesuchte Anzahl der Strahlen, welche $n-1$ gegebenen $(2n-4)$-stufigen Systemen gemeinsam sind, in folgender Form:

$$(18)\quad B_{n-1} + A_2 B_{n-3} + (4_1 - 3_1 \cdot 1_1) A_3 B_{n-4} + (6_2 - 4_1 \cdot 3_2) A_4 B_{n-5} + (8_3 - 5_1 \cdot 5_3) A_5 B_{n-6} + (10_4 - 6_1 \cdot 7_4 + 6_2 \cdot 4_4) A_6 B_{n-7} + (12_5 - 7_1 \cdot 9_5 + 7_2 \cdot 6_5) A_7 B_{n-8} + \cdots + [(2n-4)_{n-3} - (n-1)_1 (2n-7)_{n-3} + (n-1)_2 (2n-10)_{n-3} - \cdots] A_{n-1}.$$

Hamburg im Dezember 1885.

Über das Gleichgewicht einer elastischen Kugel.

(Von Paul Jaerisch in Hamburg.)

In zwei Arbeiten hat Lamé die Elastizitätsgleichungen in Polarkoordinaten für das Gleichgewicht einer homogenen Kugelschale behandelt.[1]) Er nimmt dabei zunächst an, dafs auf die Oberfläche keine äufseren Kräfte aufser den elastischen Druckkräften wirken und zeigt, wie sich die erhaltenen Funktionen für die Verrückungen bei Hinzunahme äufserer Kräfte, wie Schwerkraft, Centrifugalkraft und Attraktion nach dem Kugelmittelpunkte proportional der Entfernung von demselben, ändern. Hoppe[2]) und Thomson[3]) behandeln das Gleichgewicht der Kugelschale ohne Benutzung von Polarkoordinaten. Hoppe nimmt an, dafs die Kugelschale von zwei parallelen Ebenen zusammengepreſst werde; Thomson läſst die Kugelschale nach zwei festen, mit dem Kugelmittelpunkte in einer Geraden liegenden Punkten angezogen werden.

Im folgenden soll das obige Problem noch einmal in Polarkoordinaten behandelt werden. Die Differentialgleichungen werden im Anschluſs an meine Arbeit: „Über die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel“[4]) nach einer von Lamé abweichenden Methode

---

1) Lamé: Sur l'équilibre d'élasticité des enveloppes sphériques, Liouville Journal XIX. 1854. Lamé: Leçons sur les coordinées curvilignes et leurs diverses applications, Paris 1859.

2) Hoppe: Deformation of an elastic sphere pressed between two parallel plans, Quarterly journal of mathematics XI 318—326. 1871.

3) Thomson: Dynamical problems regarding elastic spheroidal shells etc., Philosophical Transactions of the royal society of London. Vol. 153, 583—616. 1864.

4) Crelle Journal für Mathematik Bd. 88 pag. 131.

integriert, die allgemeiner ist, weil sie sich sowohl auf das Schwingungsproblem als auf das Gleichgewichtsproblem anwenden läfst, während die Methode Lamé's nur für das letztere gilt. Lamé führt nämlich in obiger Abhandlung drei Hilfsgröfsen A, B, Γ, die von Borchhardt sog. Elementarrotationen, ein und bestimmt dieselben als Funktionen der Volumenänderung Θ, indem er für die Gröfsen A, B, Γ ähnliche Entwickelungen nach den trigonometrischen Funktionen des Drehungswinkels annimmt, wie sich ihm für Θ aus der Potentialgleichung ergab. Durch die Gröfsen A, B, Γ werden dann die Komponenten der elastischen Verrückung bestimmt. Für das Problem der Schwingungen eines elastischen Körpers ist diese Methode nicht verwertbar, weil die Gröfsen A, B, Γ hier von Θ unabhängig sind; wie sich leicht zeigen läfst. Daher verlangt das Problem der Schwingungen die Integration eines komplizierten Systems simultaner partieller Differentialgleichungen. Um dasselbe für die Kugel zu lösen, nehme ich in meiner obigen Arbeit für die Komponenten Ausdrücke an, deren allgemeine Form aus dem einen Teile der Differentialgleichungen erkannt wird, und welche gewisse zunächst unbestimmte Funktionen enthalten. Diese Methode läfst sich auf das Gleichgewichtsproblem gleichfalls anwenden. Dabei ergeben sich die Ausdrücke für die sog. transversalen Verrückungen in besonders einfacher Weise. Dann führt die gleiche Methode auch bei allgemeineren Elastizitätsproblemen zur Integration der Differentialgleichungen, wie ich nächstens zeigen werde. Dies sind die Gründe, welche die nochmalige Behandlung des obigen Problems zu rechtfertigen schienen.

§ 1. Sind r, φ, ψ die Kugelkoordinaten und u, v, w die sphärischen Komponenten einer Verrückung, u in der Richtung von r, v in der Richtung der Tangente in der Meridianebene, w in der Richtung der Tangente parallel der Äquatorebene, so wird das Gleichgewicht der Kugel nach Lamé dargestellt durch folgende Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Gamma}{d\varphi} - \dfrac{dB}{d\psi} = -\omega^2 c r^2 \dfrac{d\Theta}{dr} \\ \dfrac{dA}{d\psi} - \dfrac{d\Gamma}{dr} = -\omega^2 c \dfrac{d\Theta}{d\varphi} \\ \dfrac{dB}{dr} - \dfrac{dA}{d\varphi} = -\omega^2 \dfrac{1}{c} \dfrac{d\Theta}{d\psi} \end{cases}$$

Θ bezeichnet die Volumenänderung und ist definiert durch folgende Gleichung:

$$(2)\qquad \Theta = \frac{1}{r^2}\frac{dr^2 u}{dr} + \frac{1}{rc}\frac{dcv}{d\varphi} + \frac{1}{rc}\frac{dw}{d\psi};$$

rner ist $c = \cos\varphi$, $\omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$, wo λ und μ die beiden Elastitätskonstanten bedeuten. A, B, Γ sind zur Abkürzung gesetzt für:

$$\begin{cases} A = \frac{1}{r^2 c}\left(\frac{d r v}{d\psi} - \frac{d r c w}{d\varphi}\right) \\ B = \frac{1}{c}\left(\frac{d r c w}{d r} - \frac{d u}{d\psi}\right) \\ \Gamma = c\left(\frac{d u}{d\varphi} - \frac{d r v}{d r}\right) \end{cases}$$

Wie beim Schwingungsproblem der Kugel läfst sich hier gen, dafs die Gröfsen u, v, w in zwei Teile zerlegbar sind, je chdem $\Theta = 0$ oder $\gtrless 0$ ist. Denn die Funktionen der linken iten der Gleichungen (1) müssen einmal Glieder enthalten, die von r Konstanten ω abhängen, damit die beiden Seiten der Gleichgen identisch werden; dann können die Funktionen u, v, w ieder enthalten, für welche die linken Seiten der Gleichungen für :h verschwinden, d. h. Glieder, die von ω unabhängig sind.

Bevor wir diese beiden Fälle für sich betrachten, tragen wir die erte für A, B, Γ aus (3) in (1) ein und erhalten unter Benutzung n (2) folgende Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{d^2 r^2 u}{d r^2} + \frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi} c \frac{d u}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2 u}{d\psi^2} = (1-\omega^2) r^2 \frac{d\Theta}{d r} + 2 r\Theta, \\ \frac{d^2 r c v}{d r^2} + \frac{1}{r^2 c}\frac{d}{d\varphi} c \frac{d r c v}{d\varphi} + \frac{1}{r^2 c^2}\frac{d^2 r c v}{d\psi^2} = (1-\omega^2) c \frac{d\Theta}{d\varphi} - 2 s\Theta \\ \qquad\qquad - \frac{2c}{r}\frac{d u}{d\varphi} + \frac{2s}{r^2}\frac{d r^2 u}{d r}, \\ \frac{d^2 r c w}{d r^2} + \frac{c}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{d r c w}{d\varphi} + \frac{1}{r^2 c^2}\frac{d^2 r c w}{d\psi^2} = (1-\omega^2)\frac{d\Theta}{d\psi} \\ \qquad\qquad - \frac{2}{r}\frac{d u}{d\psi} + \frac{2s}{c^2 r^2}\frac{d r c v}{d\psi}. \end{cases}$$

er ist zur Abkürzung gesetzt: $s = \sin\varphi$.

I. Bestimmung von u, v, w für $\Theta = 0$.

§ 2. Setzt man in den letzten beiden Gleichungen (4) $\Theta = 0$, hat die zweite in Beziehung auf v und u dieselbe Form, wie die rste in Beziehung auf u und Θ. Es scheint daher aufser dem Wertysteme, für welches alle drei Verrückungen u, v, w Werte haben, in zweites möglich, für welches $u = 0$ ist, und aus ähnlichem Grunde in drittes, für welches $u = v = 0$ ist.

Die Gleichungen (1) werden erfüllt, wenn man setzt:

$$A = B = \Gamma = 0,$$

und die Gleichungen (3) ergeben die Komponenten u, rv, rcw als Differentialquotienten einer Funktion F:

$$u = \frac{dF}{dr}, \quad rv = \frac{dF}{d\varphi}, \quad rcw = \frac{dF}{d\psi}. \tag{5}$$

Zur Bestimmung von F folgt aus (2)

$$\frac{d}{dr} r^2 \frac{dF}{dr} + \frac{1}{c} \frac{d}{d\varphi} c \frac{dF}{d\varphi} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2F}{d\psi^2} = 0. \tag{6}$$

Diese Gleichung zerfällt bekanntlich, wenn man setzt:

$$F = R^n S^n \tag{7}$$

mit der Bestimmung, dafs R^n eine Funktion von r allein, S^n von φ und ψ sei, in die Gleichungen:

$$\begin{cases} \frac{d}{dr} r^2 \frac{dR^n}{dr} - n(n+1)R^n = 0, \\ \frac{1}{c} \frac{d}{d\varphi} c \frac{dS^n}{d\varphi} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2S^n}{d\psi^2} + n(n+1)S^n = 0. \end{cases} \tag{8}$$

Aus diesen Gleichungen folgen für R^n und S^n die Werte:

$$\begin{cases} R^n = ar^n + br^{-n-1}, \\ S^n = (A \cos \nu\psi + B \sin \nu\psi) P_\nu^n + (C \cos \nu\psi + D \sin \nu\psi) Q_\nu^n, \end{cases} \tag{9}$$

wo P_ν^n und Q_ν^n die Zugeordneten der Kugelfunktionen[1]), a, b, A, B, C, D Konstante bedeuten, die aufser von n und ν noch von den Oberflächenbedingungen abhängig sind.

Es scheint eine zweite Auflösung der Differentialgleichungen möglich, für welche alle drei Komponenten u, v, w Werte haben, ohne dafs für dieselben $A = B = \Gamma = 0$ ist. Dazu betrachten wir die Gleichungen in der Form (4), deren erste, weil $\Theta = 0$ ist, u folgendermafsen bestimmt:

$$u = (a_1 r^{n-1} + b_1 r^{-n-2}) S_1,$$

wo a_1 und b_1 Konstante, S_1 ein Integral der Gleichung für die Kugelfunktionen sind. Um ferner aus der zweiten der Gleichungen (4) die Form zu erkennen, in welcher v anzusetzen ist, beachte man die Identitäten ($s = \sin \varphi$):

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d\varphi} c \frac{ds S_1}{d\varphi} + \frac{1}{c^2} \frac{d^2 s S_1}{d\psi^2} + n(n+1) s S_1 = 2c \frac{dS_1}{d\varphi} - 2 s S_1$$

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d\varphi} c \frac{d}{d\varphi} \left(c \frac{dS_1}{d\varphi} \right) + \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{d\psi^2} \left(c \frac{dS_1}{d\varphi} \right) + n(n+1) c \frac{dS_1}{d\varphi} = 2n(n+1) s S_1,$$

1) Heine, Kugelfunktionen, Teil I.

elche für jede Kugelfunktion S_1 bestehen. Daher kann man für v lgenden Ausdruck setzen:

$$rcv = p_1 s S_1 + p_2 c \frac{dS_1}{d\varphi},$$

p_1, p_2 zwei zu bestimmende Funktionen von r sind. Trägt man sen Wert für v, sowie den obigen für u in die zweite Gleichung ein und läfst die Faktoren von sS_1 und $c\frac{dS_1}{d\varphi}$ für sich verschwin-n, so erhält man zwei Gleichungen, aus denen für p_1 und p_2 die erte

$$p_1 = a_2 r^n + b_2 r^{-n-1},$$
$$p_2 = \frac{a_1 + a_2}{n} r^n - \frac{b_1 + b_2}{n+1} r^{-n-1}$$

gen, wo a_2, b_2 neue Konstante sind.

Nun bestimme man die Funktion w aus Gleichung (2), in lcher $\Theta = 0$ und für u und v die obigen Werte zu setzen sind. e so erhaltene Lösung u, v, w soll die dritte Gleichung (4) üllen. Man erkennt aber nach längerer Rechnung, dafs dazu $= b_2 = 0$ erforderlich ist. Dann geht das neue Wertsystem bis f die Konstanten in das frühere (5) über. Es hat sich somit keine ue Lösung ergeben.

§ 3. Zur Bestimmung einer Lösung der zweiten Art, für welche lfser $\Theta = 0$ noch $u = 0$ sein soll, liefern die Differentialgleichungen der Form (4) folgende Gleichungen:

0)
$$\begin{cases} \frac{d^2rcv}{dr^2} + \frac{1}{r^2c}\frac{d}{d\varphi} c \frac{drcv}{d\varphi} + \frac{1}{r^2c^2}\frac{d^2rcv}{d\psi^2} = 0, \\ \frac{d^2rcw}{dr^2} + \frac{c}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{drcw}{d\varphi} + \frac{1}{r^2c^2}\frac{d^2rcw}{d\psi^2} = \frac{2s}{c^2r^2}\frac{drcv}{d\psi}. \end{cases}$$

ine Lösung dieser Gleichungen gewinnt man leicht durch Benutzung er Gleichung (2), die nun lautet

$$0 = \frac{dcv}{d\varphi} + \frac{dw}{d\psi},$$

nd erfüllt wird, wenn man setzt:

1)
$$\begin{cases} cv = \frac{df}{d\psi}, \\ w = -\frac{df}{d\varphi}. \end{cases}$$

ieses Wertsystem genügt den Gleichungen (10), wenn f durch die leichung:

2)
$$r^2\frac{d^2rf}{dr^2} + \frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi} c \frac{drf}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\frac{d^2rf}{d\psi^2} = 0$$

$$(13)\qquad \begin{cases} r^2 \dfrac{d^2 R_1^n}{dr^2} - n(n+1) R_1^n = 0, \\ \dfrac{1}{c} \dfrac{d}{d\varphi} c \dfrac{dS_1^n}{d\varphi} + \dfrac{1}{c^2} \dfrac{d^2 S_1^n}{d\psi^2} + n(n+1) S_1^n = 0. \end{cases}$$

S_1^n hat als Kugelfunktion zweier Veränderlicher die Form von S^n in (9) nur mit andern Konstanten A, B, C, D; für R_1^n gewinnt man den Ausdruck:

$$(14)\qquad R_1^n = a_1 r^{n+1} + b_1 r^{-n}$$

mit den Konstanten a_1 und b_1.

Das dritte Wertsystem, für welches $\Theta = u = v = 0$ ist, wird bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{dw}{d\psi} = 0,$$

$$r^2 \frac{d^2 rcw}{dr^2} + c \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{c} \frac{drcw}{d\varphi} = 0,$$

welche aus (2) und (4) hervorgehen. Demnach ist für rcw zu setzen:

$$(15)\qquad rcw = R_2^n S_2^n,$$

wo R_2^n der ersten der Gleichungen (13) und S_2^n folgender Gleichung genügt:

$$(16)\qquad c \frac{d}{d\varphi} \frac{1}{c} \frac{dS_2^n}{d\varphi} + n(n+1) S_2^n = 0.$$

Für R_2^n erhält man den Ausdruck:

$$R_2^n = a_2 r^{n+1} + b_2 r^{-n};$$

die Gleichung (16) für S_2^n hat zur Lösung:

$$S_2^n = c \left(A' \frac{dP_0^n}{d\varphi} + B' \frac{dQ_0^n}{d\varphi} \right)$$

wo P_0^n und Q_0^n die Kugelfunktionen einer Veränderlichen bezeichnen, die zur Gleichung haben:

$$\frac{1}{c} \frac{d}{d\varphi} c \frac{dP}{d\varphi} + n(n+1) P = 0.$$

A' und B' sind Konstante.

Das dritte Wertsystem ist, wie sich jetzt leicht ergiebt und wie ich beim Schwingungsproblem der Kugel gezeigt habe,[1]) in dem zweiten enthalten.

[1]) Crelle, J. Bd. 88. S. 140. Vergleiche auch die Anm.

Es ergeben sich hiernach folgende zwei Wertsysteme für $\Theta = 0$:

$$(17)\qquad \begin{cases} u = (nar^{n-1} - b(n+1)r^{-n-2})\,S^n, \\ v = (ar^{n-1} + br^{-n-2})\,\dfrac{dS^n}{d\varphi}, \\ w = (ar^{n-1} + b^{-n-2})\,\dfrac{1}{c}\,\dfrac{dS^n}{d\psi}; \end{cases}$$

$$(18)\qquad \begin{cases} u = 0 \\ v = (a_1 r^n + b_1 r^{-n-1})\,\dfrac{1}{c}\,\dfrac{dS_1^n}{d\psi} \\ w = -\,(a_1 r^n + b_1 r^{-n-1})\,\dfrac{dS_1^n}{d\varphi} \end{cases}$$

Diese Lösungen gelten in Beziehung auf n und ν für alle Werte von $n = 1$ bis $n = \infty$ und für alle Werte von $\nu = 1$ bis $\nu = n$. S^n ist definiert durch (9), S_1^n durch denselben Ausdruck nur mit andern Konstanten für A, B, C, D. Der Fall, dafs $n = 0$ und $\nu = 0$ sei, wird später berücksichtigt.

II. Bestimmung von u, v, w für $\Theta \gtrless 0$.

§ 4. Die Gleichungen (1) und (2) ergeben zur Bestimmung von Θ die Gleichung:

$$\frac{d}{dr}\,r^2\frac{d\Theta}{dr} + \frac{1}{c}\,\frac{d}{d\varphi}\,c\,\frac{d\Theta}{d\varphi} + \frac{1}{c^2}\,\frac{d^2\Theta}{d\psi^2} = 0,$$

welche dieselbe Form wie die Gleichung (6) für F hat. Wir erhalten daher für Θ folgenden Wert:

$$(19)\qquad \Theta = (a_2 r^n + b_2 r^{-n-1})S_2^n,$$

wo a_2 und b_2 Konstante sind, und S_2^n die Bedeutung von S^n in (9) hat, nur mit anderen Konstanten für A, B, C, D.

Trägt man den Wert (19) für Θ in die Gleichung (2) ein und faſst dieselbe als Gleichung der willkürlichen Variablen r allein auf, so kann diese Gleichung nur bestehen, wenn auf beiden Seiten derselben gleiche Potenzen von r vorkommen; d. h. die Gröfsen u, v, w müssen in Beziehung auf r von der Form $Ar^\varkappa + Br^{-\lambda}$ sein, wo A und B von r unabhängig sind. Denn Werte, die nicht diese Form haben, die sich also nicht gegen Glieder der linken Seite der Gleichung aufheben können und von Θ unabhängig sind, schliefsen wir hier aus. Trägt man solche Werte für u, v, w ein, so gewinnt man leicht für $\varkappa$ und λ die Bestimmung: $\varkappa = n + 1$, $\lambda = n$. Wir haben daher für u, v, w folgende Ausdrücke:

$$(20)\qquad \begin{cases} u = \alpha_1 r^{n+1} + \beta_1 r^{-n}, \\ v = \alpha_2 r^{n+1} + \beta_2 r^{-n}, \\ w = \alpha_3 r^{n+1} + \beta_3 r^{-n}, \end{cases}$$

wo die Gröfsen α und β als Funktionen von φ und ψ anz sind. Durch diese Werte für u, v, w gewinnt man aus Gleichu indem man die Faktoren von r^n und r^{-n-1} verschwinden läf gende zwei Gleichungen, denen die Gröfsen α und β zu genügen

$$(21)\qquad \begin{cases} a_2 S_2^n = (n+3)\alpha_1 + \frac{1}{c}\frac{dc\alpha_2}{d\varphi} + \frac{1}{c}\frac{d\alpha_3}{d\psi}, \\ b_2 S_2^n = -(n-2)\beta_1 + \frac{1}{c}\frac{dc\beta_2}{d\varphi} + \frac{1}{c}\frac{d\beta_3}{d\psi}. \end{cases}$$

§ 5. Weitere Gleichungen zur Bestimmung der α und β e die Gleichungen (1).

Setzt man die Ausdrücke (20) in (1) ein, sowie den Wei für Θ und läfst die Koefficienten gleicher Potenzen von r vers den, so ergeben sich folgende zwei Systeme von Gleichungen:

$$(22a)\qquad \begin{cases} \frac{d}{d\varphi} c \frac{d\alpha_1}{d\varphi} - (n+2)\left(\frac{dc\alpha_2}{d\varphi} + \frac{d\alpha_3}{d\psi}\right) + \frac{1}{c}\frac{d^2\alpha_1}{d\psi^2} = -\omega^2 n \\ \frac{1}{c}\frac{d^2\alpha_2}{d\psi^2} - \frac{1}{c}\frac{d^2 c\alpha_3}{d\varphi\, d\psi} - (n+1)\left(c\frac{d\alpha_1}{d\varphi} - (n+2)c\alpha_2\right) \\ \qquad = -\omega^2 a_2 c \frac{dS_2^n}{d\varphi}, \\ (n+1)\left((n+2)\alpha_3 - \frac{1}{c}\frac{d\alpha_1}{d\psi}\right) - \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{d\alpha_2}{d\psi} + \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{dc}{d} \\ \qquad = -\omega^2 a_2 \frac{1}{c}\frac{dS_2^n}{d\psi}; \end{cases}$$

$$(22b)\qquad \begin{cases} \frac{d}{d\varphi} c \frac{d\beta_1}{d\varphi} + (n-1)\left(\frac{dc\beta_2}{d\varphi} + \frac{d\beta_3}{d\psi}\right) + \frac{1}{c}\frac{d\beta_1}{d\psi^2} \\ \qquad = -\omega^2(n+1) b_2 c \\ \frac{1}{c}\frac{d^2\beta_2}{d\psi^2} - \frac{1}{c}\frac{d^2 c\beta_3}{d\varphi\, d\psi} + nc\left(\frac{d\beta_1}{d\varphi} + (n-1)\beta_2\right) = -\omega^2 b \\ n\left((n-1)\beta_3 + \frac{1}{c}\frac{d\beta_1}{d\psi}\right) - \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{d\beta_2}{d\psi} + \frac{d}{d\varphi}\frac{1}{c}\frac{dc\beta_3}{d\psi} \\ \qquad = -\omega^2 b_2 \frac{1}{c}\frac{dS_2^n}{d\psi} \end{cases}$$

Diese Gleichungen werden in Verbindung mit (21) z stimmung der α und β dienen. Aber die Form dieser Gröfs Funktionen von S läfst sich leichter aus den Differentialgleic in der Form (4) erkennen. Die erste dieser Gleichungen (4) :

für die obigen Ausdrücke (20) für u, v, w und mit Benützung des Wertes (19) für Θ in zwei Gleichungen, von denen die eine α_1, die andere β_1 bestimmt. Sie haben beide die Form:

$$\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{d\alpha_1}{d\varphi}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2\alpha_1}{d\psi^2}=C'\alpha_1+C''S_2^n,$$

aus welcher folgt, dafs sich α_1 und β_1 von S_2^n nur um Konstante unterscheiden. Setzt man daher für α_1 und β_1 Ausdrücke von der Form CS_2^n, so ergiebt die zweite der Gleichungen (4) mit Rücksicht auf (20) zur Bestimmung von α_2 und β_2 zwei Gleichungen von folgender Form:

$$(24)\qquad \frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{dc\alpha_2}{d\varphi}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2c\alpha_2}{d\psi^2}=C_1c\alpha_2+C_2c\frac{dS_2^n}{d\varphi}-C_2sS_2^n.$$

Trägt man aber in dieselbe Gleichung (4) die im ersten Teile gewonnene Lösung $\Theta=0$, $u=\frac{dR^n}{dr}S^n$ und für v einen Ausdruck von der Form $\frac{R}{r}v'$ ein, wo man also in dem Ausdruck für v den von r abhängigen Faktor, wie früher gefunden [cf. (5) und (7)], annimmt, den von φ und ψ abhängigen Faktor dagegen unbestimmt mit v' bezeichnet, — so ergiebt sich zur Bestimmung von cv' die Gleichung

$$R^n\left\{\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{dcv'}{d\varphi}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2cv'}{d\psi^2}\right\}=-r^2\frac{d^2R^n}{dr^2}cv'-2r\frac{dR^n}{dr}c\frac{dS^n}{d\varphi}$$
$$+2sS^n\frac{d}{dr}r^2\frac{dR^n}{dr}.$$

Die rechte Seite dieser Gleichung geht mit Rücksicht auf die Gleichung (8) für R^n, und weil früher $v'=\frac{dS^n}{d\varphi}$ [cf. (5) und (7)] bestimmt wurde, über in:

$$R^n\left\{C'c\frac{dS^n}{d\varphi}+C''sS^n\right\},$$

wo C' und C'' Konstante sind. Für $C'c\frac{dS^n}{d\varphi}$ kann man des Wertes für v' wegen $D'cv'+D''c\frac{dS^n}{d\varphi}$ setzen, wo $D'+D''=C'$ ist. Nach diesen Transformationen erfüllt v' die Gleichung:

$$\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{dcv'}{d\varphi}+\frac{1}{c^2}\frac{d^2cv'}{d\psi^2}=D'cv'+D''c\frac{dS^n}{d\varphi}+C''sS^n$$

welche sich nur in den Konstanten von der Gleichung (24) für α_2 resp. β_2 nach Vertauschung von S^n mit S_2^n unterscheidet. Die Gröfsen α_2, β_2 werden daher von gleicher Form in S_2^n wie v' in S^n sein.

Nach Bestimmung der Form der Gröfsen α_1, β_1, α_2, β_2 als Fu
tionen von S_2^n schliefsen wir weiter aus den Gleichungen (21), d
α_3 und β_3 die Form $c\frac{dS_2^n}{d\psi}$ haben. Denn da α_3 und β_3 Funktionen
S_2^n sein sollen, so müssen diese Gleichungen, als Gleichungen für
betrachtet, mit der Definitionsgleichung (8) für S_2^n übereinstimm

§ 5. Es hat sich gezeigt, dafs wir die Gröfsen α und β in folg
der Form anzunehmen haben:

$$\text{(25a)}\qquad \begin{cases} \alpha_1 = p_1 a_2 S_2^n, \\ \alpha_2 = p_2 a_2 \dfrac{dS_2^n}{d\varphi}, \\ \alpha_3 = p_3 a_2 \dfrac{1}{c}\dfrac{dS_2^n}{d\psi}; \end{cases}$$

$$\text{(25b)}\qquad \begin{cases} \beta_1 = q_1 b_2 S_2^n, \\ \beta_2 = q_2 b_2 \dfrac{dS_2^n}{d\varphi}, \\ \beta_3 = q_3 b_2 \dfrac{1}{c}\dfrac{dS_2^n}{d\psi}. \end{cases}$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (22a) und (22b) in folgende
Bestimmung der Konstanten p und q über:

$$\text{(26a)}\qquad \begin{cases} (p_1 - (n+2)p_2)\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{d\varphi} c\dfrac{dS_2^n}{d\varphi} + (p_1 - (n+2)p_3)\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2S_2^n}{d\psi^2} \\ \qquad\qquad = -n\omega^2 S_2^n, \\ c\dfrac{dS_2^n}{d\varphi}\left\{(n+1)(p_1 - (n+2)p_2) - \omega^2\right\} = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{dS_2^n}{d\psi}\left\{(n+1)(p_1 - (n+2)p_3) - \omega^2\right\} = 0; \end{cases}$$

$$\text{(26b)}\qquad \begin{cases} (q_1 + (n-1)q_2)\dfrac{1}{c}\dfrac{d}{d\varphi} c\dfrac{dS_2^n}{d\varphi} + (q_1 + (n-1)q_3)\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d^2S_2^n}{d\psi^2} \\ \qquad\qquad = \omega^2(n+1)S_2^n, \\ c\dfrac{dS_2^n}{d\varphi}\left\{n(\beta_1 + (n-1)\beta_2) + \omega^2\right\} = 0, \\ \dfrac{1}{c}\dfrac{dS_2^n}{d\psi}\left\{n(\beta_1 + (n-1)\beta_3) + \omega^2\right\} = 0. \end{cases}$$

Da in den letzten beiden Gleichungen dieser Systeme weder $\frac{dS}{d\varphi}$ no
$\frac{dS}{d\psi}$ verschwindet, so ergeben sich zunächst folgende Gleichungen:

$$(27a)\qquad \begin{cases}(n+1)(p_1-(n+2)p_2)-\omega^2=0,\\ (n+1)(p_1-(n+2)p_3)-\omega^2=0;\end{cases}$$

$$(27b)\qquad \begin{cases}n(q_1+(n-1)q_2)+\omega^2=0,\\ n(q_1+(n-1)q_3)+\omega^2=0.\end{cases}$$

Diese Gleichungen erfüllen mit Rücksicht auf die Definitionsgleichung (8) für S_2^n die ersten der Gleichungen (26a) und (26b) identisch; dann folgt aus ihnen

$$(28)\qquad p_2=p_3,\quad q_2=q_3.$$

Ferner haben wir die Werte (25a) und (25b) in die Gleichungen (21) einzutragen. Es ergeben sich mit Rücksicht auf (28) die Gleichungen:

$$S_2^n=\quad (n+3)p_1S_2^n+p_2\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{dS_2^n}{d\varphi}+p_2\frac{1}{c^2}\frac{d^2S_2^n}{d\psi^2},$$

$$S_2^n=-(n-2)q_1S_2^n+q_2\frac{1}{c}\frac{d}{d\varphi}c\frac{dS_2^n}{d\varphi}+q_2\frac{1}{c^2}\frac{d^2S_2^n}{d\psi^2},$$

welche durch die Gleichung (8) für S_2^n in folgende übergehen:

$$(29)\qquad \begin{cases}1=\quad (n+3)p_1-n(n+1)p_2,\\ 1=-(n-2)q_1-n(n+1)q_2.\end{cases}$$

Die Gleichungen (29) bestimmen mit den beiden Gleichungen:

$$(30)\qquad \begin{cases}0=(n+1)(p_1-(n+2)p_2)-\omega^2\\ 0=n(q_1+(n+1)q_2)+\omega^2\end{cases}$$

die Konstanten p_1, p_2, q_1, q_2 und wegen (28) auch p_3 und q_3. Es ergiebt sich:

$$(31a)\qquad \begin{cases}p_1=\dfrac{n+2-n\omega^2}{2(2n+3)},\\ p_2=\dfrac{n+1-(n+3)\omega^2}{2(n+1)(2n+3)},\\ p_3=p_2;\end{cases}$$

$$(31b)\qquad \begin{cases}q_1=\quad\dfrac{n-1-\omega^2(n+1)}{2(2n-1)},\\ q_2=-\dfrac{n-\omega^2(n-2)}{2n(2n-1)},\\ q_3=q_2.\end{cases}$$

Hiermit ist allen Gleichungen genügt. Die Konstanten a_2 und b_2 sind unbestimmt geblieben.

Wir tragen die Formeln (19), (20), (25a und b), (31a und b) zusammen und erhalten als verlangte Lösung:

$$
(32)\qquad \begin{cases} \Theta = (a_2 r^n + b_2 r^{-n}) S_2^n, \\ u = (a_2 p_1 r^{n+1} + b_2 q_1 r^{-n}) S_2^n, \\ v = (a_2 p_2 r^{n+1} + b_2 q_2 r^{-n}) \dfrac{dS_2^n}{d\varphi}, \\ w = (a_2 p_3 r^{n+1} + b_2 q_3 r^{-n}) \dfrac{1}{c} \dfrac{dS_2^n}{d\psi}. \end{cases}
$$

Die Gröfsen n und ν haben dieselbe Bedeutung wie in den Lösungen (17) und (18).

Für $n = \nu = 0$, d. h. für den Fall, dafs Θ, u, v, w von φ und ψ unabhängig sind, sind den obigen Lösungen folgende hinzuzufügen, die leicht aus den Differentialgleichungen (1) zu erhalten sind:

$$
\begin{aligned}
\Theta &= \Theta_0, \\
u &= \frac{u_0}{r^2} + \frac{\Theta_0}{3} r, \\
v &= \frac{v_0}{c} + \frac{v_1}{rc}, \\
w &= w_0 + \frac{w_1}{r},
\end{aligned}
$$

wo mit Θ_0, u_0, v_0, v_1, w_0, w_1 Konstante bezeichnet sind.

§ 6. Um die Konstanten, die in den drei gewonnenen Lösungen (17), (18) und (32) noch unbestimmt geblieben sind, durch die Oberflächenbedingungen zu bestimmen, hat man alle Einzellösungen zusammenzufassen und die Summation von $\nu = 0$ bis $\nu = n$ und von $n = 0$ bis $n = \infty$ auszuführen. So ergiebt sich als Resultat die Lösung

$$
\Theta = \Theta_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \left\{ a_2 r^n + b_2 r^{-n-1} \right\} S_2^n
$$

$$
u = \frac{u_0}{r^2} + \frac{\Theta_0}{3} r + \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big\{ (n a r^{n-1} - b(n+1) r^{-n-2}) S^n + (a_2 p_1 r^{n+1} + b_2 q_1 r^{-n}) S_2^n \Big\}
$$

$$
v = \frac{v_0}{c} + \frac{v_1}{rc} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{\nu=1}^{\nu=n} \Big\{ (a r^{n-1} + b r^{-n-2}) \frac{dS^n}{d\varphi} + (a_2 p_2 r^{n+1} + b_2 q_2 r^{-n}) \frac{dS_2^n}{d\varphi} \ldots \frac{1}{\ldots} \frac{dS_2^n}{\ldots} \Big\}
$$

$$w = w_0 + \frac{w_1}{r} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_{r=1}^{r=n} \Big\{ (ar^{n-1} + br^{-n-2}) \frac{1}{c} \frac{dS}{d\varphi} + (a_2 p_3 r^{n+1} b_2 q_3 r^{-n}) \frac{1}{c} \frac{dS_2^n}{d\psi} - (a_1 r^n + b_1 r^{-n-1}) \frac{dS_1^n}{d\varphi} \Big\}$$

Hier sind die Gröfsen S^n, S_1^n, S_2^n Kugelfunktionen zweier Veränderlichen, nur mit verschiedenen Konstanten; die Konstanten p_1, p_2, p_3, q_1, q_2, q_3 sind durch (31a und b) definiert; die Konstanten a, a_1, a_2, b, b_1, b_2, Θ_0, u_0, v_0, w_0, v_1, w_1 sind durch die Oberflächenbedingungen zu bestimmen. Wir sehen davon ab, diese Bestimmung auszuführen, da dies, wie in der Einleitung erwähnt wurde, von Lamé näher gezeigt ist. — Die Form unserer Lösung stimmt mit der Form der Lamé'schen Lösung überein, wie man leicht erkennt, wenn man die Bedeutung der Funktionen S (cf. (8)) beachtet und diejenigen Gröfsen γ, γ', β, β' bei Lamé, welche den obigen Gröfsen p_1, p_2, q_1, q_2 entsprechen, gehörig transformiert. Die Gröfsen γ, γ' β, β' unterscheiden sich von diesen nur durch den Faktor $\frac{1}{\omega^2}$, da oben $\omega^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\mu}$ gesetzt ist. Denkt man sich also in den Lamé'schen Formeln für die Konstanten A, B, C, D gesetzt $\omega^2 A$, $\omega^2 B$, $\omega^2 C$, $\omega^2 D$, so gehen die Lamé'schen Ausdrücke direkt in obige über.

Über das Gleichgewicht des elastischen Kreiscylinders.

(Von Paul Jaerisch in Hamburg.)

Bei vorliegendem Probleme wende ich zur Integration des Systems partieller simultaner Differentialgleichungen dieselbe Methode an, nach der ich das Problem des Gleichgewichts der elastischen Kugel sowie das Problem der Schwingungen derselben (letzteres Crelle Journal Bd. 88) behandelt habe. Wie sich diese Methode von derjenigen unterscheidet, die Lamé bei seiner Lösung der Differentialgleichungen für das Gleichgewicht der Kugel (Liouville J. XIX 1854) anwendet, habe ich in ersterer Arbeit auseinandergesetzt und betont, dafs die Lamé'sche Methode für Schwingungsprobleme nicht ausreicht.

Trotz der einfacheren Funktionen, mit denen man bei obigem Problem zu rechnen hat, und trotz der einfacheren Form der Differentialgleichungen, bieten sich hier Schwierigkeiten durch die gröfsere Anzahl von Lösungen dar, welche die Differentialgleichungen gestatten.

Aus einer Bemerkung in Lamé's Théorie de l'élasticité, wo Lamé das Gleichgewicht des elastischen Kreiscylinders für zwei spezielle Fälle untersucht, scheint hervorzugehen, dafs Lamé in seiner Schrift: „Mémoire sur l'équilibre interieur des corps solides homogènes" das obige Problem behandelt. Aber ohne bisher Einsicht in diese Schrift gewonnen zu haben, glaube ich doch annehmen zu können, dafs Lamé nicht zu allen, im folgenden gewonnenen Lösungen gelangt sein wird. Die Lösungen (13) und (14) ergeben sich mir durch Vergleich der Differentialgleichungen mit gewissen Identitäten, während Lamé von den Gleichungen in der Form (1) ausgeht, hierdurch die Gröfsen A, B, Γ als Funktionen von Θ und dann aus (2) die Komponenten der elastischen Verrückung u, v, w bestimmt.

Der Kreiscylinder soll isotrop vorausgesetzt werden, und aufser den auf die Oberfläche wirkenden Druckkräften sollen keine äufseren Kräfte vorhanden sein.

§ 1. Bezeichnet man mit r, φ, z die Cylinderkoordinaten und mit u, v, w die Cylinderkomponenten einer Verrückung, mit u in der Richtung von r, mit v in der Richtung der Tangente parallel dem Querschnitt, mit w in der Richtung der Cylinderachse, so nehmen die Elastizitätsgleichungen für das Gleichgewicht eines homogenen endlichen Kreiscylinders nach Lamé[1]) folgende Form an:

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Gamma}{d\varphi} - \dfrac{dB}{dz} = -\omega^2 \dfrac{d\Theta}{dr}, \\ \dfrac{dA}{dz} - \dfrac{d\Gamma}{dr} = -\omega^2 \dfrac{1}{r}\dfrac{d\Theta}{d\varphi}, \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{drB}{dr} - \dfrac{1}{r}\dfrac{dA}{d\varphi} = -\omega^2 \dfrac{d\Theta}{dz}, \end{cases}$$

wo ω^2 die gleiche Bedeutung, wie früher, hat, Θ die Volumenänderung bezeichnet und zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(2)\qquad \begin{cases} A = \dfrac{1}{r}\dfrac{drv}{dz} - \dfrac{1}{r}\dfrac{dw}{d\varphi}, \\ B = \dfrac{dw}{dr} - \dfrac{du}{dz}, \\ \Gamma = \dfrac{1}{r}\dfrac{du}{d\varphi} - \dfrac{1}{r}\dfrac{drv}{dr}, \end{cases}$$

$$(3)\qquad \Theta = \frac{1}{r}\frac{dru}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{drv}{d\varphi} + \frac{dw}{dz}.$$

1) Lamé, Théorie de l'élasticité Paris 1852. Herr Vofs (Inaug. Diss. Kiel 1880) behandelt das Gleichgewicht eines Kreisringbalkens unter der Voraussetzung, dafs die Längendimension desselben eine Gröfse höherer Ordnung gegenüber den Querdimensionen ist.

Um aus diesen Gleichungen u, v, w als Funktionen von r, φ, z zu bestimmen, hat man wieder aus ähnlichem Grunde, wie beim vorigen Problem, die beiden Fälle $\Theta = 0$ und $\Theta \lesseqgtr 0$ zu unterscheiden. Die Methode zur Auflösung der Gleichungen wird im ersten Falle die gleiche, wie dort, sein. Dagegen wählen wir im zweiten Falle einen direkteren Weg.

Bevor wir diese beiden Fälle für sich betrachten, tragen wir die beiden Werte (2) für A, B, Γ in die Gleichungen (1) ein. Dadurch ergiebt sich folgendes System bei Benutzung von (3):

$$(4)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\frac{dru}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2ru}{d\varphi^2} + \frac{d^2ru}{dz^2} = 2\Theta + (1-\omega^2) r\frac{d\Theta}{dr} - 2\frac{dw}{dz}, \\ r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{drv}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2rv}{d\varphi^2} + \frac{d^2rv}{dz^2} = (1-\omega^2)\frac{d\Theta}{d\varphi} - \frac{2}{r^2}\frac{dru}{d\varphi}, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\frac{dw}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2w}{d\varphi^2} + \frac{d^2w}{dz^2} = (1-\omega^2)\frac{d\Theta}{dz}. \end{cases}$$

I. Bestimmung von u, v, w für $\Theta = 0$.

§ 2. Setzt man in den Gleichungen (4) $\Theta = 0$, so zeigt die Form derselben, dafs man, wie beim vorigen Problem, 3 Fälle zu unterscheiden hat. Der erste Fall ist der, wo alle drei Komponenten u, v, w Werte haben; zweitens kann $w = 0$ sein und nur u und v Werte haben; drittens kann $u = w = 0$ sein, während v allein nicht verschwindet. Im ersten Falle, den wir zunächst betrachten, erhält man ohne Weiteres ein Wertsystem, wenn man die Gröfsen A, B, Γ verschwinden läfst. Wir haben dazu zu setzen:

$$(5)\qquad u = \frac{dF}{dr},\quad rv = \frac{dF}{d\varphi},\quad w = \frac{dF}{dz},$$

wo F wegen Gleichung (3) durch die Gleichung:

$$(6)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\frac{dF}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\varphi} + \frac{d^2F}{dz^2} = 0$$

bestimmt wird. Wir bezeichnen eine Einzellösung dieser Gleichung mit:

$$(7)\qquad F_i = R_i \Phi_i Z_i,$$

wo R_i, Φ_i, Z_i als Funktionen von der mit dem entsprechenden Buchstaben bezeichneten Variablen r, φ, z allein aufzufassen sind. Um diese Einzellösungen zu bestimmen hat man zunächst zu beachten, dafs F in Beziehung auf die Variable φ periodisch sein mufs und zwar mit der Periode 2π. Denn die Werte (5) für die Komponenten u, v, w geben den Gleichgewichtszustand derselben Teilchen des Kreiscylinders sowohl für den Wert φ als für den Wert $\varphi + 2\pi$ und müssen daher beim Wachsen der Variablen φ um 2π ungeändert bleiben, d. h. Φ_i mufs von der Form sein:

(8) $$\Phi_i = c_i \cos n\varphi + d_i \sin n\varphi,$$

wo c_i und d_i Konstante bedeuten, und für n die Werte $0, 1, 2 \cdots \infty$ zu setzen sind.

Nach dieser Bestimmung von Φ_i erkennt man beim Einsetzen des Wertes (7) für F in die Differentialgleichung (6), dafs das Produkt $R_i Z_i$ der Gleichung:

$$\left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR_i}{dr} - \frac{n^2}{r^2} R_i\right) Z_i + R_i \frac{d^2 Z_i}{dz^2} = 0,$$

genügt, und man schliefst hieraus bekanntlich, dafs R_i und Z_i die Gleichungen:

(9) $$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) R = 0, \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} - m^2 Z = 0 \end{cases}$$

erfüllen, wo mit m eine Konstante bezeichnet wird, die imaginäre und reelle Werte annehmen kann, und für die wir einmal ix dann λ setzen wollen. Die Einzellösungen dieser Gleichungen erhält man in der Form:

(9a) $$\begin{cases} R_0 = g_0 + h_0 \lg r & \text{für } m = n = 0, \\ R_1 = g_1 r^n + h_1 r^{-n} & \text{für } m = 0, \\ R_3 = g_3 I^n(ixr) + h_3 Y^n(ixr) & \text{für } m = ix, \\ R_4 = g_4 I^n(\lambda r) + h_4 Y^n(\lambda r) & \text{für } m = \lambda; \end{cases}$$

(9b) $$\begin{cases} Z_{0,1} = a_{0,1} + b_{0,1} z & \text{für } m = 0, \\ Z_2 = a_2 \cos xz + b_2 \sin xz & \text{für } m = ix, \\ Z_3 = a_3 e^{\lambda z} + b_3 e^{-\lambda z} & \text{für } m = \lambda. \end{cases}$$

Hier deuten die unteren Indices die Zugehörigkeit der Funktionen R und Z an; g, h, a, b sind Konstante. x und λ nehmen alle Werte $1, 2, 3 \cdots \infty$ an.

Für F gewinnt man jetzt den Ausdruck:

(10) $$F = R_0 Z_0 + R_1 Z_1 \Phi_1 + R_2 Z_2 \Phi_2 + R_3 Z_3 \Phi_3.$$

§ 3. Die Differentialgleichungen in der Form (4) zeigen, dafs für $\Theta = 0$ noch ein zweites Wertsystem u, v, w existiert, für welches alle drei Komponenten Werte haben, die Gröfsen A, B, Γ dagegen nicht verschwinden. Dazu bemerke man, dafs, wenn Z der Gleichung

(10a) $$\frac{d^2 Z}{dz^2} - m^2 Z = 0$$

genügt, die Funktion zZ die Gleichung

(10b) $$\frac{d^2 zZ}{dz^2} - m^2 zZ = 2\frac{dZ}{dz}$$

füllt. Setzt man nun

1a) $$w = RZ\Phi,$$

weist das Glied $-2\frac{dw}{dz}$ der rechten Seite der ersten der Gleichungen darauf hin, dafs man anzusetzen hat:

b) $$ru = -RzZ\Phi.$$

Der Wert für v ist aus Gleichung (3) zu entnehmen. Es erbt sich:

) $$v = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{dR}{dr}zZ - rR\frac{dZ}{dz}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}$$ [1].

Diese Werte für u, v, w erfüllen die Gleichungen (4) und (3), nn R und Z den Gleichungen (9) genügen und Φ in der Form (8) genommen wird.

Wir haben somit folgendes Wertsystem gewonnen:

3) $$\begin{cases} u = -\frac{R}{r}zZ\Phi, \\ v = -\frac{1}{n^2}\left(\frac{dR}{dr}zZ - rR\frac{dZ}{dz}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w = RZ\Phi. \end{cases}$$

ese Lösung gilt nicht für $n = 0$ des Faktors $\frac{1}{n^2}$ wegen.

Aus (13) gewinnt man drei Lösungen, indem man R, Φ, Z der ihe nach ersetzt durch $R_1'\Phi_1'Z_1'$, $R_2'\Phi_2'Z_2'$, $R_3'\Phi_3'Z_3'$, wo die öfsen R', Φ', Z' durch dieselben Ausdrücke zu definieren sind, wie mit den gleichen Buchstaben und gleichen unteren Indices bechneten Gröfsen R, Φ, Z in (8) und (9a, b); nur sind an Stelle r Konstanten a, b, c, d, g, h andere a', b', c', d', g', h' zu setzen.

§ 4. Wir gehen nun zum zweiten Fall über, für welchen aufser r Volumenänderung Θ auch die Komponente w verschwindet und halten zur Bestimmung der Komponenten u und v aus (4) und (3) e Gleichungen:

4) $$\begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dru}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2ru}{d\varphi} + \frac{d^2ru}{dz^2} = 0, \\ r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{drv}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2rv}{d\varphi^2} + \frac{d^2rv}{dz^2} = -\frac{2}{r^2}\frac{dzu}{d\varphi}, \\ \frac{dru}{dr} + \frac{dv}{d\varphi} = 0. \end{cases}$$

1) Zu diesem Werte für v wäre noch ein von φ unabhängiges Glied hinzufügen. Doch konnte dasselbe hier weggelassen werden, da es von den Werten 1a und b) für u und w unabhängig ist, während wir in diesem § nur solche sungen suchen, für welche die Komponenten u v w gleichzeitig verschwinden.

Die dritte dieser Gleichungen verlangt zu setzen:

$$(15) \qquad ru = \frac{df}{d\varphi}, \quad v = -\frac{df}{dr};$$

und diese Werte genügen auch den beiden ersten Gleichungen (4), wenn f durch dieselbe Gleichung (6) wie F im § 2 bestimmt wird. f hat daher dieselbe Form wie F in (9), nämlich:

$$(16) \quad f = R_0'' Z_0'' + R_1'' \Phi_1'' Z_1'' + R_2'' \Phi_2'' Z_2'' + R_3'' \Phi_3'' Z_3'',$$

wo die Funktionen R'', Φ'', Z'' in gleicher Weise wie die Funktionen R, Φ, Z im § 2 zu definieren sind durch (8), (9a und b); nur dafs dort an Stelle der Konstanten g, h, a, b, c, d andere Konstanten treten, die wir entsprechend mit $g'', h'', a'', b'', c'', d''$ bezeichnen.

§ 4. Für den dritten Fall $\Theta = u = w = 0$ erhält man zur Bestimmung von v die Gleichungen:

$$(17) \qquad \begin{cases} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{drv}{dr} + \frac{d^2 rv}{dz^2} = 0, \\ \frac{dv}{d\varphi} = 0. \end{cases}$$

Setzt man $rv = RZ$, wo Z die in (9b) angegebenen Werte annehmen kann und bedenkt, dafs die Gleichung:

$$(18) \qquad r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \lambda^2 R = 0$$

zur Lösung hat:

$$Ar \frac{d I^n_{(\lambda r)}}{dr} + Br \frac{d Y^0_{(\lambda r)}}{dr},$$

und für $\lambda = 0$:

$$C + Dr^2,$$

wo A, B, C, D Konstante sind, so werden für rv als Lösungen der Gleichung (17) Ausdrücke erhalten, welche bis auf dasjenige, welches dem Werte $\lambda = 0$ entspricht, in der Lösung (15) enthalten sind. Wir haben daher den früheren Lösungen folgendes Wertsystem zuzufügen

$$(19) \qquad u = 0, \; v = \frac{a}{r} + br, \; w = 0$$

mit den Konstanten a und b.

Fassen wir alle gewonnenen Lösungen zusammen, so lassen sich für den betrachteten Fall $\Theta = 0$ die Komponenten $u\, v\, w$ folgendermafsen darstellen:

$$(20)\qquad \begin{cases} u = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{\nu=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{dF}{dr} + u' + \frac{1}{r}\frac{df}{d\varphi} \right\}, \\ v = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{1}{r}\frac{dF}{d\varphi} + v' - \frac{df}{dr} \right\} + \left(ar + \frac{b}{r}\right) z, \\ w = \sum_{k=0}^{k=\infty} \sum_{n=0}^{n=\infty} \left\{ \frac{dF}{dz} + w' \right\}. \end{cases}$$

Hier ist F definiert durch (9), (9a), (9b), 9c) und (8); f durch (16). Für u', v', w' sind die Lösungen, die aus (13) hervorgehen, zu setzen; a und b sind Konstante. λ ist in obigen Formeln durch k zu ersetzen.

II. Bestimmung von u, v, w für $\Theta \gtrless 0$.

§ 5. In diesem Teile haben wir solche Werte für u, v, w aufzusuchen, welche von Θ abhängen; Θ selbst ist, wie aus den Gleichungen (3) und (4) hervorgeht, bestimmt durch die Gleichung:

$$(21)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\Theta}{dr} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\Theta}{d\varphi^2} + \frac{d^2\Theta}{dz^2} = 0.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie (6). Wir sehen diese als gelöst an und setzen für Θ den Ausdruck:

$$(22)\qquad \Theta = R\Phi Z$$

in die Differentialgleichungen (4) und (3) ein, wobei R und Z den Gleichungen (9) genügen mögen und Φ von der Form (8) sei. Ähnliche Ausdrücke setzen wir für u, v, w an:

$$(23)\qquad \begin{cases} ru = S_1 \Phi Y_1, \\ rv = S_2 \frac{d\Phi}{d\varphi} Y_2, \\ w = S_3 \Phi Y_3, \end{cases}$$

wo die Gröfsen S und Y nur Funktionen von r resp. z sein sollen. Der von φ abhängige Faktor ist in (23) mit Φ wie in (22) bezeichnet, weil, wie früher, in Beziehung auf φ nur die Ausdrücke $\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix} n\varphi$ vorkommen können; diese Faktoren müssen sich aus den Differentialgleichungen herausheben lassen.

Die Gleichungen (4) und (3) gehen durch die Annahme der Formeln (22) und (23) in folgende über:

$$(24)\quad \begin{cases} \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dS_1}{dr} - \frac{n^2}{r^2}S_1\right)Y_1 + S_1\frac{d^2Y_1}{dz^2} = 2RZ + (1-\omega^2)\,r\,\frac{dR}{dr}Z \\ \qquad\qquad - 2S_3\frac{dY_3}{dz}, \\ \left(r\,\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dS_2}{dr} - \frac{n^2}{r^2}S_2\right)Y_2 + S_2\frac{d^2Y_2}{dz^2} = (1-\omega^2)\,RZ \\ \qquad\qquad - \frac{2}{r^2}S_1Y_1, \\ \left(\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dS_3}{dr} - \frac{n^2}{r^2}S_3\right)Y_3 + S_3\frac{d^2Y_3}{dz^2} = (1-\omega^2)\,R\frac{dZ}{dz}; \end{cases}$$

$$(24a)\qquad RZ = \frac{1}{r}\frac{dS_1}{dr}Y_1 - \frac{n^2}{r^2}S_2Y_2 + S_3\frac{dY_3}{dz}.$$

R und Z genügen den Gleichungen:

$$(25)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dR}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0 \\ \qquad \frac{d^2Z}{dz^2} - m^2Z = 0. \end{cases}$$

Bei Lösung dieser Gleichungen, sowie auch später, wird von der identischen Gleichung (10b), so wie von folgenden Sätzen über die Cylinderfunktionen Gebrauch gemacht werden:

Genügt R der Gleichung

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dR}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0,$$

so hat die Gleichung:

$$(26)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dG}{dr} + \left(q^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)G = aR + br\,\frac{dR}{dr},$$

wo a und b Konstante bezeichnen, das von r abhängige Integral:

$$G = c_1R + c_2\,r\,\frac{dR}{dr},$$

$$c_1 = \frac{a}{q^2-m^2} - \frac{2m^2b}{q^2-m^2},\quad c_2 = \frac{b}{q^2-m^2}.$$

Dieses Integral gilt nicht für $q = m$. In diesem Falle genügt der Gleichung:

$$(27)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dH}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)H = aR + br\frac{dR}{dr}$$

$$H = \frac{b}{4}r^2R + \frac{b-a}{2m^2}\,r\,\frac{dR}{dr}.$$

Wir fügen noch folgenden Satz hinzu, der später Anwendung finden wird: die Gleichung

$$(28)\qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{d\varrho}{dr} = r^\nu(a + b\lg r),$$

wo a und b zwei Konstante sind, hat das allgemeine Integral:

(28a) $$\varrho = \frac{r^{\nu+2}}{(\nu+2)^2}\left(\frac{(\nu+2)\,a - 2b}{(\nu+2)^2} + b\lg r\right) + A\lg r + B,$$

wo A und B die Integrationskonstanten bezeichnen.

§ 6. Wir gehen nun zur Bestimmung der Gröfsen S und Y den Gleichungen (24) und (24a) gemäfs über. Dazu sind zwei Wege möglich: Entweder wir sehen diese Gleichungen als Gleichungen der Variablen z zur Bestimmuug von Y_1, Y_2, Y_3 an, dann mufs über die Funktionen S_1, S_2, S_3 von r so verfügt werden, dafs die von r abhängigen Faktoren sich aus den Gleichungen herausheben; — oder wir sehen die Gleichungen als solche zur Bestimmung der Funktionen S_1, S_2, S_3 von r an, dann müssen die Gröfsen Y_1, Y_2, Y_3 so gewählt werden, dafs die von z abhängigen Faktoren der Glieder der Gleichungen auf beiden Seiten gleich werden. Beide Wege können verschiedene Lösungen ergeben. Wir gehen zunächst den ersten Weg und erinnern daran, dafs nur solche Werte für S und Z zu wählen sind, die gleichzeitig mit R resp. Z verschwinden.

Die dritte der Gleichungen (24) bestimmt S_3 und Y_3 als Funktionen von S und Y. Wir haben, damit sich der Faktor R weghebt, der Gleichung (25) für R wegen zu setzen:

(29) $$S_3 = R;$$

ferner um die erste der Gleichungen zu erfüllen, machen wir mit Rücksicht auf die Identitäten (26) und (27) die Annahme

(29a) $$S_1 = \xi R + \eta r\frac{dR}{dr} + \zeta r^2 R,$$

wo ξ, η, ζ Konstante bezeichnen. Dann gewinnt man zunächst für Y_3 die Gleichung:

(29b) $$\frac{d^2 Y_3}{dz^2} - m^2 Y_3 = (1-\omega^2)\frac{dZ}{dz},$$

welche wegen der Identität (10b) die mit Z verschwindende Lösung

(30) $$Y_3 = \frac{1-\omega^2}{2} z\, Z$$

ergiebt.

Die erste der Gleichungen (24) geht durch (29) und (29a), wenn man die Koeffizienten von R, $r\frac{dR}{dr}$ und $r^2 R$ verschwinden läfst, in folgende Gleichungen über:

(31) $$\begin{cases} \zeta\left(\frac{d^2 Y_1}{dz^2} - m^2 Y_1\right) = 0 \\ \xi\ \frac{d^2 Y_1}{dz^2} - m^2(\xi + 2\eta)\, Y_1 + 4\zeta Y_1 = 2Z - 2\frac{dY_3}{dz} \\ \eta\ \frac{d^2 Y_1}{dz^2} - m^2\eta\, Y_1 + 4\zeta Y_1 = -(\omega^2 - 1)\, Z. \end{cases}$$

Die erste dieser Gleichungen wird erfüllt, wenn entweder ξ od $\frac{d^2 Y_1}{dz^2} - m^2 Y_1$ verschwindet. Wäre das letztere der Fall, so müfs der 3ten Gleichung wegen $Y_1 =$ konst. Z sein; und der 2ten Gleic ung wegen erhielte man mit Rücksicht auf die Gleichung (25) für .

$$\frac{dY_3}{dz} = \text{konst. } Z.$$

Diese Gleichung ist mit dem Werte, der sich in (30) für Y_3 erga unverträglich.

Die zweite Möglichkeit die erste der Gleichungen (31) zu e füllen ist:

$$\xi = 0. \tag{32}$$

Wir denken uns jetzt in die früheren Gleichungen für Z gesetzt η und für ξ ηp, so gehen die Gleichungen (31) in folgende über:

$$\begin{cases} p\frac{d^2 Y_1}{dz^2} - m^2(p+2)\,Y_1 = 2Z - 2\frac{dY_3}{dz}, \\ \frac{d^2 Y_1}{dz^2} - m^2 Y_1 = -(\omega^2 - 1)\,Z. \end{cases} \tag{33}$$

Die zweite dieser Gleichungen läfst mit der Gleichung (29b) auf d Zusammenhang der Funktionen Y_3 und Y_1:

$$Y_3 = \frac{dY_1}{dz} \tag{33a}$$

schliefsen. Hierdurch geht die erste der Gleichungen (33) in d zweite über, wenn

$$p = \frac{2\omega^2}{1-\omega^2} \tag{34}$$

angenommen wird.

Die zweite Gleichung (33) wird durch (29b) identisch erfüllt b der Annahme:

$$Y_1 = \frac{1}{m^2}\frac{dY_3}{dz} + \frac{\omega^2 - 1}{m^2} Z. \tag{35}$$

Hieraus erhält man durch (30):

$$Y_1 = -\frac{\omega^2 - 1}{2m^2}\left(z\frac{dZ}{dz} - Z\right). \tag{36}$$

Somit wird obigen Gleichungen (31) genügt. Der Faktor η kom nur in der Verbindung ηZ vor. Nun hat Z als allgemeines Integ der Gleichung:

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} - m^2 Z = 0$$

die Form:

$$Z = AX_1 + BX_2,$$

wo X_1, X_2 die Einzelintegrale bezeichnen; und da A und B vorläufig willkürliche Konstante sind, so können wir uns η in dieselben eingehend denken und daher in obigem $\eta = 1$ setzen.

Es haben sich für die gesuchten Gröfsen folgende Werte ergeben:

$$(37)\qquad \begin{cases} S_1 = \frac{2\omega^2}{1-\omega^2} R + r\frac{dR}{dr}, \\ S_3 = R, \\ Y_1 = \frac{1-\omega^2}{2m^2}\left(z\frac{dZ}{dz} - Z\right), \\ Y_3 = \frac{1-\omega^2}{2} zZ. \end{cases}$$

§ 7. Es ist noch der Wert für $S_2\, Y_2$ zu bestimmen. Dies geschieht durch Gleichung (24a). Man erhält zunächst mit Rücksicht auf die Werte (37) für S_3, Y_3:

$$(38)\qquad -n^2 S_2 Y_2 = r^2 R\left(Z - \frac{1-\omega^2}{2}\frac{dzZ}{dz}\right) - r\frac{dS_1}{dr} Y_1.$$

Dafs dieser Wert für $S_2\, Y_2$ die zweite der Gleichungen (24) identisch erfüllt, läfst sich leicht zeigen. Wir setzen dazu zur Abkürzung:

$$(39)\qquad T = Z - \frac{1-\omega^2}{2}\frac{dzZ}{dz},$$

versehen die Glieder der zweiten Gleichung (24) mit dem Faktor $-n^2$, so geht dieselbe durch (38) und (39) in folgende Gleichung über:

$$\left(r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr^2R}{dr} - n^2R\right) T + r^2R\frac{d^2T}{dz^2} - r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\frac{dS_1}{dr} Y_1 + \frac{n^2}{r}\frac{dS_1}{dr} Y_1 - r\frac{dS_1}{dr}\frac{d^2Y_1}{dz^2} = (\omega^2 - 1) n^2 RZ + \frac{2n^2}{r^2} S_1 Y_1;$$

nun ist:

$$r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dr^2R}{dr} = r\frac{d}{dr} r\frac{dR}{dr} + 2r\frac{dR}{dr},$$

$$\frac{n^2}{r}\frac{dS_1}{dr} - \frac{2n^2}{r^2} S_1 = \frac{n^2}{r}\frac{d\frac{S_1}{r^2}}{dr},$$

wie sich durch einfache Rechnung ergiebt. Formt man noch die erste dieser Identitäten durch die Gleichung (25) für R um, so geht die obige Gleichung über in:

$$\left(-m^2r^2R + 2r\frac{dR}{dr}\right) T + r^2R\frac{d^2T}{dz^2}$$

$$- r\frac{d}{dr}\left\{\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r\frac{dS_1}{dr} Y_1 - \frac{n^2}{r^2} S_1 Y_1 + S_1\frac{d^2Y_1}{dz^2}\right\} = (\omega^2 - 1) n^2 RZ.$$

Mit Benützung der ersten Gleichung (24), welcher durch (37)

genügt wird, und welche sich durch (37) und (39) umformen läfst in:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dS_1}{dr}\,Y_1 - \frac{n^2}{r^2}\,S_1\,Y_1 + S_1\,\frac{d^2Y_1}{dz^2} = 2RT + (1-\omega^2)\,r\,\frac{dR}{dr}\,Z,$$

erhält man nun die Gleichung:

$$\left(-m^2r^2R + 2r\,\frac{dR}{dr}\right)T + r^2R\,\frac{d^2T}{dr^2} - 2r\,\frac{dR}{dr}\,T + (\omega^2-1)\,r\,\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dR}{dr}\,Z = (\omega^2-1)\,n^2RZ,$$

welche mit Rücksicht auf den Wert

$$r\,\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dR}{dr} = -(r^2m^2 - n^2)\,R,$$

übergeht in:

$$\frac{d^2T}{dz^2} - m^2T = m^2(\omega^2-1)\,Z,$$

und weiter wegen des Ausdrucks (39) für T in:

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{d^2zZ}{dz^2} - m^2zZ\right) = 2m^2Z.$$

Diese Gleichung geht durch die Identität (10b) in die Bestimmungsgleichung (10a) für Z über; q. e. d.

§ 8. Der gefundene Ausdruck (38) für S_2Y_2 geht durch die Werte (37) für S_1 und Y_1 und mit Rücksicht auf die Gleichung für R über in:

$$S_2Y_2 = -\frac{r^2}{n^2}\,R\left(Z - \frac{1-\omega^2}{2}\,\frac{dzZ}{dz}\right) + \frac{1-\omega^2}{2m^2n^2}\left(\frac{2\omega^2}{1-\omega^2}\,r\,\frac{dR}{dr} - (r^2m^2 - n^2)\,R\right)\left(z\,\frac{dZ}{dz} - Z\right),$$

aus welchem man schliefslich durch einige Reduktionen erhält:

$$(40)\quad S_2Y_2 = -\frac{3\omega^2}{n^2}\,r^2RZ + \left(\frac{1-\omega^2}{2m^2}\,R + \frac{\omega^2}{m^2-n^2}\,r\,\frac{dR}{dr}\right)\left(z\,\frac{dZ}{dz} - Z\right).$$

Tragen wir nun diesen Ausdruck, sowie die Werte für S_1, S_3, Y_1, Y_3 aus (37) in (23) ein, so erhalten wir die gewünschte Lösung in folgender Form:

$$(41)\quad \begin{cases} \Theta = RZ\Phi, \\ u = \left(\dfrac{\omega^2}{m^2}\,\dfrac{R}{r} + \dfrac{1-\omega^2}{2m^2}\,\dfrac{dR}{dr}\right)\left(z\,\dfrac{dZ}{dz} - Z\right)\Phi, \\ v = \left\{-\dfrac{3\omega^2}{2n^2}\,rRZ + \left(\dfrac{1-\omega^2}{2m^2}\,\dfrac{R}{r} + \dfrac{\omega^2}{m^2n^2}\,\dfrac{dR}{dr}\right)\left(z\,\dfrac{dZ}{dz} - Z\right)\right\}\dfrac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w = \dfrac{1-\omega^2}{2}\,RzZ\Phi. \end{cases}$$

Aus (41) gewinnt man zwei Lösungen, indem man für m einmal ix,

dann λ setzt. Die entsprechenden Werte für R, Z, Φ (cf. § 5) seien R_1^0, Z_1^0, Φ_1^0; R_2^0, Z_2^0, Φ_2^0, dann erhält man:

$$\text{(41a)} \qquad \begin{cases} R_1^0 = G_1^0 I^n_{(i\varkappa r)} + H_1^0 Y^n_{(i\varkappa r)}, \\ R_2^0 = G_2^0 I^n_{(\lambda r)} + H_2^n Y^n_{(\lambda r)}, \end{cases}$$

$$\text{(41b)} \qquad \begin{cases} Z_1^0 = A_1^0 \cos \varkappa z + B_1^0 \sin \varkappa z, \\ Z_2^0 = A_2^0 e^{\lambda z} + B_2^0 e^{-\lambda z}; \end{cases}$$

$$\text{(41c)} \qquad \Phi_{1,2}^0 = C_{1,2}^0 \cos n\varphi + D_{1,2}^0 \sin n\varphi.$$

Wie erwähnt ist, genügt Θ derselben Gleichung wie F im § 5. Daher hätte man für R, Φ, Z oben alle entsprechenden Werte (8) (9a) (9b) zu setzen, während die Ausdrücke (41a, b, c) nur den letzten beiden dieser Werte entsprechen. Aber da die obigen Lösungen weder für $m = 0$ noch für $n = 0$ gültig sind, so sind die Fälle, daſs Θ und die Komponenten von z resp. φ unabhängig sind, für sich zu betrachten. Bevor wir dazu übergehen, sollen die Differentialgleichungen nach der zweiten Methode gelöst werden.

Die Gröſsen A, B, C, D, G, H in (41a, b, c) bedeuten Konstante, die vorläufig unbestimmt bleiben. $\varkappa$, λ und n nehmen alle Werte $1, 2, 3 \ldots \infty$ an.

§ 9. Nach § 6 besteht die zweite Methode, die Gleichungen (24) und (24a) aufzulösen darin, daſs wir über die Gröſsen Y_1, Y_2, Y_3 als Funktionen von z so verfügen, daſs sich die von z abhängigen Faktoren in den Gliedern der Gleichungen wegheben. Wir haben daher zunächst wegen der dritten Gleichung (24) zu setzen:

$$\text{(42)} \qquad Y_3 = \frac{dZ}{dz},$$

und dann der ersten beiden dieser Gleichungen wegen:

$$\text{(43)} \qquad Y_1 = Y_2 = Z.$$

Hierdurch gehen die Gleichungen (24) und (24a) mit Rücksicht auf die Gleichung (25) für Z in folgende über:

$$\text{(44)} \qquad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dS_1}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) S_1 = 2R + (1-\omega^2) r \frac{dR}{dr} - 2m^2 S_3, \\ r \frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{dS_2}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) S_2 = (1-\omega^2) R - \frac{2S_1}{r^2}, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dS_3}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) S_3 = (1-\omega^2) R, \\ R = \frac{1}{r}\frac{dS_1}{dr} - \frac{n^2}{r^2} S_2 + m^2 S_3, \end{cases}$$

welche zur Bestimmung der Gröſsen S dienen. Der dritten dieser Gleichungen zufolge und mit Rücksicht auf die Gleichung (25) für

R, sowie auf die erste Identität (26) und weil wir, wie früher bemerkt, nur solche Glieder der S zu berücksichtigen haben, die mit R zugleich verschwinden, ergiebt sich:

$$S_3 = -\frac{1-\omega^2}{2m^2} r \frac{dR}{dr}. \tag{45}$$

Hierdurch geht die erste der Gleichungen (44) über in:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dS_1}{dr} + \left(m^2 - \frac{n^2}{r^2}\right) S_1 = 2R + 2(1-\omega^2) r \frac{dR}{dr},$$

aus welcher mit Rücksicht auf die Identität (27) für S_1 der Wert hervorgeht:

$$S_1 = \frac{1-\omega^2}{2} r^2 R - \frac{\omega^2}{m^2} r \frac{dR}{dr}. \tag{46}$$

Nun ergiebt sich der Wert für S_2 aus der vierten Gleichung (44) mit Rücksicht auf die gefundenen Werte (42), (43), (44), (45), (46):

$$-\frac{n^2 S_2}{r^2} = R - \frac{1-\omega^2}{2}\frac{1}{r}\frac{dr^2 R}{dr} + \frac{\omega^2}{m^2}\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dR}{dr} + \frac{1-\omega^2}{2} r \frac{dR}{dr};$$

mit Rücksicht auf die Gleichung (25) für R folgt hieraus:

$$S_2 = -\frac{\omega^2}{m^2} R. \tag{47}$$

Daſs die erhaltenen Werte für S_1 und S_2 auch die zweite Gleichung identisch erfüllen, ist leicht einzusehen.

Wir erhalten somit folgende Auflösung der Differentialgleichungen, wenn wir die Werte (42), (43), (45), (46), (47) für die Gröfsen S und Y in (23) eintragen.

$$\begin{cases} \Theta = R\Phi Z, \\ u = \left(\frac{1-\omega^2}{2} rR - \frac{\omega^2}{m^2}\frac{dR}{dr}\right)\Phi Z, \\ v = -\frac{\omega^2}{m^2} R \frac{d\Phi}{d\varphi} Z, \\ w = -\frac{1-\omega^2}{2} r \frac{dR}{dr} \Phi \frac{dZ}{dz}. \end{cases} \tag{48}$$

Hieraus gewinnt man zwei Lösungen, indem man für m einmal $i\varkappa$ dann λ setzt. Nennt man die den Gröfsen R, Φ, Z entsprechenden Werte R_1^1, Φ_1^1, Z_1^1 resp. R_2^1, Φ_2^1, Z_2^1, so sind diese Gröfsen definiert durch die mit gleichem Buchstaben und gleichem unteren Index bezeichneten Gröfsen in (41a, b, c); nur sind dort die Konstanten $A^0, B^0, C^0, D^0, G^0, H^0$ durch andere $A^1, B^1, C^1, D^1, G^1, H^1$ zu ersetzen. Die Lösung (48) gilt ebenso wie (41) nicht für den Wert $m = 0$.

§ 10. Wir kommen nun zur Aufsuchung der speziellen Lösungen, welche den Lösungen des vorigen § zunächst für $m = 0$ zuzufügen

sind. Es ist hier $\frac{d^2\Theta}{dz^2} = 0$ und wir setzen mit Rücksicht auf die Differentialgleichung, der Θ genügt, indem wir die Konstanten mit $G_{3,4}$ $H_{3,4}$ bezeichnen:

$$\Theta = \{(G_3 + H_3 z)r^n + (G_4 + H_4 z)r^{-n}\}\ \Phi_3'. \tag{49}$$

Die Komponenten u, v, w können in Beziehung auf r nur Exponentialfunktionen enthalten, die man leicht aus der Form der Gleichungen (4) und (3) bestimmt. Man gelangt zu den Ausdrücken

$$\begin{cases} ru = (\alpha_1 r^{n+2} + \beta_1 r^{-n+2})\,\Phi \\ rv = (\alpha_2 r^{n+2} + \beta_2 r^{-n+2})\,\frac{d\Phi}{d\varphi} \\ w = (\alpha_3 r^{n} + \beta_3 r^{-n})\,\Phi \end{cases} \tag{49a}$$

Hierdurch gehen die Differentialgleichungen (4) und (3) in folgende über, indem dabei beachtet ist, dafs die Glieder mit positivem Exponenten n für sich, sowie die mit negativem Exponenten für sich verschwinden müssen:

$$\begin{cases} 4(n+1)\alpha_1 r^n + \frac{d^2\alpha_1}{dz^2} r^{n+2} = (2+nr)r^n(G_3 + H_3 z) - 2r^n \frac{d\alpha_3}{dz}, \\ 2n\alpha_2 r^n + \frac{d^2\alpha_2}{dz^2} r^{n+2} = \varepsilon r^n (G_3 + H_3 z) - 2\alpha_1 r^n, \\ \frac{d^2\alpha_3}{dz^2} = \varepsilon H_3, \\ G_3 + H_3 z = (n+2)\alpha_1 - n^2\alpha_2 + \frac{d\alpha_3}{dz}; \end{cases} \tag{50a}$$

$$\begin{cases} -4(n-1)\beta_1 r^{-n} + \frac{d^2\beta_1}{dz^2} r^{-n+2} = (2 - n\varepsilon) r^{-n} (G_4 + H_4 z) \\ \qquad\qquad - 2r^{-n} \frac{d\beta_3}{dz}, \\ -2n\beta_2 r^{-n} + \frac{d^2\beta_2}{dz^2} r^{-n+2} = \varepsilon r^{-n}(G_4 + H_4 z) - 2\beta_1 r^{-n}, \\ \frac{d^2\beta_3}{dz^2} = \varepsilon H_4, \\ G_4 + H_4 z = -(n-2)\beta_1 - n^2\beta_2 = \frac{d\beta_3}{dz}. \end{cases} \tag{50b}$$

Hier ist zur Abkürzung gesetzt:

$$\varepsilon = 1 - \omega^2, \tag{50c}$$

und die Faktoren r^n resp. r^{-n} der dritten Gleichungen dieser Systeme sind weggelassen. Die ersten zwei Gleichungen derselben verlangen, da die Glieder gleicher Potenzen von r für sich verschwinden müssen, dafs

$$\frac{d^2\alpha_1}{dz^2} = \frac{d^2\alpha_2}{dz^2} = \frac{d^2\beta_1}{dz^2} = \frac{d^2\beta_2}{dz} = 0$$

sei. Und setzen wir der dritten Gleichungen dieser Systeme weg

$$(51)\qquad \begin{cases} \alpha_3 = p_0 + \frac{p_1}{2} z + \frac{\varepsilon H_3}{2} z^2, \\ \beta_3 = q_0 + \frac{q_1}{2} z + \frac{\varepsilon H_4}{2} z^2, \end{cases}$$

so ergeben die ersten beiden Gleichungen der Systeme folgende We für α_1, α_2, β_1, β_2:

$$(51a)\qquad \begin{cases} \alpha_1 = \frac{1}{4(n+1)} \left\{(2+n\varepsilon)G_3 - p_1 + (2+(n-2)\varepsilon)H_3 z\right\} \\ \alpha_2 = \frac{1}{4n(n+1)} \left\{((n+2)\varepsilon - 2)G_3 + p_1 + ((n+4)\varepsilon - 2)H_3 \right. \end{cases}$$

$$(51b)\qquad \begin{cases} \beta_1 = -\frac{1}{4(n-1)} \left\{(2-n\varepsilon)G_4 - q_1 + (2-(n+2)\varepsilon)H_4 \right. \\ \beta_2 = -\frac{1}{4n(n-1)} \left\{((n-2)\varepsilon + 2)G_4 - q_1 + ((n-4)\varepsilon + 2)H_4 \right. \end{cases}$$

Durch diese Werte für die Gröfsen α und β werden die dritten Gleichungen (50a und b) identisch erfüllt, und zwar für jeden W der Konstanten p_0, q_0, p_1, q_1. Da also diese Konstanten von Gröfsen G und H unabhängig werden, d. h. die Glieder der Kc ponenten u, v, w, die diesen Konstanten p und q entsprechen, abhängig von Θ werden, so kann

$$p_0 = q_0 = p_1 = q_1 = 0$$

gesetzt werden.

Man erhält somit aus (49a) folgende Lösung:

$$(52)\qquad \begin{cases} \Theta = \left\{(G_3 + H_3 z) r^n + (G_4 + H_4 z) r^{-n}\right\} \Phi_3' \\ u = \left\{(\varepsilon_1 G_3 + \varepsilon_2 H_3 z) r^{n+1} + (\delta_1 G_4 + \delta_2 H_4) r^{-n+1}\right\} \Phi_3' \\ v = \left\{(\varepsilon_3 G_3 + \varepsilon_4 H_3 z) r^{n+1} + (\delta_3 G_4 + \delta_4 H_4) r^{-n+1}\right\} \frac{d\Phi_3}{d\varphi} \\ w = \frac{\varepsilon}{2} H_3 r^n + H_4 r^{-n}) z^2 \Phi_3'. \end{cases}$$

Hier hat Φ_3' den Wert:

$$(52a)\qquad \Phi_3' = C_3 \cos n\varphi + D_3 \sin n\varphi$$

mit den Konstanten C_3, D_3, und zur Abkürzung ist mit Rücksi auf den Wert (50c) für ε gesetzt:

$$(52a)\qquad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{n(1-\omega^2)+2}{4(n+1)}, & \delta_1 = \frac{n(1-\omega^2)-2}{4(n-1)}, \\ \varepsilon_2 = \frac{n(1-\omega^2)+2\omega^2}{4(n+1)}, & \delta_2 = \frac{n(1-\omega^2)-2\omega^2}{4(n-1)}, \\ \varepsilon_3 = \frac{n(1-\omega^2)-2\omega^2}{4n(n+1)}, & \delta_3 = -\frac{n(1-\omega^2)+2\omega^2}{4n(n-1)}, \\ \varepsilon_4 = \frac{(n+2)(1-\omega^2)-2\omega^2}{4n(n+1)}; & \delta_4 = -\frac{(n-2)(1-\omega^2)+2\omega^2}{4n(n-1)} \end{cases}$$

Die Lösung (52) gilt der Faktoren n und $n-1$ in den Nenner von (52a) wegen nur für die Werte $n = 2, 3, \ldots \infty$. Für $n = 1$ hat man

(52b) $$G_4 = H_4 = 0$$

zu setzen und der Lösung (52) die folgende hinzuzufügen:

$$(53)\quad \begin{cases} \Theta = (G_0 + H_0 z) r (C_0 \cos\varphi + D_0 \sin\varphi), \\ u = (\varepsilon_1' G_0 + \varepsilon_2' H_0 z) r^2 (C_0 \cos\varphi + D_0 \sin\varphi), \\ v = (\varepsilon_3' G_0 + \varepsilon_4' H_0 z) r^2 (D_0 \cos\varphi - C_0 \sin\varphi), \\ w = \frac{z}{2} H_0 z^2 r (C_0 \cos\varphi + D_0 \sin\varphi), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

$$(54)\quad \begin{cases} \varepsilon_1 = \frac{3-\omega^2}{8}, & \varepsilon_2 = \frac{1+\omega^2}{8}, \\ \varepsilon_3 = \frac{1-3\omega^2}{8}, & \varepsilon_4 = \frac{3-5\omega^2}{8}. \end{cases}$$

Für $n = 0$ ist eine besondere Betrachtung erforderlich, die wir im folgenden § verfolgen.

§ 11. Wir suchen eine Einzellösung der Differentialgleichungen, für welche Θ und die Komponenten von φ unbhängig[1]) sind und für welche wie im vorigen §:

$$\frac{d^2\Theta}{dz^2} = 0$$

ist. Wir setzen daher

(55) $$\Theta = \varrho_1 + \varrho_2 z$$

mit der Bestimmung, dafs die Gröfsen ϱ_1, ϱ_2 Funktionen von r allein seien. Θ genügt jetzt der Gleichung:

$$\frac{d}{dr} r \frac{d\Theta}{dr} = 0,$$

welche zur Lösung:

$$G + H \lg r$$

mit den Konstanten G und H hat. In diese Form haben wir daher auch ϱ_1 und ϱ_2 zu setzen und wir können für den Ausdruck (55) für Θ folgenden schreiben:

(56) $$\Theta = (s_0 + s_1 \lg r)(t_0 + t_1 z),$$

wo die Gröfsen s und t Konstante sind.

---

1) Dem Werte $n = 0$ würde zunächst nur $\frac{d^2\Theta}{c'\varphi^2} = 0$ entsprechen, also Θ in Beziehung auf φ von der Form $c + c'\varphi$ sein können. Aber wie früher bemerkt, treten in Beziehung auf φ stets nur periodische Funktionen auf; daher ist $d = 0$ zu setzen. Dann folgt leicht, dafs auch die Komponenten von φ unabhängig sind.

Unter obiger Voraussetzung und unter Annahme dieses Aus
für Θ, gehen die Differentialgleichungen (4) und (3) in folgende

$$(57)\begin{cases}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dru}{dr}+\frac{d^2ru}{dz^2}=2s_0+\varepsilon s_1+2s_1\lg r)(t_0+t_1z)-\\ r\,\frac{d}{dr}\,\frac{1}{r}\,\frac{drv}{dr}+\frac{d^2rv}{dz^2}=0,\\ \frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,r\,\frac{dw}{dr}+\frac{d^2w}{dz^2}=\varepsilon(s_0+s_1\lg r)t_1,\\ (s_0+s_1\lg r)(t_0+t_1z)=\frac{1}{r}\,\frac{dru}{dr}+\frac{dw}{dz}.\end{cases}$$

Der zweiten dieser Gleichungen wegen läfst sich v unabl
von den Konstanten s und t bestimmen. Es würde also v von
abhängig werden, und es kann daher

$$(58)\qquad v=0$$

gesetzt werden.

Die dritte der Gleichungen (57) veranlafst zu setzen:

$$(59)\qquad w=\varrho+\varrho'z+\varrho''z^2$$

und geht, da die Faktoren von z^0, z und z^2 für sich verschw
in folgende Gleichungen über, die zur Bestimmung der ϱ dien

$$(59a)\qquad\begin{cases}\frac{1}{r}\,\frac{d}{d\varrho}\,r\,\frac{d\varrho}{dr}+2\varrho''=\varepsilon(s_0+s_1\lg r)t_1,\\ \frac{1}{r}\,\frac{d}{d\varrho}\,r\,\frac{d\varrho'}{dr}=0,\\ \frac{1}{r}\,\frac{d}{d\varrho}\,r\,\frac{d\varrho''}{dr}=0.\end{cases}$$

Die letzten dieser Gleichungen ergeben:

$$(60)\qquad\begin{cases}\varrho'=x_1+y_1\lg r,\\ \varrho''=x_2+y_2\lg r,\end{cases}$$

wo die Gröfsen x und y Konstante sind. Hierdurch geht die
Gleichung (59a) über in:

$$\frac{1}{r}\,\frac{d}{dr}\,r\,\frac{d\varrho}{dr}=\varepsilon s_0t_1-2x_2+(\varepsilon s_1t-2y_2)\lg r.$$

Diese Gleichung hat dieselbe Form wie (28) für $v=0$ und
nach (28a) die Lösung:

$$(61)\quad\varrho=\frac{r^2}{4}\left((s_0-s_1)\varepsilon t_1+2(y_2-x_2)+(\varepsilon s_1t_1-2y_2)\lg r\right).$$

Die Konstanten A und B in (28a) konnten hier $=0$ gesetzt w
da sie von s_0, s_1 und t_1 unabhängig sind.

Die vierte der Gleichungen (57) dient zur Bestimmung von u. Setzt man dazu:

$$u = r\left(\frac{l_1}{2} + l_2 \lg r\right), \tag{62}$$

wo mit l_1 und l_2 zwei zu bestimmende Funktionen von z bezeichnet werden, so ist zunächst:

$$\frac{1}{r}\frac{dru}{dr} = l_1 + l_2 + 2l_2 \lg r.$$

Hierdurch sowie mit Rücksicht auf (59) und (60) geht die vierte Gleichung (57) über in:

$$(s_0 + s_1 \lg r)(t_0 + t_1 z) = l_1 + l_2 + 2l_2 \lg r + x_1 + y_1 \lg r + 2z(x_2 + y_2 \lg r).$$

Setzt man hier die Faktoren von $(\lg r)^0$ und $\lg r = 0$, so ergeben sich zur Bestimmung von l_1 und l_2 die Gleichungen:

$$\begin{cases} l_1 + l_2 = s_0(t_0 + t_1 z) - x_1 - 2x_2 z, \\ 2l_2 = s_1(t_0 + t_1 z) - y_1 - 2y_2 z. \end{cases} \tag{63}$$

Ferner geht die erste der Gleichungen (57) durch (62), (59) und (60) über in die Gleichung

$$2l_1 + 4l_2(1 + \lg r) = (2s_0 + \varepsilon s_1 + 2s_1 \lg r)(t_0 + t_1 z) - 2(x_1 + y_1 \lg r) - 4(x_2 + y_2 \lg r)z,$$

welche in folgende Gleichungen zerfällt:

$$2l_1 + 4l_2 = (2s_0 + \varepsilon s_1)(t_0 + t_1 z) - 2x_1 - 4x_2 z,$$
$$2l_2 = s_1(t_0 + t_1 z) - y_1 - 2y_2 z.$$

Diese Gleichungen sind zugleich mit (63) zu erfüllen; sie werden mit jenen identisch, wenn die Gleichung besteht:

$$0 = (\varepsilon - 1)s_1(t_0 + t_1 z) + y_1 + 2y_2 z.$$

Setzt man die Faktoren von z^0 und z der rechten Seite dieser Gleichung $= 0$, so erhält man für y_1 und y_2 folgende Werte:

$$y_1 = \omega^2 s_1 t_0, \qquad y_2 = \frac{\omega^2 s_1 t_1}{2}, \tag{64a}$$

wobei ε durch seinen Wert $1 - \omega^2$ ersetzt ist.

Allen Gleichungen ist hiermit genügt. Die Konstanten x_1 und x_2 sind willkürlich d. h. unabhängig von den Konstanten s und t geblieben. Da demnach die Glieder von u und w, welche diesen Konstanten entsprechen, unabhängig von Θ sind, so kann

$$x_1 = x_2 = 0 \tag{64b}$$

gesetzt werden. Jetzt folgt aus (63):

$$(65a)\qquad \begin{cases} l_1 = \frac{2s_0 - (1-\omega^2)s_1}{2}(t_0 + t_1 z), \\ l_2 = -\frac{(1-\omega^2)s_1}{2}(t_0 + t_1 z); \end{cases}$$

und der Ausdruck (61) für ϱ geht über in:

$$(65b)\qquad \varrho = \frac{r^2}{4}\left((1-\omega^2)(s_0 - s_1)t_1 + (1 - 2\omega^2)s_1 t_1 \lg r\right).$$

Wir erhalten schliefslich folgende Lösung der Differ gleichungen (4) und (3), wenn wir die Werte (64a und b) und und b) in (60), (59) und (62) eintragen

$$(66)\qquad \begin{cases} \Theta = (s_0 + s_1 \lg r)(t_0 + t_1 z), \\ u = r(s_2 + s_3 \lg r)(t_0 + t_1 z), \\ v = 0, \\ w = r^2(s_4 + s_5 \lg r) + \frac{\omega^2}{2} s_1 \lg r (t_0 + t_1 z), \end{cases}$$

wo zur Abkürzung der gröfseren Übersicht wegen gesetzt ist:

$$(67)\qquad \begin{cases} s_2 = \frac{2s_0 - (1-\omega^2)s_1}{4}, \qquad s_3 = \frac{(1-\omega^2)s_1}{4}, \\ s_4 = \frac{(1-\omega^2)(s_0 - s_1)t_1}{4}, \qquad s_5 = \frac{(1-2\omega^2)s_1 t_1}{4}. \end{cases}$$

s_0, s_1, t_0, t_1, sind Konstante, die durch die Oberflächenbeding zu erfüllen sind.

Fassen wir die Lösungen (41), (48), (53) und (66) zusa so können wir das Resultat des zweiten Teils unserer Untersu folgendermafsen aussprechen: Für die Differentialgleichungen (4) u ergiebt sich unter der Voraussetzung, dafs $\Theta \gtrless 0$ ist, die allge Lösung durch Summation der Wertsysteme Θ, u, v, w aus (53), (41) und (48), wobei in den beiden letzten Systemen $\varkappa =$ setzen und über $\varkappa$ und n von 1 bis ∞ zu summieren ist.

Mit dieser so erhaltenen Lösung ist die im ersten Teil gewo Lösung (20) zu kombinieren, um das allgemeinste Integralsyste Differentialgleichungen für den isotropen Kreiscylinder zu erl

Auf die Bestimmung der unbestimmt gebliebenen Kons durch die auf die Oberfläche wirkenden Kräfte einzugehen, ge der mir zugewiesene Raum nicht.

Über eine neue zahlentheoretische Funktion.

Von Dr. W. Bock.

Es sei p ein positiver Primzahlmodul, q eine ganze positive Zahl $< p$. Ferner sei $q^{\frac{p-1}{n}} \equiv 1 \pmod{p}$, ε ein primitiver Rest, so dafs $\varepsilon^n \equiv q \pmod{p}$,

$$p = a_0 q + r, \qquad q > r$$
$$q = a_1 r + s, \qquad r > s \text{ u. s. w.,}$$

so dafs

$$\frac{q}{p} = \cfrac{1}{a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ddots}}}$$

und die Anzahl der a sei ungerade, was immer möglich ist. Der kleinste positive Rest irgend einer ganzen Zahl x nach dem Modul p werde bezeichnet $[x]$.

Dann soll ein geschlossener Ausdruck für den Wert des Legendreschen Symbols $\left(\frac{q}{p}\right)$ gefunden werden, der zugleich einen neuen Beweis für den zahlentheoretischen Reciprozitätssatz an die Hand giebt, und auch Gültigkeit besitzt, wenn $q > p$ und wenn q oder p oder beide negativ sind.

Die Reste $[q]$, $[2q]$, $[3q]$ ..., $[(p-1)\cdot q]$ sind zugleich die Zahlen 1, 2, 3, ..., $p-1$, in einer gewissen nicht nach der Gröfse geordneten Reihenfolge, die durch Permutation aus der natürlichen Reihe 1 bis $p-1$ hergestellt werden kann. Man kommt mit der geringsten Anzahl von Versetzungen aus bei der folgenden Methode: Man denkt sich die Cykel

$$[q],\ [q^2],\ [q^3],\ \ldots,\ \left[q^{\frac{p-1}{n}}\right] = 1$$
$$[\varepsilon q],\ [\varepsilon q^2],\ [\varepsilon q^3],\ \ldots,\ \left[\varepsilon q^{\frac{p-1}{n}}\right] = \varepsilon$$
$$[\varepsilon^2 q],\ [\varepsilon^2 q^2],\ [\varepsilon^2 q^3],\ \ldots,\ \left[\varepsilon^2 q^{\frac{p-1}{n}}\right] = [\varepsilon^2]$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$[\varepsilon^{n-1} q],\ [\varepsilon^{n-1} q^2],\ [\varepsilon^{n-1} q^3],\ \ldots,\ \left[\varepsilon^{n-1} q^{\frac{p-1}{n}}\right] = [\varepsilon^{n-1}]$$

Dann setzt man in der Reihe 1, 2, 3, ... $p-1$: $[q]$ an Stelle von 1, $[q^2]$ an Stelle von $[q]$ und so fort, bis 1 an Stelle von $\left[q^{\left(\frac{p-1}{n}-1\right)}\right]$

kommt; ebenso $[\varepsilon q^2]$ an Stelle von $[\varepsilon q]$ u. s. w. Die Gesamtanzahl der Vertauschungen beträgt hiernach $p-1-n$, ist also eine gerade, wenn q Rest von p, weil dann n gerade, eine ungerade, wenn q Nichtrest. Hieraus folgt nach einem bekannten Satz, dafs jede Art, die Reihe der kleinsten positiven Reste der Vielfachen von q aus der natürlichen Zahlenreihe herzustellen, eine gerade Anzahl von Permutationen erfordert, wenn q Rest, eine ungerade, wenn q Nichtrest von p ist.

Nun soll $[q]$ in der natürlichen Zahlenreihe von rechts nach links über die sämtlichen vorangehenden kleineren Zahlen hinweg geschoben werden, darauf ebenso $[2q]$ bis auf die Stelle nach $[q]$, $[3q]$ bis auf die Stelle nach $[2q]$ und so fort, bis $[(p-1)\cdot q]$ von selbst an der letzten Stelle steht. Die Gesamtanzahl der so ausgeführten Verschiebungen einer gröfseren Zahl über eine kleinere von rechts nach links werde mit $V(q,p)$ bezeichnet. Dann ist $(-1)^{V(q,p)}$ der Wert des Legendre'schen Symbols.

Zunächst haben $V(q,p)$ und $V(p-q,p)$ eine einfache Beziehung zu einander. Bildet man nämlich die Restreihe der Vielfachen von q, mit dem ersten Posten anfangend, indem man nur gröfsere Zahlen über kleinere nach links verschiebt, dagegen die Restreihe der Vielfachen von $p-q$, indem man, mit dem letzten Posten dieser Reihe anfangend, kleinere Zahlen über gröfsere nach rechts verschiebt, so ist die Summe aller Verschiebungen für beide Reihenbildungen zusammen

$$= (p-2) + (p-3) + (p-4) + (p-5) + \cdots + 3 + 2 + 1$$
$$= \frac{(p-1)(p-2)}{2}.$$

Also

$$V(q,p) + V(p-q,p) = \frac{(p-1)(p-2)}{2}, \tag{1}$$

also

$$V(1,p) + V(p-1,p) = \frac{(p-1)(p-2)}{2}$$

und da

$$V(1,p) = 0, \text{ so ist } V(p-1,p) = \frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

$V(2,p)$ findet man $= 1 + 2 + 3 + \cdots + \frac{p-1}{2} = \frac{p^2-1}{8}$.

Wenn N der Nenner, Z der Zähler des letzten Näherungswertes von $\frac{q}{p}$ ist, also $q\cdot N - p\cdot Z = 1$, also $[N\cdot q] = 1$, dann steht in

der Restreihe $[q]$, $[2q]$, $[3q]$, ... die Zahl 1 an der Ordnungsstelle N, 2 an der Ordnungsstelle $[2N]$, α am Platz $[\alpha N]$.

Schiebt man jetzt die Zahlen 1, 2, 3, 4, ... aus der Reihe $[q]$, $[2q]$, ... der Reihe nach wieder zurück in ihre natürliche Ordnung, also stets kleinere Zahlen über gröfsere nach links, so hat man offenbar die Versetzungen, deren Anzahl $= V(q, p)$ ist, in umgekehrter Reihenfolge ausgeführt, andererseits aber auch die Versetzungen, deren Anzahl $= V(N, p)$; folglich ist

$$V(q, p) = V(N, p). \tag{2}$$

Die der Funktion $V(q, p)$ entsprechenden Versetzungen zu bilden, werde die Reihe 1, 2, .. $p - 1$ in Abschnitte: 1 bis q, $q + 1$ bis $2q$, ... $(a_0 - 1)q + 1$ bis $a_0 q$ geteilt, so dafs $r - 1$ Zahlen übrig bleiben.

1) Zuerst sollen die Reste $[q]$, $[2q]$ bis $[a_0 q]$ nach vorne gebracht werden, dazu sind nötig

$$(q-1) + 2(q-1) + 3(q-1) + \cdots + a_0(q-1) = \frac{a_0(a_0+1)}{2}(q-1)$$

Versetzungen.

2) Innerhalb eines jeden der geforderten Abschnitte werden gröfsere Zahlen über kleinere verschoben, in allen Abschnitten in derselben Weise. Im untersten geschehen aber die zur Bildung von $V(q - r, q)$ erforderlichen, das sind zufolge (1)

$$\frac{(q-1)(q-2)}{2} - V(r, q).$$

Im Ganzen sind also

$$a_0 \cdot \frac{(q-1)(q-2)}{2} - a_0 \cdot V(r, q)$$

Verschiebungen innerhalb der Abschnitte.

3) Sind Versetzungen nötig aus dem zweiten Abschnitt über den ersten hinweg, aus dem dritten über die ersten beiden u. s. w. Deren Anzahl beträgt für die Vielfachen von q, die zwischen p und $2p$ liegen:

$$(q-2) + 2(q-2) + 3(q-2) + \cdots + (a_0 - 1)(q-2),$$

für die Vielfachen zwischen $2p$ und $3p$:

$$(q-3) + 2(q-3) + 3(q-3) + \cdots + (a_0 - 1)(q-3),$$

für die Vielfachen zwischen $(q-1)p$ und $q \cdot p$: Null. Im Ganzen

$$(1 + 2 + 3 + \cdots + (a_0 - 1)) \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + (q-2)),$$

also

$$\frac{a_0(a_0-1)}{2} \cdot \frac{(q-1)(q-2)}{2}.$$

4) Innerhalb des bis jetzt unberücksichtigten Endabschnitt a_0q+1, a_0q+2 bis $p-1$ finden diejenigen Versetzungen sta deren Anzahl $=V(s, r)$ ist.

5) Dadurch entsteht hier die Reihe

$$a_0q+s,\ a_0q+[2s]_r,\ a_0q+[3s]_r,\ \ldots\ a_0q+[(r-1)\cdot s]_r,$$

wo die eckige Klammer die kleinsten Reste mod. r bedeutet. a_0q+ steht jetzt an der a_0q+ 1ten Stelle u. s. w. Die Summe der Or nungszahlen ihrer jetzigen Plätze ist also

$$=a_0q\cdot(r-1)+\frac{r(r-1)}{2}.$$

Subtrahiert man hiervon die Summe der Ordnungszahlen der ihn endgültig zukommenden Stellen, so erhält man die Anzahl der n noch folgenden Versetzungen gröfserer Zahlen über kleinere.

N_1 bedeute a_0, N_2 sei a_0a_1+1, N_3 sei $a_2N_2+N_1$ u. s. w.

$$Z_1=1,\ Z_2=a_1,\ Z_3=a_1a_2+1=a_2Z_2+Z_1 \text{ u. s. w.}$$

Dann ist

$$s=N_2q-Z_2p,$$

also

$$s=[N_2q],\ \text{d. h. } N_2q\equiv s\,(\text{mod } p),$$

also

$$a_0q+s=[(a_0+N_2)\cdot q].$$

Die endgültige Ordnungszahl für s ist also N_2, für $a_0q+s: a_0+1$ die endgültige Ordnungszahl für $a_0q+[(r-1)\cdot s]_r$ ist

$$a_0+(r-1)N_2+(s-1)\cdot N_1;$$

denn $(r-1)\cdot s$ kommt auf den $(r-1)\cdot N_2$ten Platz, $(r-1)s-$ auf den Platz $(r-1)\cdot N_2+N_1$, da $-r\equiv N_1q(\text{mod } p)$, $(r-1)s-(s-1$ kommt auf den Platz $(r-1)N_2+(s-1)N_1$, d. i. $r-s$ kommt diese Ordnungsstelle, also $a_0q+[(r-1)s]_r$ auf die oben angegebe

Ferner da

$$x\cdot s+(r-x)\cdot s=rs,$$

also

$$[x\cdot s]_r+[(r-x)\cdot s]_r=r=r\cdot s-(s-1)\cdot r,$$

so bekommen $[x\cdot s]_r$ und $[(r-x)\cdot s]_r$ Ordnungsstellen, deren Sum

$$=r\cdot N_2+(s-1)\cdot N_1.$$

Also $a_0q+[xs]_r$ und $a_0q+[(r-x)\cdot s]_r$ bekommen als Sum der endgültigen Ordnungsstellen $2a_0+r\cdot N_2+(s-1)\cdot N_1$. M nun r gerade oder ungerade sein — wenn man nur die Posten

$$a_0q+s,\ a_0q+[2s]_r,\ a_0q+[3s]_r,\ \cdots a_0q+[(r-1)s]_r$$

wie oben paarweise einander zuordnet, und wenn r gerade, also

ungerade, den Posten $a_0 q + \left[\frac{r}{2} \cdot s\right]_r$ der gleich $a_0 q + \frac{r}{2}$ ist, allein stehen läfst, so bekommt man $\frac{r-1}{2}(2a_0 + r \cdot N_2 + (s-1) N_1)$ als Gesamtsumme ihrer endlichen Ordnungsstellen. Diese Summe subtrahiert von $a_0 q (r-1) + \frac{r(r-1)}{2}$, der Summe ihrer eben vorher innegehabten Stellenzahlen, giebt die Anzahl der noch fehlenden Verschiebungen

$$= a_0 q (r-1) + \frac{r(r-1)}{2} - \frac{r-1}{2}(2a_0 + r(a_0 a_1 + 1) + (s-1) a_0)$$

$$= \frac{r-1}{2}(2a_0 (q-1) - a_0 (q-1)$$

$$= \frac{r-1}{2}(a_0 (q-1)).$$

6) Die unter 1) bis 5) gefundenen Anzahlen addiert, so erhält man den Wert von $V(q, p)$

$$= - a_0 V(r, q) + V(s, r) + \frac{a_0 (a_0 + 1)}{2}(q-1) + a_0 \frac{(q-2)(q-1)}{2}$$
$$+ \frac{(q-2)(q-1)}{2} \cdot \frac{(a_0 - 1) a_0}{2} + \frac{r-1}{2} \cdot a_0 (q-1)$$

$$= - a_0 V(r, q) + V(s, r) + a_0 \frac{q-1}{2}\left(a_0 + 1 + q - 2 + (q-2)^{\frac{a_0 - 1}{2}} + r - 1\right),$$

also

$$(3)\quad V(q, p) = - a_0 V(r, q) + V(s, r) + a_0 (q-1)^{\frac{p+q+r-2}{4}},$$

wobei die Voraussetzung, dafs p eine Primzahl oder ungerade ist, nicht benutzt worden ist.

Demnach

$$V(r, q) = - a_1 V(s, r) + V(t, s) + a_1 (r-1)^{\frac{q+r+s-2}{4}}$$

$$V(s, r) = - a_2 V(t, s) + V(u, t) + a_2 (s-1)^{\frac{r+s+t-2}{4}}$$

u. s. w.

Eliminiert man $V(r, q)$, $V(s, r)$, $V(t, s)$ und die folgenden V, so ergiebt sich:

$$\left.\begin{aligned} 4V(q, p) = {} & a_0 (q-1)(p+q+r-2) \\ & - N_1 a_1 (r-1)(q+r+s-2) \\ & + N_2 a_2 (s-1)(r+s+t-2) \\ & - N_3 a_3 (t-1)(s+t+u-2) + - \cdots \end{aligned}\right\} \text{ wo } N_{i+1} = a_i N_i + N_{i-1}$$

Da nun

$$a_0 q = p - r,$$

also

$$a_0(q-1)(p+q+r-2)$$
$$=a_0(q-1)(p-1)+a_0(q-1)(r-1)+(p-1)(q-1)-(r-1)(q-1$$

ebenso

$$a_0(r-1)(q+r+s-2)$$
$$=a_1(r-1)(q-1)+a_1(r-1)(s-1)+(q-1)(r-1)-(s-1)(r-$$

so findet man

$$\begin{aligned}4V(q,p) &= N_0(p-1)(q-1)\\ &+ N_1(p-1)(q-1)\\ &- N_2(q-1)(r-1)\\ &+ (N_3+N_0)(r-1)(s-1)\\ &- (N_4+N_1)(s-1)(t-1)\\ &+ (N_5+N_2)(t-1)(u-1)-+\cdots\end{aligned}$$

Wird die Multiplikation ausgeführt und werden die bekannten Beziehungen zwischen den N, den Z und den $p, q, r, s, \ldots$ beachtet, so wird

$$V(q,p)=\tfrac{1}{4}(2-q-N+p^2+p(-a_0+a_1-a_2+a_3-+\cdots-a_{\ldots}))$$

oder

$$(4)\qquad V(q,p)=\tfrac{1}{4}\left(2-q-N(q,p)+p^2+p\sum(q,p)\mp a\right)$$

unter der Bedingung, dafs p und q relative — ganze und positive — Primzahlen und $p>q$.

Jetzt soll der Ausdruck (4) von der Bedingung, dafs $q<p$ und dafs q und p positiv sein sollen, frei gemacht werden.

Zunächst, wenn in (4) anstatt q gesetzt wird $np+q$, so ändert sich nicht der Wert von N; es ist $N(q,p)=N(np+q,p)$. Aus $p\sum(q,p)\mp a$ wird jedoch $p(0+n-a_0+a_1-+\cdots-a_s)$, während q in $np+q$ übergeht, also behält (4) seinen Wert, stellt also auch in diesem Falle die Anzahl der Verschiebungen dar, welche nötig sind, aus der natürlichen Zahlenreihe die Reihe der kleinsten positiven Reste der Vielfachen von q oder, was dasselbe ist, der von $n\cdot p+q$ nach dem mod $\cdot p$ zu bilden. Wenn p und q nicht beide positiv, so sind 3 Fälle möglich

1) p negativ, q positiv,

2) p positiv, q negativ,

3) p und q negativ.

Für jeden dieser Fälle ist das gemeinschaftliche Teilerverfahren zu beachten.

Im Falle 1) ändert sich in der Gleichung (4), wenn statt p ge-

nommen wird $-p$, die Gröfse N nicht, ebensowenig p^2, endlich auch der letzte Posten nicht; da sowohl p wie die sämtlichen a ihr Zeichen wechseln. Demnach ist der Ausdruck für $V(q, p)$ in (4) gleich dem für $V(q, -p)$. Die Anzahl der Versetzungen ist für den Modul $-p$ selbstverständlich dieselbe wie für den Modul p.

Im Falle 2) und 3), unter der Bedingung, dafs beim Teilerverfahren der letzte Divisor $= +1$ sei, wird das seitherige letzte a_s, nämlich a_s, absolut genommen um 1 kleiner; es treten dafür zwei neue Kettenglieder hinzu:

bei 2) $a_{s+1} = -2$, $a_{s+2} = +1$, bei 3) $a_{s+1} = +2$, $a_{s+2} = -1$.

Dazu kommt in dem Ausdruck (4) in beiden Fällen an Stelle von $N(+q, +p)$ ein Posten $= (2 \cdot (+p) - N(+q, +p))$; der Posten q kehrt sein Vorzeichen um. Aus $p \cdot \sum(q, p) \mp a$ wird im Falle 2)

$$p(-(-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - + \cdots - (a_s - 1) + 2 + 1)),$$

im Falle 3)

$$-p(-a_0 + a_1 - a_2 + a_3 - + \cdots - (a_s - 1) + 2 + 1).$$

Daraus folgt für 2)

$$V(-q, p) + V(q, p) = \frac{(p-1)(p-2)}{2} = \frac{1}{4}(2p^2 - 6p + 4);$$

nun ist aber

$$V(p - q, p) + V(q, p) = \frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

also geben die Ausdrücke für $V(-q, p)$ und $V(p - q, p)$ gleiche Werte, und bei den früher vorgeschriebenen Versetzungen, bei denen es sich nur um die Reste der Vielfachen handelte, ist es offenbar gleichgültig, ob $-q$ oder $p - q$ das Simplex ist.

Für den Fall 3) kommt

$$V(-q, -p) + V(+q, -p) = \frac{(p-1)(p-2)}{2},$$

also durch denselben Schlufs: Auch für q und p negativ giebt der Ausdruck die Anzahl der Versetzungen an. Also ist

$$V(q, p) = \frac{1}{4}\left(2 - q - N(q, p) + p\sum(q, p) \mp a\right),$$

wo $q \gtrless p$, $q \gtrless 0$, $p \gtrless 0$ sein darf, jedoch q und p relativ prim sein müssen, und der letzte Teiler $= +1$ sein mufs.

Der Beweis des Reciprozitätssatzes ist nun einfach. Aus (4) folgt

$$V(p, q) = \frac{1}{4}\left(2 - p - N(p, q) + q^2 + q\sum(p, q) \mp a\right),$$

nun ist

(5) $$N(p, q) = q - Z(q, p),$$

wenn p und q positiv sind und

$$\sum(q, p) \mp a + \sum(p, q) + a = -2, \tag{6}$$

da die Anzahl der a stets ungerade sein soll.

Also

$$\begin{aligned} &4[q \cdot V(q, p) + p \cdot V(p, q)] \\ &= p^2q + q^2p + 2q + 2p - p^2 - q^2 - qN(q,p) - p \cdot N(p, q) - 2pq \\ &= p^2q + q^2p - p^2 - q^2 - 3pq + 2p + 2q - 1 \\ &= (p-1)(q-1)(p+q-1). \end{aligned} \tag{7}$$

Dieselbe Gleichung (7) gilt für die Fälle, dafs p positiv, q negativ oder p negativ, q positiv ist; denn die Gleichungen (5) und (6) behalten ihre Gültigkeit in diesen beiden Fällen.

Dagegen ist

$$Z(-q, -p) = 2q - Z(q, p)$$

$$N(-p, -q) = q + Z(q, p) = -3(-q) - Z(-q, -p)$$

und

$$\sum(-p, -q) \mp a + \sum(-q, -p) \mp a = +6.$$

Also ist im Falle, dafs p und q beide negative Zahlen sind:

$$4[q \cdot V(q, p) + p \cdot V(p, q)] = (p-1)(q-1)(p+q-1) + 12pq. \tag{8}$$

Wenn p und q beide ungerade Primzahlen sind, ist

$$q \cdot V(q, p) \equiv V(q, p) \bmod 2, \quad p \cdot V(p, q) \equiv V(p, q) \bmod 2,$$

$$\frac{(p-1)(q-1)}{4}(p+q-1) \equiv \frac{(p-1)(q-1)}{4}, \pmod 2,$$

also

$$V(q, p) + V(p, q) \equiv \frac{(p-1)(q-1)}{4}, \pmod 2,$$

wenn nicht beide negativ sind;

$$V(q, p) + V(p, q) \equiv \frac{(p-1)(q-1)}{4} + 1, \pmod 2,$$

wenn p und q beide negativ, was dem Reciprozitätssatz entspricht.

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 7. Ausgegeben im März. 1887.

Berichte über die Versammlungen.

Hauptversammlung vom 8. März 1886.

Der Jahrverwalter, Herr Ahlborn, erstattet den Jahresbericht über das 196. Gesellschaftsjahr, aus dem hervorgeht, dafs die Gesellschaft 5 Ehrenmitglieder, 45 ordentliche hiesige und 10 ordentliche auswärtige Mitglieder zählt. Zum Ehrenmitgliede wurde das bisherige ordentliche Mitglied Herr Ingenieur H. W. C. Hübbe ernannt. Durch den Tod verlor die Gesellschaft ihr ältestes Mitglied, Herrn Repsold, welcher der Gesellschaft 45 Jahre lang angehört hat. Ausgetreten ist das auswärtige Mitglied Herr Dr. Eichler in Husum. Zum Adjunkten wird Herr Dr. Hoppe gewählt.

Einnahmen: ℳ 1236,24. Ausgaben: ℳ 137,10.
Kassenbestand: ℳ 1099,14.

In Schriftenaustausch ist die Gesellschaft im verflossenen Jahre getreten mit John Hopkins' University in Baltimore, welche uns das „American Journal of Mathematics" sendet.

Nach Schlufs der Hauptversammlung blieben die Mitglieder zur Feier des 196. Stiftungsfestes zu einem Festmahle zusammen, an welchem sich auch einige Gäste beteiligten. Das Fest verlief in sehr heiterer Stimmung.

Versammlung vom 10. April 1886.

Als ordentliche hiesige Mitglieder werden aufgenommen die Herren: Regierungsbaumeister Möller und Regierungsbauführer Koldewey, Wandsbeck.

Ein Vertrag mit der hiesigen Patriotischen Gesellschaft, in deren Räumen die Math. Ges. seit langen Jahren tagt, durch welchen die Bibliothek der letzteren der ersteren überlassen wird, wird genehmigt.

Herr Ahlborn macht eine kleine Mitteilung über ein Buch von Hudloff, welches antiquarisch, historisches Interesse hat. Herr Dr. Hoppe berichtet über das am 22. März der Akademie zu Paris vorgelegte Voltameter von Marcel Deprez.

Herr Kühl hält sodann einen Vortrag „Über das sogenannte Fermat'sche Berührungsproblem", eine Erweiterung des Appolloniusschen Problems auf den Raum. Zunächst entwickelt der Vortragende die Prinzipien der darstellenden Geometrie, indem er die Darstellung von Punkten, Linien und Ebenen auf die Projektionsebene zeigt, sowie die Transformierung von einem System auf das andere. Mit dieser Hilfe löst er das Problem, welches sich in 15 verschiedenen Aufgaben darstellen kann. Zunächst wird eine Aufgabe gelöst: eine Kugel zu konstruieren, die durch zwei Punkte geht, eine Ebene und eine Kugel berührt. Die drei geometrischen Orter für das Zentrum der Kugel werden einzeln dargestellt auf der Projektionsebene und schliefslich die sich daraus ergebende Darstellung der Kugel in einer sorgfältigen und sehr mühsamen Zeichnung vorgelegt. Mit der Lösung dieser Aufgabe sind die anderen 14 Aufgaben auch gelöst, da dieselben sich auf diese zurückführen lassen, wie an dem zweiten Fall: Eine Kugel zu konstruieren, welche durch einen Punkt geht und 2 Ebenen und eine Kugel berührt, gezeigt wird.

Zum Schlufs macht Herr Dr. Hoppe Mitteilung über eine sehr einfache Ableitung des Satzes von den Mannigfaltigkeiten, des verallgemeinerten Euler'schen Lehrsatzes, wie er von Lipschütz in den „Comptes rendus" vom 15. März 1886 gegeben ist.

Versammlung vom 8. Mai 1886.

Als ordentliches Mitglied wird aufgenommen Herr Dr. Paul Fehrmann.

Herr Dr. Schubert giebt einen Beweis für die Gleichheit der meridional gerichteten Komponente der Zentrifugalbeschleunigung und der entgegengesetzt gerichteten Komponente der Gravitation, die von der Abplattung der Erde stammt.

Herr Dr. Böger giebt die von ihm gefundene allgemeine Konstruktion einer Involution dritter Ordnung.

Hierauf hält Herr Dr. Mügge einen Vortrag „Über die Grund-

gesetze der Krystallographie". Die Grundlage der Krystallographie bilden die beiden Gesetze:

1) das Gesetz der konstanten Flächen-Neigungswinkel, welches nur für konstante Temperatur gilt,

2) das Gesetz der Zonen, welches für alle Temperaturen gilt. Dies Gesetz ist identisch mit dem Gesetz der Rationalität der Indices. Sodann werden die symmetrischen Verhältnisse untersucht, wobei an die Stelle der Rationalität des Doppelverhältnisses die Gleichung tritt

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin \alpha} = \frac{\sin 3\alpha}{\sin 2\alpha} = \text{rat.}$$

oder auch

$$\frac{4\cos^2\alpha}{4\cos^2\alpha - 1} = \text{rat.}$$

Daraus ergeben sich die möglichen Werte für α: $\alpha = 90^0, 60^0, 45^0, 30^0$.

Es wird die Bedeutung der Symmetrieachse erörtert und ihre Zähligkeit bestimmt. Sodann folgt die Bestimmung der möglichen Anzahl der Symmetrieachsen, der Richtung gleichwertiger Achsen mit Hilfe der Projektion auf eine Kugel, sowie die Überführung einer Achse in eine andere mit Hilfe des Euler'schen Lehrsatzes.

Versammlung vom 5. Juni 1886.

Als ordentliches Mitglied wird aufgenommen Herr Dr. Goldschmidt.

Herr Dr. Hoppe hält sodann einen Vortrag „Über unipolare Induktion", welcher durch besonderen Abdruck veröffentlicht werden soll.

Versammlung vom 11. September 1886.

Auf Antrag des Jahrverwalters wird beschlossen, den Jahresbeitrag auf 10 ℳ zu erhöhen mit dem Zusatz, dafs die Abschaffung der üblichen Strafgelder für unentschuldigtes Fernbleiben aus den Versammlungen für nächstes Jahr in Aussicht zu nehmen sei, wenn die Kassenverhältnisse es dann gestatten sollten.

Herr Dr. Schubert macht eine kleine Mitteilung über „Primzahlstatistik", welche von englischen Mathematikern in der Weise, dafs die Faktoren bis zu 10 Millionen angegeben sind, ausgeführt ist. Desgleichen giebt er eine Darstellung der Näherungsformeln für die Anzahl der Primzahlen von Legendre, Gauss und Riemann, von denen sich die letzte als die beste erwiesen hat. Herr Meissel hat eine Abzählungsmethode für die Anzahl der Primzahlen bis zu einer bestimmten Grenze erfunden.

Herr Dr. Goldschmidt teilt einen Satz über „Kollineare Beziehung zweier Punktsysteme“ mit.

Herr Dr. Bock liefert einen Beitrag zur Primzahlentheorie bezüglich des Vorkommens der Primzahlen in arithmetischen Reihen und in den Zählern und Nennern der Näherungswerte, auf welche die Wurzeln quadratischer Gleichungen führen, resp. in den Lösungen der Pell'schen Gleichung:

$$t^2 - Du^2 = \sigma^2$$

und über die Beziehungen, welche zwischen den Primzahlen dieser Lösungen und den Primzahlen in gewissen arithmetischen Reihen bestehen. Er trug aufserdem vor über das Vorkommen von Primzahlen unter den durch quadratische Formen einer und derselben Determinante und eines und desselben Geschlechtes dargestellten Zahlen.

Versammlung vom 16. Oktober 1886.

Es wird beschlossen auch zu Beginn des kommenden Jahres ein Heft unserer „Mitteilungen“ herauszugeben.

Herr Dr. Bock setzt seinen Vortrag aus der vorigen Sitzung fort und beendet denselben.

Versammlung vom 13. November 1886.

Der Jahrverwalter macht Mitteilung von dem Ableben des um die Gesellschaft sehr verdienten Mitgliedes H. F. Reitz; die Gesellschaft ehrte das Andenken des Verstorbenen in der üblichen Weise.

Die Versammlung interpretiert den Beschlufs, den Jahresbeitrag auf 10 ℳ zu erhöhen, einstimmig dahin, dafs dieser höhere Beitrag bereits das nächste Mal zu zahlen sei.

Herr Geheimrat Dr. Neumayer hält sodann einen Vortrag „Über die Prinzipien der internationalen Polarforschung“. Der Vortragende knüpft an Gauss und Weber an und an die Bestimmung der Konstanten durch jene und durch Ermann und Petersen; er erklärt die Isodynamenkarte von 1880 und die Verteilung der Beobachtungsstationen von 1882, glaubt die Mangelhaftigkeit mancher Beobachtungen auf die nicht hinlänglich ausgebildete Theorie der Instrumente zurückführen zu sollen, welche den verschiedenen Anforderungen nicht genügend entsprechen konnten. Der Vortragende betont die Notwendigkeit der absoluten Gleichzeitigkeit der Beobachtung der Horizontalintensität, Deklination und Inklination. Er bespricht die

Wahl der Beobachtungsorte für die internationale Polarforschung auf Grund der von ihm angefertigten Karte für 1880. Besonders der Südpol bietet eine interessante Bestätigung der vermuteten Verhältnisse. Es wird die Notwendigkeit der Festsetzung der magnetischen Elemente südlich von Tasmanien und Neuseeland betont. Bei den Beobachtungen sind obligatorisch nur meteorologische und magnetische gewesen. Diese sind jetzt für Deutschland veröffentlicht und werden der Versammlung vorgelegt; dasselbe geschieht mit den Beobachtungen der Engländer und Franzosen, soweit dieselben veröffentlicht sind; es fehlen bis jetzt die magnetischen für Österreich und Rufsland, während Schweden, Dänemark, Holland und Amerika überhaupt noch nichts veröffentlicht haben. Auf die Mitwirkung Göttingens und Breslaus wird hingewiesen, sodann auf die Beobachtungen der Störungen des Erdstromes in Telegraphenleitungen, die in Deutschland ausgeführt sind; beides ist den deutschen Mitteilungen angefügt, desgleichen die Beobachtungen der Sonnenphotosphäre in Potsdam. In bezug auf die meteorologischen Beobachtungen wird auf diejenigen aufmerksam gemacht, die am Kirguafjord ausgeführt sind, desgleichen auf die in Süd-Georgien, wo die Krakatauflut beobachtet ist. Endlich wird noch das Vorgehen Deutschlands für die Anfertigung synoptischer Karten der Südsee hervorgehoben; von letzteren werden einige vorgelegt.

Versammlung vom 11. Dezember 1886.

Es wird mitgeteilt, dafs vom hohen Senate 2000 ℳ für Anschaffung mathematischer Werke ins Budget der Stadtbibliothek eingestellt seien, die wahrscheinlich auch bewilligt würden. Die Herren Schubert, Jaerisch und Ahlborn werden zu Mitgliedern einer Kommission erwählt, welche die bereits vorhandene Liste wünschenswerter Werke revidieren resp. kompletieren soll.

Herr Dr. Schubert sprach sodann im Anschlufs an die Vorträge, welche er im Sommersemester vor mehreren Mitgliedern über abzählende Geometrie gehalten hatte, über die projektive, kollineare und reciproke Verwandtschaft, indem er namentlich zeigte, wie man die auf diese Verwandtschaften bezüglichen Anzahlen vermöge ihrer Ausartungen leicht bestimmen könne. Der genauere Inhalt des Vortrages kann hier übergangen werden, weil derselbe im wesentlichen in den §§ 28 bis 32 des vom Vortragenden verfafsten „Kalküls der abzählenden Geometrie“ (Leipzig 1879) enthalten ist.

Versammlung vom 8. Januar 1887.

Herr Dr. F. Groscurth wird als ordentliches Mitglied aufgenommen.

Herr Dr. Schubert macht eine Mitteilung über den Zusammenhang von Biominalcoefficienten, indem er angiebt, dafs bei bekannter Bezeichnungsweise allgemein folgende Relation besteht:

$$a_b + 2\,(a-1)_b + 2^2\,(a-2)_b + \cdots 2^c(a-c)_b + (a+1)_b + (a+1)_{b-1} + \cdots (a+1)_0 = 2^{c+1}\{(a-c)_b + (a-c)_{b-1} + \cdots + (a-c)_0\}$$

und erläutert einen Spezialfall.

Herr Ahlborn fragt an, ob es eine konstruktive Lösung gebe für die Aufgabe, einen Punkt zu finden, dessen Entfernungssumme von n Punkten ein Minimum ist.

Herr Dr. Jaerisch giebt sodann in längerem Vortrage eine praktische Darstellung der Lamé'schen Funktionen und ihres natürlichen Zusammenhanges mit den Kugelfunktionen; er betont die Ungenauigkeit der Heine'schen Definition dieser Art von Funktionen. Er bespricht die Kugelfunktionen zweiter Ordnung nach Laplace und das Additionstheorem für dieselben; er zeigt die Entwicklung der Lamé'schen Differentialgleichung ausgehend von der Wärmegleichung

$$\frac{dU}{dt} = a^2 \Delta^2 u.$$

Angewandt auf den stationären Zustand und unter Einführung der elliptischen Koordinaten ergiebt sich die Laplace'sche Gleichung, wo die Koordinaten, nach denen differentiiert wird, als elliptische Integrale erscheinen. Er gerät so auf die Lamé'sche Bedingungsgleichung durch Trennung der Variabeln.

Eingegangene Schriften.

Die Gesellschaft hielt wie bisher das „Archiv für Mathematik und Physik", empfing im Austausch die erschienenen Hefte von

Atti della Reale Academia dei Lincei zu Rom, Bulletin de la Société mathématique de France, Jornal de Sciencias math. e astron. von Dr. Texeira, American Journal of Mathematics.

Die folgenden Herren und Institute haben unserer Bibliothek eigene Schriften zugehen lassen, für welche die Gesellschaft ihnen zu besonderem Danke verpflichtet ist: Herr Prof. Stern, Herr Prof.

Sturm, Herr Roelant, Herr Ludwig Scheeffer, Herr Dr. Hoppe, Herr Lucas, Herr Prof. Lemoine, Herr Dr. Krüss, Herr Dr. Schubert, Deutsche Seewarte, Statistisches Bureau des Hamb. Staates.

Über eine neue zahlentheoretische Funktion. II.

(Von W. Bock in Hamburg.)

Die in Heft VI dieser Mitteilungen von mir definierte, mit $V(q,p)$ bezeichnete zahlentheoretische Funktion, welche, wenn der Modul p eine Primzahl ist, für den Wert des Legendre'schen Symbols einen geschlossenen Ausdruck, und damit die Grundlage für einen neuen Beweis des Reciprozitätssatzes liefert, entspricht auch dem Jakobi'schen Symbol $\left(\frac{h}{P}\right)$, wo P aus beliebigen Faktoren zusammengesetzt sein darf, die nicht in $2h$ aufgehen, in der Weise, dafs

$$(9) \qquad (-1)^{V(h,P)} = \left(\frac{h}{P}\right).$$

Es genügt, zu zeigen, dafs die linke Seite dieser Gleichung dieselben Funktionaleigenschaften besitzt und dieselben Grenzbedingungen erfüllt, wie die rechte: Nun ist auch für ungerade h und P

$$V(h,P) + V(P,h) \equiv \frac{h-1}{2} \cdot \frac{P-1}{2} \pmod 2,$$

wenn nicht beide Argumente negativ sind; sonst ist

$$V(h,P) + V(P,h) \equiv \frac{h-1}{2} \cdot \frac{P-1}{2} + 1 \pmod 2,$$

also ist

$$(-1)^{V(h,P)} \cdot (-1)^{V(h,P)} = (-1)^{\frac{h-1}{2} \cdot \frac{P-1}{2}} = \left(\frac{h}{P}\right)\left(\frac{P}{h}\right),$$

wenn nicht h und P beide negativ sind.

Auch ist

$$V(h + n \cdot P,\ P) = V(h,\ P)$$

und

$$V(1 + n \cdot P,\ P) = V(1,\ P) = 0,$$

also auch

$$(-1)^{V(1,P)} = +1 = \left(\frac{1}{P}\right).$$

Damit ist die Richtigkeit der Gleichung (9) dargethan und somit eine Methode gezeigt, den Wert des Jakobi'schen Symbols unmittelbar, d. h. ohne Benutzung der Reciprozität, zu berechnen.[1])

---

1) Bekanntlich existiert für das Jakobi'sche $\left(\frac{h}{P}\right)$ auch der geschlossene Ausdruck von Gaufs:

$$\sum_{0}^{P-1} e^{s^2 \cdot \frac{2h\pi i}{P}} = \left(\frac{h}{P}\right) \cdot i^{\left(\frac{P-1}{2}\right)^2} \cdot \sqrt{P}.$$

Die Funktion V entspricht selbstverständlich auch allen speziellen Eigenschaften jenes Symbols, wie die Werte von

$$V(q^2, P),\ V(-1, P),\ V(2, P),\ V(-2, P)$$

u. s. w. zeigen.

Sie läfst dabei noch zwei Erweiterungen zu: 1) Der Modul P darf jede beliebige Potenz von 2 als Faktor enthalten. Dann lautet das Reciprozitätsgesetz allgemein:

$$h \cdot V(h, P) + P \cdot V(P, h) = \tfrac{1}{4}(h-1)(P-1)(h+P-1),$$

wo rechts $3hP$ zu addieren ist, wenn beide Argumente negativ sind. 2) Wenn h und P einen gemeinsamen Faktor $s > 1$ enthalten, $\left(\frac{h}{P}\right)$ also Null sein soll, genügt es, den Ausdruck $(-1)^{V(h,P)}$ mit einem Faktor zu versehen, welcher $= 0$, wenn $s > 1$, aber $= 1$, wenn $s = 1$ ist. Ein solcher Faktor ist $\sum_1^s e^{\frac{2n\pi i}{s}}$.

Dann ist allgemein

$$\left(\frac{h}{P}\right) = (-1)^{V(h,P)} \times \sum_1^s e^{\frac{2n\pi i}{s}}.$$

Durch eine Umformung wird es leicht möglich, die Entscheidung über den Rest-Charakter einer Zahl q in bezug auf einen Primzahl-Modul p mittels bloſsen Abzählens zu treffen. Man setze zu dem Zwecke:

$$T(q, p) = V(q, p) - \tfrac{1}{4}(p-1)(p-2),$$

woraus beiläufig leicht für positive p folgt, daſs $T(q, p) = -T(-q, p)$.

Dann ist

$$\frac{1}{p} \cdot T(q, p) + \frac{1}{q} \cdot T(p, q) = \frac{1}{4}\left(\frac{-p^2-q^2-1+3pq}{pq}\right),$$

wo rechts $+3$ hinzuzufügen ist, wenn p und q negativ sind.

Man erhält dann in derselben Weise wie unten für $V(q,p)$:

$$\begin{aligned}(10)\qquad \frac{1}{p} \cdot T(q, p) = {} & \frac{-p^2-q^2-1+3pq}{4pq} + 0 \text{ oder } +3 \\ & - \frac{-q^2-r^2-1+3qr}{4qr} - 0 \text{ oder } -3 \\ & + \frac{-r^2-s^2-1+3rs}{4rs} + 0 \text{ oder } +3 \\ & - + \cdots\end{aligned}$$

Nimmt man hierzu die Gleichung

$$N(q, p) = p\left(\frac{1}{pq} - \frac{1}{qr} + \frac{1}{rs} - + \cdots\right),$$

wo $N(q, p) = [a_0\, a_1\, a_2 \cdots a_{s-1}]$ ist,

und sorgt dafür, daſs in (10) alle Zahlen $p, q, r, s, \ldots$ ungerade sind, also $\frac{p^2-1}{4} \equiv \frac{q^2-1}{4} \equiv \frac{r^2-1}{4} \equiv 0 \pmod 2$, dann wird:

$$T(q,p) \equiv -\frac{1}{4}p\left(\frac{3}{pq} - \frac{3}{qr} + \frac{3}{rs} - \frac{3}{st} + - \cdots + \frac{3}{yz} - 3\right) + 3A$$

$$\equiv -\frac{3}{4}(N-p) + 3A \pmod 2,$$

also

$$V(q,p) \equiv -\frac{3}{4}N + \frac{3}{4}p + 3A + \frac{1}{4}(p-1)(p-2)$$

$$\equiv -\frac{3}{4}N + \frac{3}{4} + 3A$$

$$\equiv -3\left[\frac{1}{4}(N-1) + A\right]$$

$$(11)\quad V(q,p) \equiv \frac{1}{4}(N-1) + A \pmod 2,$$

wo A die Anzahl der Fälle bedeutet, daſs zwei unmittelbar aufeinander folgende der ungeraden Zahlen $p, q, r, s, \ldots$ beide < 0 und wo alle Quotienten $a_0, a_1, \ldots$ bis auf den letzten gerade sind. Wenn nun $N \equiv 1 \pmod 8$, entscheidet A allein über den Rest-Charakter von q. Betrachtet man daher $Q \equiv 1 \pmod 8$, und zugleich $\equiv q \pmod p$ als das N irgend eines Restes oder Nichtrestes q' in bezug auf den Modul p, so bilde man mit p als Dividenden, Q als Divisor in dem gemeinschaftlichen Teilerverfahren die Reihe der Reste $p, Q, R, S, \ldots$, wobei der erste Quotient ungerade, die andern gerade sein müssen, dann giebt die Anzahl A den Charakter von q', also auch den von Q, da $Q \cdot q' \equiv 1 \pmod p$, und somit auch den von q. Gesetzt, man will entscheiden, ob die Zahl 7 Rest von 37 ist; dann ist $p = 37$, $q = 7$, $Q = 2 \cdot 37 + 7 = 81 \equiv 1 \pmod 8$

$p =$	37	$a_0 =$	1
$Q =$	81	$a_1 =$	2
$R =$	-44	$a_2 =$	6
$S =$	-7	$a_3 =$	4
$T =$	-2	$a_4 =$	-2
$U =$	1		

A ist $= 2$ (da R, S und T negativ, also zweimal 2 negative Divisoren einander folgen), und da A gerade, so ist 7 Rest von 37.

Der bequemste Weg, zu einer Entscheidung zu gelangen, wird aus der Gleichung (11) resultieren, wenn man $\frac{q}{p}$ als Kettenbruch entwickelt, und alle Glieder $a_0, a_1, a_2 \ldots$ bis auf das letzte gerade nimmt.

Es ist gemäfs dem Bildungsgesetze von N nämlich dann

$$N \equiv a_0 (a_1 + a_3 + a_5 + \cdots) + a_2 (a_3 + a_5 + \cdots) + a_4 (a_5 + a_7 + \cdots) + \cdots \pmod 8$$

was in der Gleichung (11) zu berücksichtigen ist, also:

$$(12) \quad V(q, p) \equiv A - 1 + \tfrac{1}{4} \sum a_{2n} (a_{2n+1} + a_{2n+3} + \cdots) \pmod 2$$

q ist demnach Rest von der Primzahl p, wenn die rechte Seite dieser Gleichung eine gerade Zahl ist, und umgekehrt. Wenn P eine zusammengesetzte Zahl ist, dann ist, wenn $V(q,P)$ gerade, der Schlufs nicht erlaubt, dafs q ein Rest von P sei, wohl aber ist $V(q,P)$ stets gerade, wenn dies der Fall ist, und dann ist aufserdem auch die Zahl $-V(q,P)$ Rest von P, da

$$q \cdot -V(q,P) \equiv \tfrac{1}{4}(q-1)^2 \mod P \text{ ist.}$$

Ferner ist $\quad q \cdot \big(-V(q,P)+1\big) \equiv \tfrac{1}{4}(q+1)^2 \mod P$

$-V(q,P)$ und $-V(q,P)+1$ stellen dann also zwei Reste von P dar, welche in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar aufeinander folgen. Für einen Primzahl-Modul p ist ersichtlich die Anzahl dieser Folgen gleich der Anzahl der voneinander verschiedenen geradzahligen V, das ist gleich der Hälfte der überhaupt vorhandenen kleinsten (quadratischen) Reste, vermehrt um 1, resp. um $\frac{1}{2}$, je nachdem

$$p \equiv 1 \text{ oder } \equiv 3 \pmod 4.$$

Eine gleiche Anzahl von Restepaaren existiert mit der konstanten Differenz $[n^2]$, wo n jede beliebige Zahl bedeuten kann. Für den Modul 11 z. B. folgen die Zahlen

$$0-1, \quad 3-4, \quad 4-5,$$

sämtlich Reste, unmittelbar aufeinander, für den Modul 37 die Restepaare

$$0-1, \ 3-4, \ 9-10, \ 10-11, \ 11-12, \ 25-26, \ 26-27, \ 27-28$$
$$33-34, \ 36-37.$$

III.

Eine an sich interessante Folgerung läfst sich aus den Gleichungen (7) und (8) des ersten Teils dieser Untersuchungen ziehen:

Dividiert man diese beiden Gleichungen durch $4qp$, so erhält man

$$\frac{1}{p} \cdot V(q,p) + \frac{1}{q} \cdot V(p,q) = \frac{(p-1)(q-1)(p+q-1)}{4pq} + 0 \text{ oder } +3$$

und entsprechend

$$\frac{1}{q} V(r,q) + \frac{1}{r} V(q,r) = \frac{(q-1)(r-1)(q+r-1)}{4qr} + 0 \text{ oder } +3$$

$\frac{1}{r} V(s,r) + \frac{1}{s} V(r,s) = \frac{(r-1)(s-1)(r+s-1)}{4rs} + 0$ oder $+3, \cdots$

und hieraus, da

$$V(p,q) = V(r,q), \quad V(q,r) = V(s,r), \text{ u. s. w.,}$$

und da das letzte V, welches überhaupt in Frage kommt:

$$V(a_s \cdot a_{s-1} + 1, a_s) = V(1, a_s) = 0 \text{ ist,}$$

so lassen sich alle V bis auf das erste eliminieren; dann ist:

$$(14) \quad \frac{1}{p} V(q,p) = \frac{(p-1)(q-1)(p+q-1)}{4pq} + 0 \text{ oder } +3$$
$$- \frac{(q-1)(r-1)(q+r-1)}{4qr} - 0 \text{ oder } -3$$
$$+ \frac{(r-1)(s-1)(r+s-1)}{4rs} + 0 \text{ oder } +3$$
$$- + \cdots\cdots$$

und dieser Ausdruck ist unabhängig von der Art und Weise, wie der Bruch $\frac{q}{p}$ in einen Kettenbruch entwickelt ist, da das Gleichungssystem 13, dem er entspringt, nach den darüber gemachten Bemerkungen es ebenfalls ist. Selbstverständlich gilt dasselbe für den Wert von $\frac{1}{p} T(q,p)$ in der Gleichung (10), wie für

$$-4\,T(q,p)$$
$$= N(q,p) - 3p + p\left(\frac{p^2+q^2}{pq} - \frac{q^2+r^2}{qr} + \frac{r^2+s^2}{rs} - + \cdots\right) + 12\varepsilon p$$
$$= N(q,p) + p\left(\frac{p}{q} + \frac{q}{p} - \frac{q}{r} - \frac{r}{q} + + - - \cdots - 3 + 12\varepsilon\right)$$

wo $N(q,p) = [a_0, a_1, a_2, \cdots a_{s-1}]$.

Zu einer andern, in derselben Weise unabhängigen Form der Divisoren $q, r, s, \ldots$ und des Dividenden p führt der folgende Algorithmus, der in naher Beziehung zu demjenigen steht, der auf die Anzahl $V(q,p)$ geführt hat:

Man denkt sich die ν^{ten} Potenzen aller Zahlen von 1 bis $p-1$ gebildet, jede dieser Potenzen noch multipliziert mit ihrer Basis (zugleich Ordnungsstelle), und alles addiert.

Diese Summe $\sum_1^{p-1} n^{\nu+1}$ werde mit $m_\nu(1,p)$ bezeichnet.

Werden dann die Posten $1^\nu, 2^\nu, 3^\nu, 4^\nu, 5^\nu, \ldots q^\nu, \ldots (p-1)^\nu$ wieder derartig permutiert, dafs q^ν an die erste, $[2q]^\nu$ an die zweite, $[nq]^\nu$ an die n^{te}, $[(p-1)q]^\nu$ an die letzte Stelle der Reihe kommt, so soll die Summe

$q^\nu + 2 \cdot [2q]^\nu + 3[3q]^\nu + 4[4q]^\nu + \cdots + (p-1)\,[(p-1)q]$

mit $m_\nu\,(q,p)$ bezeichnet werden.

Es würde demnach sein

$$m_2\,(8{,}37) = 1 \cdot 8^2 + 2 \cdot 16^2 + 3 \cdot 24^2 + 4 \cdot 32^2 + 5 \cdot 3^2 + 6 + 7 \cdot 19^2 + 8 \cdot 27^2 + 9 \cdot 35^2 + 10 \cdot 6^2 + \cdots + 34 \cdot 13^2 + 35 \cdot 21^2 + 36 \cdot 29^2.$$

Es ist nun $m_\nu(q,p)$ aus $m_\nu(1,p)$ entstanden 1) teils durch Er rigung, 2) teils durch Erhöhung der Ordnungsstellenzahl der vers denen n^ν. Die Summe der Änderungen, welche durch Erniedri von Stellenzahlen herbeigeführt sind, soll mit $S_\nu(q,p)$, die durch höhung bewirkte Summe von Änderungen mit $\Sigma_\nu\,(q,p)$ bezeic werden. Die Gesamtzunahme ist

$$m_\nu(q,p) - m_\nu(1,p) = \Sigma_\nu\,(q,p) - S_\nu(q,p) = M_\nu(q,p).$$

Diese Gesamtänderung ist verhältnismäfsig leicht zu ermit Schwerer ist es, den Wert von $S_\nu(q,p)$ zu bestimmen, der gerade die gesuchte unabhängige Form der $p, q, r, s, \ldots$ führen soll. findet S_ν durch Betrachtung ähnlich denjenigen, welche den von $V(q,p)$ ergaben. Dort wurde die Anzahl der Versetzungen gröf Zahlen über kleinere abgezählt. Um S_ν zu finden, ist die Zahl d Versetzungen, welche die einzelnen n^ν erfahren, um nacheinande ihre definitiven (1., 2., 3., u. s. w.) Ordnungsstellen zu kommen, j mal mit dem zugehörigen versetzten n^ν zu multiplizieren, was Berechnung von $S_\nu(q,p)$ schon bei $\nu = 2$, und viel mehr bei ν kompliziert.

Wenn $q = 14$, $p = 37$, würde die Summe $S_2(q,p)$ beginnen

$$14^2 \cdot 13 + 28^2 \cdot 26 + 5^2 \cdot 4 + 19^2 \cdot 16 + 33^2 \cdot 28 + 10^2 \cdot 8 + 24^2 + 1^2 \cdot 0 + 15^2 \cdot 10 + 29^2 \cdot 20 + \cdots$$

Führt man die Betrachtungen in wesentlich derselben Weise Anordnung durch, wie oben bei der Entwickelung von $V(q,p)$ erhält man zunächst

$$S_1(q,p) = \tfrac{2}{3}\,p \cdot V(q,p)$$

$$\Sigma_1(q,p) = \tfrac{1}{3}\,p \cdot V(q,p)$$

also

$$m_1(q,p) = \tfrac{1}{6}\,p\,(p-1)\,(2p-1) - \tfrac{1}{3}\,p \cdot V(q,p)$$

und

$$m_1(q,p) + m_1(-q,p) = \tfrac{1}{6}\,p\,(p-1) \cdot 3\,p = \tfrac{1}{2}\,p^2(p-1).$$

Man erhält also nicht neue unabhängige Formen.
Ebensowenig durch

$$m_2(q,p) = \frac{1}{4}p^2(p-1)^2 - \frac{1}{3}p^2 \cdot V(q,p)$$

und

$$m_2(q,p) + m_2(-q,p) = \frac{1}{6}p^2(p-1)(2p-1).$$

Indessen sind diese Gleichungen nötig zur Entwickelung von $S_2(q,p)$.

Noch ist

$$S_2(q,p) + S_2(-q,p) = \frac{1}{12}p(p-1)(p-2)(3p-1).$$

Bezüglich des Ganges bei Berechnung von $S_2(q,p)$ sei auf die unter 1) bis 6) enthaltenen Erwägungen bei Berechnung von $V(q,p)$ verwiesen. Demgemäfs erhält man für $S_2(q,p)$ zunächst folgenden komplizierten Ausdruck:

$$\begin{aligned}
S_2(q,p) &= q^2(q-1)\sum_1^{a_0} n^3 \\
&\quad - a_0 S_2(r,q) + \frac{1}{12}a_0 q(q-1)(q-2)(3q-1) \\
&\quad + V(q-r,q)\cdot q^2 \sum_1^{a_0-1} n^2 + S_1(q-r,q)\cdot 2q \cdot \sum_1^{a_0-1} n \\
&\quad - \Big[m_2(q-r,q)\cdot \sum_1^{a_0-1} n + q^2 \sum_1^{q-1} n \cdot \sum_1^{a_0-1} n^3 + 2q \cdot m_1(q-r,q) \sum_1^{a_0-1} n^2 \Big] \\
&\quad + (q-1)\sum_1^{q-1} n^2 \sum_1^{a_0-1} n + (q-1)^2 \cdot q^2 \cdot \sum_1^{a_0-1} n^3 + 2q(q-1)\sum_1^{q-1} n \cdot \sum_1^{a_0-1} n^2 \\
&\quad + V(s,r)\cdot a_0^2 \cdot q^2 + 2a_0 q \cdot S_1(s,r) + S_2(s,r) \\
&\quad + a_0^2 q^2 \sum_1^{r-1} n + 2a_0 q \cdot m_1(s,r) + m_2(s,r) \\
&\quad + a_0(q-1)(r-1)a_0^2 q^2 + 2a_0^2 q(q-1)\sum_1^{r-1} n + a_0(q-1)\sum_1^{r-1} n^2 \\
&\quad - \Big[a_0^2 q^2 \cdot N_2 \cdot \sum_1^{r-1} n + 2a_0 q \cdot N_2 \cdot m_1(s,r) + N_2 \cdot m_2(s,r) \\
&\quad + a_0^3 q^2 \cdot \frac{s}{r} \cdot \sum_1^{r-1} n + 2a_0^2 q \frac{s}{r} \cdot m_1(s,r) + a_0 \cdot \frac{s}{r} \cdot m_2(s,r) \\
&\quad - a_0^3 q^2 \cdot \frac{1}{r} \sum_1^{r-1} n - 2a_0^2 q \cdot \frac{1}{r} \cdot \sum_1^{r-1} n^2 - a_0 \cdot \frac{1}{r} \cdot \sum_1^{r-1} n^3 \Big].
\end{aligned} \tag{16}$$

Werden hierin die Posten, welche irgend ein V oder ein S enthalten, zusammengezogen, und die Beziehungen beachtet, welche zwischen den V, S und m bestehen, so bekommt man

$$(17) \quad S_2(q,p) - \tfrac{5}{9}p^2 \cdot V(q,p) + \tfrac{1}{72}p^4 - \tfrac{7}{72}p^2 + \tfrac{1}{24}p$$
$$= -a_0 S_2(r,q) + \tfrac{5}{9}a_0 q^2 V(r,q) - \tfrac{1}{72}a_0 q^4 + \tfrac{7}{72}a_0 q^2 - \tfrac{1}{24}a_0 q$$
$$+ S_2(s,r) - \tfrac{5}{9}r^2 V(s,r) + \tfrac{1}{72}r^4 - \tfrac{7}{72}r^2 + \tfrac{1}{24}r$$
$$+ \tfrac{1}{72} \cdot a_0 (p+r)(p^2 - 5q^2 + r^2 - 2).$$

Hiermit läfst sich die Gleichung (3) auf S. 191 kombinieren, wodurch man erhält:

$$(18) \; S_2(q,p) - \tfrac{5}{9}p^2 \cdot V(q,p) - \tfrac{1}{9} \cdot V(q,p) + \tfrac{1}{72}(p^2-1)(p^2-4)$$
$$= -a_0 S_2(r,q) + \tfrac{5}{9}a_0 q^2 V(r,q) + \tfrac{1}{9}a_0 V(r,q) - \tfrac{1}{72}a_0 (q^2-1)(q^2-4)$$
$$+ S_2(s,r) - \tfrac{5}{9}r^2 \cdot V(s,r) - \tfrac{1}{9}V(s,r) + \tfrac{1}{72}(r^2-1)(r^2-4)$$
$$+ \tfrac{1}{72}a_0 (p+r)(p^2 - 5q^2 + r^2).$$

Hier soll gesetzt werden $T_2(q,p)$ für die linke Seite, und entsprechend sollen die Teile der rechten Seite bezeichnet werden; dann ist:

$$T_2(q,p) = -a_0 \cdot T_2(r,q) + T_2(s,r) + \tfrac{1}{72}a_0 (p+r)(p^2 - 5q^2 + r^2)$$

und

$$T_2(r,q) = -a_1 \cdot T_2(s,r) + T_2(t,s) + \tfrac{1}{72}a_1 (q+s)(q^2 - 5r^2 + s^2)$$

$$T_2(s,r) = -a_2 \cdot T_2(t,s) + T_2(u,t) + \tfrac{1}{72}a_2 (r+t)(r^2 - 5s^2 + t^2)$$

. . . . .

Dabei ist das letzte a um 1 vermindert zu denken, und der Reihe der Divisoren $(p, q, r, s, \ldots)$ noch eine 1 anzuhängen.

Durch Elimination aller T bis auf das erste ergiebt sich

$$(19) \quad 72 \cdot T_2(q,p) = N_1 \cdot (p+r)(p^2 - 5q^2 + r^2)$$
$$- a_1 N_1 (q+s)(q^2 - 5r^2 + s^2)$$
$$+ a_2 N_2 (r+t)(r^2 - 5s^2 + t^2)$$
$$- a_3 N_3 (s+u)(s^2 - 5t^2 + u^2)$$
$$+ - \cdots\cdots$$

Aus

$$a_1 N_1 (q + s) = a_1 p - N_0 q + N_2 s$$
$$a_2 N_2 (r + t) = a_2 p - N_1 r + N_3 t$$
$$a_3 N_3 (s + u) = a_3 p - N_2 s + N_4 u \quad \text{u. s. w.}$$

folgt:

$$72 \cdot T_r (q,p) =$$
$$(a_0 p + r \cdot N_1)(p^2 - 5q^2 + r^2)$$
$$- (a_1 p - q N_0 + s N_2)(q^2 - 5r^2 + s^2)$$
(20) $$+ (a_2 p - r N_1 + t N_3)(r^2 - 5s^2 + t^2)$$
$$- (a_3 p - s N_2 + u N_4)(s^2 - 5t^2 + u^2)$$
$$+ - \cdots\cdots$$

Und mit Hilfe der bekannten Gleichungen:

$$N_1 q + N_0 r = p$$
$$N_2 r + N_1 s = p$$
$$N_3 s + N_2 t = p$$
$$\cdots\cdots$$

und

$$q N_2 - s N_0 = a_1 p$$
$$r N_3 - t N_1 = a_2 p$$
$$s N_4 - u N_2 = a_3 p$$
$$\cdots\cdots$$

bekommt man:

$$72 \cdot T_2 (q,p)$$
$$= a_0 p (p^2 + pr + r^2)$$
$$- a_1 p (q^2 + qs + s^2)$$
$$+ a_2 p (r^2 + rt + t^2)$$
$$- + \cdots\cdots$$
(21) $$+ (a_s - 1) \cdot p (z^2 + zy + y^2)$$
$$- 5p (pq - qr + rs - st + - \cdots)$$
$$+ q^3 + p + 3N.$$

Eine der Gleichung (8) zwischen $V(q, p)$ und $V(p, q)$ ähnliche Gleichung erhält man auf ähnliche Weise wie dort:

(22) $$q \cdot T_2 (q, p) + p \cdot T_2 (p, q) = \frac{1}{72} (p^4 + q^4 - 5p^2 q^2 + 3)$$

also auch

$$r \cdot T_2 (r, q) + q \cdot T_2 (q, r) = \frac{1}{72} (q^4 + r^4 - 5q^2 r^2 + 3)$$

und $$s \cdot T_2(s,r) + r \cdot T_2(r,s) = \frac{1}{72}(r^4 + s^4 - 5r^2s^2 + 3)$$

. . . . .

und hieraus endlich durch Elimination:

$$(23) \qquad \frac{1}{p} \cdot 72 \cdot T_2(q,p) = \frac{p^4 + q^4 - 5p^2q^2 + 3}{pq} - \frac{q^4 + r^4 - 5q^2r^2 + 3}{qr} + \frac{r^4 + s^4 - 5r^2s^2 + 3}{rs} - + \cdots\cdots$$

Und diese Form ist in der That unabhängig von der Art und Weise, wie $\frac{q}{p}$ in einen Kettenbruch entwickelt ist. Schon bei den Gleichungen (20) und (21) sind die Erwägungen gemacht, aus denen dieser Schluſs gezogen werden darf: Gemäſs der Definition ist T_2 unabhängig von der Art, wie $\frac{q}{p}$ entwickelt ist als Kettenbruch. T_2 hat jedoch gemäſs dieser Definition nur Sinn, wenn $q < p$. Nun giebt aber die Entwickelung von $T_2(np+q,p)$ nach (19) wie nach (20) und (21) dasselbe Resultat wie die von $T_2(q,p)$. Man hat demnach $T_2(np+q,p) = T_2(q,p)$ zu setzen; demnach ist auch

$$T_2(p,q) = T_2(a_0q + r, q) = T_2(r,q), \quad T_2(q,r) = T_2(s,r),$$

$T_2(r,s) = T_2(t,s)$ u. s. f., was überhaupt vorausgesetzt werden muſste, um von (22) zu (23) zu gelangen.

Ebenso giebt die Entwickelung nach (19) u. s. w.:

$$T_2(q,-p) = +T_2(q,p) = -T_2(-q,p)$$

und

$$T_2(-q,-p) = T_2(-q,p) = -T_2(q,p).$$

Man hat ferner, da

$$72 \cdot T_2(q,p) = 3N + p\left(\frac{p^4+q^4}{pq} - \frac{q^4+r^4}{qr} + \frac{r^4+s^4}{rs} - + \cdots\right) - 5p(pq - qr + rs - + \cdots)$$

und

$$12\,T_2(q,p) = -3N + 9p - p\left(\frac{p^2+q^2}{pq} - \frac{q^2+r^2}{qr} + - \cdots\right) + 12\varepsilon p$$

als unabhängige Form ohne N (d. h. ohne den Nenner des letzten Näherungswertes)

$$\frac{(p^4+q^4)-(q^2+r^2)}{pq} - \frac{(q^4+r^4)-(q^2+r^2)}{qr} + - \cdots - 5(pq - qr + rs - + \cdots) + 12\varepsilon.$$

Zur Entwickelung von $S_3(q,p)$ erhält man als Hilfsgleichungen

$$\left.\begin{aligned}
&\Sigma_3(q,p) + S_3(q,p) = -p^3 \cdot V(q,p) + 3p \cdot S_2(q,p)\\
&m_3(q,p) = m_3(1,p) - p^3 \cdot V(q,p) + 3p \cdot S_2(q,p) - 2S_3(q,p)\\
&S_3(q,p) + S_3(-q,p) = \tfrac{1}{60} p(p-1)(p-2)(12p^2 - 9p - 1)\\
&m_3(q,p) + m_3(-q,p) = \tfrac{1}{4} p^3 (p-1)^2 = p \cdot m_2(1,p)\\
&m_3(1,p) = \sum_1^{p-1} n^4 = \tfrac{1}{30} p(p-1)(2p-1)(3p^2 - 3p - 1)\\
&\qquad = \tfrac{1}{5} p^5 - \tfrac{1}{2} p^4 + \tfrac{1}{3} p^3 - \tfrac{1}{30} p.
\end{aligned}\right\} \quad (24)$$

Setzt man zur Abkürzung $\sum_{n=1}^{n=a_0-1} n^\nu = a_{0\nu}$, $\sum_{n=1}^{n=q-1} n^\nu = q_\nu$ u. s. w., so erhält man:

$$\begin{aligned}
&S_3(q,p) =\\
&q^3(q-1)(a_{04} + a_0^4) + a_0 S_3(q-r,q) + 3q S_2(q-r,q) a_{01}\\
&\quad + 3q^2 \cdot S(q-r,q) \cdot a_{02} + q^3 \cdot V(q-r,q) \cdot a_{03}\\
&\quad + (q-1)\{q_3 a_{01} + 3q \cdot q_2 a_{02} + 3q^2 \cdot q_1 a_{03} + q^3(q-1) \cdot a_{04}\} \quad (25)\\
&-\{m_3(q-r,q) \cdot a_{01} + 3q m_2(q-r,q) \cdot a_{02} + 3q^2 \cdot m_1(q-r,q) \cdot a_{03} + q^3 \cdot q_1 \cdot a_{04}\}\\
&\quad + S_3(s,r) + 3a_0 q \cdot S_2(s,r) + 3a_0^2 q^2 \cdot S_1(s,r) + a_0^3 q^3 \cdot V(s,r)\\
&\quad + m_3(s,r) + 3a_0 q \cdot m_2(s,r) + 3a_0^2 q^2 m_1(s,r) + a_0^3 q^3 r_1\\
&+ a_0(q-1) \cdot r_3 + 3a_0^2 q(q-1) \cdot r_2 + 3a_0^3 q^2 (q-1) \cdot r_1 + a_0^4 q^3 (q-1)(r-1)\\
&-\left(N_2 + \tfrac{a_0 s}{r}\right)\{m_3(s,r) + 3a_0 q m_2(s,r) + 3a_0^2 q^2 \cdot m_1(s,r) + a_0^3 q^3 \cdot r_1\}\\
&\quad + \tfrac{a_0}{r}\{r_4 + 3a_0 q \cdot r_3 + 3a_0^2 q^2 \cdot r_2 + a_0^3 q^3 \cdot r_1\}.
\end{aligned}$$

Hieraus läfst sich durch Beachtung aller Beziehungen zwischen den $p, q, r, s, \ldots$, den m_ν, S_ν u. s. w. finden, wenn man setzt:

$$T_3(q,p) = S_3(q,p) - \tfrac{1}{2} p^3 \cdot V(q,p) + \tfrac{1}{120} 3p(p^2-1)(p^2-4) - 5p(p-1)(p-2).$$

Die Gleichung:

$$T_3(q,p) = -a_0^2 \cdot T_3(r,q) + \left(\tfrac{2p-r}{r}\right) \cdot T_3(s,r) + \tfrac{1}{120} R(p,q,r), \quad (26)$$

wo

$$\begin{aligned}
&R(p,q,r) \cdot q^2 = 3pq(p^4 + q^4 - 5p^2q^2 + 3) + 5pq(-p^2 - q^2 - 1 + 3pq)\\
&+ \tfrac{2p-r}{r}\{-3qr(q^4 + r^4 - 5q^2r^2 + 3) - 5qr(-q^2 - r^2 - 1 + 3qr)\}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt:

$$\begin{aligned}
120[q^2 \cdot T_3(q,p) + p^2 T_3(p,q)] &= 3pq(p^4 + q^4 - 5p^2q^2 + 3)\\
&+ 5pq(-p^2 - q^2 - 1 + 3pq)
\end{aligned}$$

$$= 216pq\left(q \cdot T_2(q,p) + p \cdot T_2(p,q)\right) + 20pq\left(q \cdot T(q,p) + p \cdot T(p,q)\right)$$
$$= \mathfrak{E}_3(q,p)$$

woraus

$$120\, T_3(q,p) = p^2\left\{\frac{\mathfrak{E}_3(q,p)}{p^2q^2} - \frac{\mathfrak{E}_3(r,q)}{q^2r^2} + \frac{\mathfrak{E}_3(s,r)}{r^2s^2} - + \cdots\right\}$$

und hieraus endlich

$$(27)\qquad 120\, T_3(q,p) = 3 \cdot 72p \cdot T_2(q,p) + 5 \cdot 4 \cdot p \cdot T(q,p)$$

also

$$T_3(q,p) = p\left\{\frac{9}{5}T_2(q,p) + \frac{1}{6}T(q,p)\right\}$$
$$\left(\text{also auch } T_3(q,p) = -T_3(-q,p)\right).$$

Demnach ist S_3 in derselben Weise unabhängig wie $T(q,p)$; es hat also auf S_3 Einflufs, wenn zwei der Divisoren $p, q, r, s, \ldots$ negativ sind, und unmittelbar auf einander folgen. Eine wesentlich neue unabhängige Form liefert die Entwickelung von S_3 also nicht.

Zur Theorie der Lamé'schen Funktionen.

(Von Paul Jaerisch in Hamburg.)

Die allgemeinen Lamé'schen Funktionen definiert Heine[1]) folgendermafsen:

Lamé'sche Funktion erster Art p^{ter} Ordnung und n^{ten} Grades heifst jede ganze Funktion n^{ten} Grades der Gröfsen

$$\sqrt{x-a_0},\ \sqrt{x-a_1},\ \sqrt{x-a_2},\ \cdots\ \sqrt{x-a_p},$$

welche der Gleichung

$$(1)\qquad \frac{d^2W}{du^2} + \vartheta(x)\,W = 0$$

genügt, wo

$$(2)\qquad du = \frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{\psi(x)}},\quad \psi(x) = (x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_p)$$

gesetzt ist und mit $\vartheta(x)$ eine ganze Funktion bezeichnet wird, welche so zu bestimmen ist, dafs die Gleichung (1) die verlangte Lösung zuläfst; $a_0, a_1, a_2 \ldots$ sind Konstante.

Spezielle Lamé'sche Funktionen nennt Heine diejenigen Funktionen, welche aus den obigen für $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = \cdots a_p = 1$ hervorgehen; es ergaben sich ihm (Handbuch der Kugelfunktionen I, Crelle

1) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl. I.

J. Bd. 62) $n+1$ Funktionen, nämlich die $n+1$ Kugelfunktionen p^{ter} Ordnung. Die Lamé'schen Funktionen, welche diesen Werten der Konstanten zugehören, noch einmal aufzusuchen und dann den Begriff der speziellen Lamé'schen Funktion zu erweitern, bot sich mir ein mehrfacher Anlafs.

Erstens: Bei Bestimmung der Funktionen $\Theta(x)$ in (1) für die genannten Werte der Konstanten a_p hat Heine (cf. pag. 450 und 118 der genannten Schriften) nur die beiden Fälle in Betracht gezogen, dafs die Funktion W für $x=1$ verschwinde oder nicht verschwinde, während die gleiche Untersuchung auch für $x=0$ anzustellen war. Denn nach obiger Definition der Lamé'schen Funktion kann W eine der Formen

$$W=\sqrt{x}\,U_0,\quad W=\sqrt{x-1}\,U_1,\quad W=\sqrt{x}\sqrt{x-1}\,U_2$$

annehmen, wenn mit U_0, U_1, U_2 ganze Funktionen von x bezeichnet werden. Heine erhielt aus der Gleichung (1) für die genannten Werte der Konstanten $a_0=0$, $a_1=a_2=a_3=\cdots=a_p=1$ die Gleichung:

$$4x(x-1)\frac{d^2W}{dx^2}+2[(p+1)x-1]\frac{dW}{dx} - \left[n(n+p-1)+\frac{\nu(\nu+p-2)}{x-1}\right]W=0 \tag{2a}$$

statt der allgemeineren (Gleichung (23) des Folgenden für $l_0=1$, $l_1=p$):

$$4x(x-1)\frac{d^2W}{dx^2}+2[(p+1)x-1]\frac{dW}{dx} - \left[n(n+p-1)-\frac{\nu_0(\nu_0-1)}{x}+\frac{\nu_1(\nu_1+p-2)}{x-1}\right]W=0,$$

welche für $\nu_1=\nu$ und sowohl für $\nu_0=0$ als für $\nu_0=1$ in (2a) übergeht.

Zweitens: Legt man aber, wie es Heine that, die Gleichung (2a) der Theorie der Kugelfunktionen p^{ter} Ordnung zu Grunde und definiert dieselben als Lamé'sche Funktionen, welche dieser Gleichung genügen, so gelangt man nicht zu den $n+1$ Kugelfunktionen, welche Heine für jede Zahl n erhält, sondern aufserdem noch zu n Funktionen mit dem Charakter einer Lamé'schen Funktion, die daher auch Kugelfunktionen genannt werden müfsten.

Heine erhält seine $n+1$ Lösungen, indem er setzt

$$W=(x-1)^{\frac{\nu}{2}}U, \tag{2b}$$

wo U als ganze Funktion von $\sqrt{x}$ definiert wird, die für $x=1$ nicht verschwinden soll; und aus der Gleichung (2a) ergiebt sich ihm für diesen Wert W die folgende Gleichung für U:

$$(2c) \qquad Ax(x-1)\frac{d^2U}{dx^2} + 2[(p+2\nu+1)x-1]\frac{dU}{dx} + (\nu-n)(\nu+n+p-1)U = 0.$$

Setzt man dagegen in (2a) entsprechend der obigen Form $\sqrt{x}\sqrt{x-1}U_2$, die W auch annehmen kann:

$$(2d) \qquad W = x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{\nu}{2}}U'$$

und legt U' die Bedingung auf, aufser für $x=1$ noch für $x=0$ nicht zu verschwinden, so genügt dieser Ausdruck für W der Gleichung (2a), wenn U' bestimmt wird durch die Gleichung:

$$(2e) \qquad 4x(x-1)\frac{d^2U'}{dx^2} + 2[(p+2\nu+3)x-3]\frac{dU'}{dx} + (\nu+1-n)(\nu+n+p)U' = 0.$$

Diese Gleichung besitzt jedenfalls ein Integral, welches eine ganze Funktion von $\sqrt{x}$ ist (vom Grade $n-\nu-1$). Und für dieses Integral U' haben die Funktionen W in der Form (2d) jedenfalls den Charakter einer Lamé'schen Funktion.[1]) Ihre Anzahl ist gleich n; denn da W vom Grade n in $\sqrt{x}$ vorausgesetzt wurde, U' aber vom Grade $n-\nu-1$ ist, so kann ν nur die Werte

$$0, 1, 2 \ldots n-1$$

annehmen; also gehören zu jedem n auch n Funktionen W in der Form (2d), während aus ähnlichem Grunde zu jedem n $n+1$ Funktionen W in der Form (2b) gehören.

---

1) Die Integrale der Gleichungen (2c) und (2e), welche ganze Funktionen von $\sqrt{x}$ sind, haben folgende Form

$$U = CF\left(-\frac{n-\nu}{2}, \frac{n+\nu+p-1}{2}, \frac{1}{2}, x\right)$$

$$U' = C'F\left(-\frac{n-\nu-1}{2}, \frac{n+\nu+p}{2}, \frac{3}{2}, x\right);$$

denn die bekannte hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ genügt der Gleichung

$$x(x-1)\frac{d^2F}{dx^2} + \left((\alpha+\beta+1)x-\gamma\right)\frac{dF}{dx} + \alpha\beta F = 0.$$

C und C' sind Konstante.

Auch in der Arbeit Crelle, J. 62, welche über spezielle Lamé'sche Funktionen handelt, leitet Heine aus der Gleichung (1) für die Werte der Konstanten $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = \cdots a_p = 1$ die Gleichung (2a) ab und stellt als Lamé'sche Funktionen erster Art nur die $n+1$ Kugelfunktionen auf, die zu jedem n gehören und die Form haben

$$(x-1)^{\frac{\nu}{2}}U,$$

wo U, wie oben, definiert wird.

Die allgemeinere Gleichung, welche ich im Folgenden aus (1) für die speziellen Werte der Konstanten $a_0 = 0$, $a_1 = a_2 = \cdots a_p = 1$ in der Gleichung (23) erhalten habe, liefert für jedes n $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Lösungen mit dem Charakter einer Lamé'schen Funktion; unter diesen sind die eben genannten $2n+1$ Lamé'schen Funktionen vorhanden, welche der Definitionsgleichung der Kugelfunktionen genügen und darunter $n+1$ Funktionen, welche mit den Kugelfunktionen identisch sind.

Hieraus geht hervor, dafs Heine die Kugelfunktionen p^{ter} Ordnung nicht als Lamé'sche Funktionen für die obigen Werte der Konstanten a definieren durfte, wie er Seite 450 im ersten Teile seines Handbuchs der Kugelfunktionen, 2. Aufl., that, sondern dem historischen Entwickelungsgange der Kugelfunktionen folgend auch die Kugelfunktionen p^{ter} Ordnung als Entwickelungskoeffizienten definieren mufste.

Einen weiteren Anlafs mich mit den speziellen Lamé'schen Funktionen zu beschäftigen, bot mir die hypergeometrische Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Diese hat für ein negatives erstes oder zweites ganzes Element die Eigenschaften der Lamé'schen Funktionen; dann lassen sich sämtliche Kugelfunktionen bis auf Potenzen der Gröfsen $\sqrt{x-a_p}$ durch die hypergeometrische Reihe ausdrücken. Diese mufs sich daher als Lamé'sche Funktion auffassen lassen und zwar gehört sie, wie man leicht einsieht, zu denjenigen Lamé'schen Funktionen, für welche die Konstanten a in zwei Gruppen einander gleich werden.[1])

Durch Verallgemeinerung des Verfahrens, welches von der Lamé'schen Gleichung (1) zu der Differentialgleichung derjenigen Lamé'schen Funktionen führte, für welche die Konstanten a in zwei Gruppen einander gleich werden, erhielt ich eine Gleichung [(15) des

---

1) Die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ (in voriger Anmerkung) kann leicht in der Form (1) geschrieben werden; nämlich zunächst in der Form

$$x^{2-\gamma}(x-1)^{\alpha+\beta+\gamma}\frac{d}{dx}\left[x^{\gamma-1}(x-1)^{1-(\alpha+\beta+\gamma)}\frac{dF}{dx}\right]+\alpha\beta F=0,$$

und dann in der Form

$$\frac{d^2F}{du^2}+\vartheta(x)F=0,$$

wo zu setzen ist:

$$du=\frac{1}{2}\frac{dx}{\sqrt{\psi x}},\quad \sqrt{\psi(x)}=x^{\gamma-1}(x-1)^{1+(\alpha+\beta+\gamma)}$$

$$\vartheta(x)=4\alpha\beta x^{2\gamma-3}(x-1)^{1-2(\alpha+\beta+\gamma)}.$$

Folgenden], welcher Lamé'sche Funktionen genügen, für welche die Konstanten a zu $i+1$ Gruppen einander gleich geworden sind. Diese so verallgemeinerten speziellen Lamé'schen Funktionen nenne ich im Folgenden Lamé'sche Funktionen $i+1^{\text{ter}}$ Gattung. Die Funktion $\vartheta(x)$ der Lamé'schen Gleichung (1) konnte dabei bis auf $i-1$ Konstante bestimmt werden.

Zur Ableitung der Gleichung (15) für die Lamé'schen Funktionen $i+1^{\text{ter}}$ Gattung wurde nur die Voraussetzung gemacht, die nach der vorangestellten Heine'schen Definition der Lamé'schen Funktionen berechtigt ist, dafs sich W in folgender Form darstellen lasse:

$$W = (x-a_0)^{\frac{\nu_0}{2}}(x-a_1)^{\frac{\nu_1}{2}}\cdots(x-a)^{\frac{\nu_i}{2}}U,$$

wo mit U eine ganze Funktion von $\sqrt{x}$ vom Grade $n-\nu_0-\nu_1\cdots-\nu_i$ bezeichnet wird, die für $x=a_0$, $x=a_1$, $\ldots$ $x=a_i$ nicht verschwindet.

Da die betrachteten Funktionen $i+1^{\text{ter}}$ Gattung für $i=p$ mit den von Heine definierten allgemeinen Lamé'schen Funktionen identisch werden, so haben diese durch die Form

$$W = (x-a_0)^{\frac{\nu_0}{2}}(x-a_1)^{\frac{\nu_1}{2}}\cdots(x-a_p)^{\frac{\nu_p}{2}}U$$

und ihre Gleichung in Gleichung (15) des Folgenden eine Darstellung erhalten, die ihrer Definition entspricht.

Die gewonnenen Resultate wende ich dann auf die Lamé'schen Funktionen erster und zweiter Gattung an; ich beschränke mich auf die Funktionen erster Art. Die Funktionen zweiter Art sind Lösungen derselben Differentialgleichung (1), die nach absteigenden Potenzen von x, mit $x^{-\frac{n+p-1}{2}}$ beginnend, entwickelbar sind und sich stets, wie Heine allgemein gezeigt hat, aus den Funktionen erster Art herstellen lassen.

Die Funktionen zweiter Gattung enthalten 5 willkürliche Konstante; sie gehen für besondere Werte derselben in die hypergeometrische Reihe über. Und man kann sagen: Die Funktionen, welche der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe genügen, verhalten sich zu den allgemeinen Lamé'schen Funktionen zweiter Gattung, wie in der Theorie der Kugelfunktionen die Funktionen $\mathfrak{P}_\nu^n(x)$ zu $P_\nu^n(x)$. Ich behalte mir vor bei anderer Gelegenheit ausführlicher auf die speziellen Lamé'schen Funktionen einzugehen.

Lamé'sche Funktionen $i+1^{\text{ter}}$ Gattung.

§ 1. Lamé'sche Funktion $i+1^{\text{ter}}$ Gattung, n^{ten} Grades, p^{ter} Ordnung erster Art ($i+1^{\text{te}}$ spezielle Lamé'sche Funktion) nenne ich jede ganze Funktion n^{ten} Grades der Gröfsen

$$\sqrt{x-a_0},\ \sqrt{x-a_1}\cdots\sqrt{x-a_i},$$

welche der Differentialgleichung (1) für

$$\psi(x)=(x-a_0)^{l_0}(x-a_1)^{l_1}\cdots(x-a_i)^{l_i} \tag{3}$$

genügt; wobei $\vartheta(x)$ die obige Bedeutung hat. $l_0, l_1 \ldots l_i$ sind positive ganze Zahlen, weil der Ausdruck (3) für $\psi(x)$ aus (2) dadurch hervorgegangen sein soll, dafs die a_p zu i Gruppen einander gleich werden. Hieraus folgt für die Konstanten l_i die Bedingung:

$$\begin{cases} l_0+l_1+l_2+\cdots l_i=p+1, \\ i\leqq p, \end{cases} \tag{4}$$

und dann für $i=p$ die weitere Bedingung:

$$l_0=l_1=l_2=\cdots l_p=1. \tag{4a}$$

Die $p+1^{te}$ spezielle Lamé'sche Funktion mufs demnach bis auf eine Konstante mit der allgemeinen Lamé'schen Funktion Heines identisch sein.

$\vartheta(x)$ ist als ganze Funktion $p-1^{ten}$ Grades definiert

$$\vartheta(x)=k_0x^{p-1}+k_1x^{p-2}+\cdots k_p; \tag{4b}$$

Heine zeigt, dafs der Koeffizient k_0 der höchsten Potenz stets gegeben ist durch

$$k_0=-n(n+p-1). \tag{4c}$$

Die übrigen Koeffizienten $k_1, k_2 \ldots k_p$ sind so zu bestimmen, dafs die Gleichung (1) durch Lamé'sche Funktionen integriert werden kann. Für die Funktionen $i+1^{ter}$ Gattung lassen sich diese Koeffizienten bis auf $i-1$ Koeffizienten weiter bestimmen, was nun geschehen soll.

§ 2. Die Gleichung (1) nimmt zunächst durch (2) die Form an:

$$4\psi(x)\frac{d^2W}{dx^2}+2\psi'(x)\frac{dW}{dx}+\vartheta(x)W=0. \tag{5}$$

W ist als Lamé'sche Funktion eine ganze Funktion der Gröfsen $\sqrt{x-a_i}$ oder gleich einer Potenz dieser Gröfsen multipliziert mit einer ganzen Funktion von x. Wir können daher setzen:

$$W=(x-a_0)^{\frac{\nu_0}{2}}(x-a_1)^{\frac{\nu_1}{2}}(x-a_2)^{\frac{\nu_2}{2}}\cdots(x-a_i)^{\frac{\nu_i}{2}}\cdot U, \tag{6}$$

wenn wir mit U eine ganze Funktion bezeichnen, der wir die Bedingung auferlegen für $x=a_0, a_1 \ldots a_i$ nicht zu verschwinden. Die Konstanten $\nu_0\nu_1 \ldots \nu_i$ genügen der Bedingung:

$$\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_i\leqq n,$$

da n den Grad von W in den Gröfsen $\sqrt{x-a_i}$ oder einfacher in $\sqrt{x}$ bezeichnet.

Da W durch die $\frac{\nu_0}{2}$te Potenz von $x-a_0$, durch die $\frac{\nu_1}{2}$te Potenz von $x-a_1$ u. s. w. teilbar ist, so ist $\frac{dW}{dx}$ durch die $\frac{\nu_0}{2}-1$te, $\frac{\nu_1}{2}-1$te u. s. w. Potenz dieser Gröfsen, $\frac{d^2W}{dx^2}$ durch die $\frac{\nu_0}{2}-2$te, $\frac{\nu_1}{2}-2$te u. s. w. Potenz dieser Gröfsen teilbar; daher ist nach dem Ausdruck (3) für $\psi(x)$ sowohl $\psi(x)\frac{d^2W}{dx^2}$ als $\psi'\frac{dW}{dx}$ und folglich (cf. 1 u. 5) auch $\frac{d^2W}{du^2}$ durch die $\frac{\nu_0}{2}+l_0-2$te, $\frac{\nu_1}{2_0}+l_1-2$te u. s. w. Potenz dieser Gröfsen teilbar. Und damit die Gleichung (1) bestehe, mufs auch $\vartheta(x)W$ durch die gleichen Potenzen von $x-a_i$ teilbar und demnach $\vartheta(x)$ von der Form sein:

$$(7)\qquad \vartheta(x)=(x-a_0)^{l_0-2}(x-a_1)^{l_1-2}\cdots(x-a_i)^{l_i-2}\eta(x),$$

wo η eine ganze Funktion von x bezeichnet und zwar vom Grade:

$$p-1-(l_0-2+l_1-2+\cdots l_i-2),$$

also nach (4) vom Grade

$$(p-1)-(l_0+l_1+\cdots l_i)+2(i+1)=2i.$$

Der Koeffizient der höchsten ($2i^{\text{ten}}$) Potenz von $\eta(x)$ ist durch 3 gegeben; zur Bestimmung der übrigen $2i$ Konstanten in $\eta(x)$ führen wir den Ausdruck (6) für W in die Differentialgleichung (5) ein.

§ 3. Setzt man zur Abkürzung

$$(8)\qquad \begin{cases}\varphi_i=(x-a_0)(x-a_1)\cdots(x-a_i),\\ \chi_i=\frac{l_0}{x-a_0}+\frac{l_1}{x-a_1}+\cdots\frac{l_i}{x-a_i},\end{cases}$$

so geht durch Einführung der Werte (3) und (7) für $\psi(x)$ und $\vartheta(x)$ die Gleichung (5) über in:

$$(9)\qquad 4\varphi_i^2\frac{d^2W}{dx^2}+2\varphi_i^2\chi_i\frac{dW}{dx}+\eta(x)W=0.$$

In diese Gleichung wird für W der Wert (6)

$$W=(x-a_0)^{\frac{\nu_0}{2}}(x-a_1)^{\frac{\nu_1}{2}}\cdots(x-a_i)^{\frac{\nu_i}{2}}U$$

eingeführt; man erhält für U die Gleichung:

$$(10)\qquad 4\varphi_i^2\frac{d^2U}{dx^2}+2\varphi_i^2(4v_i+\chi_i)\frac{dU}{dx}$$
$$+\left\{2\varphi_i^2\left(2v_i^2+\chi_iv_i+2\frac{dv_i}{dx}\right)+\eta(x)\right\}U=0,$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist:

(10a) $$v_i = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_0}{x-a_0} + \frac{\nu_1}{x-a_1} + \cdots \frac{\nu_i}{x-a_i}\right).$$

U war definiert als ganze Funktion von x, welche für $x = a_0, a_1 \ldots a_i$ nicht verschwindet; da aber die ersten Glieder der Gleichung (11) für diese Werte Null werden, so kann die Gleichung nur dann bestehen, wenn der Koeffizient von U für diese Werte von x verschwindet; also

(11) $$2\varphi_i^2\left(2v_i^2 + \chi_i v_i + 2\frac{dv_i}{dx}\right) + \eta(x) = 0 \quad \text{für } x = a_0, a_1 \ldots a_i.$$

Diese $i+1$ Gleichungen dienen zur Bestimmung von Konstanten in $\eta(x)$; $\eta(x)$ behält dann noch $i-1$ willkürliche Konstante.

Das erste Glied der linken Seite der Gleichung (11) zerfällt mit Rücksicht auf die eingeführten Abkürzungen (8) und (10a) in Glieder der Form

$$\frac{c^2\varphi_i^2}{(x-a_k)(x-a_j)};$$

diese Glieder verschwinden für $x = a_0, a_1 \ldots = a_i$, wenn $k \lesseqgtr j$; k und j sind Zahlen der Reihe 0, 1, 2 ... i. Es läfst sich daher Gleichung (12) durch folgende ersetzen:

$$\varphi_i^2 \sum_0^i \frac{\nu_j(\nu_j + l_j - 2)}{(x-a_j)^2} + \eta(x) = 0.$$

Es folgt hieraus

(12)
$$\begin{cases}
\eta(a_0) = -\nu_0(\nu_0 + l_0 - 2)(a_0-a_1)^2(a_0-a_2)^2\ldots(a_0-a_i)^2, \\
\eta(a_1) = -\nu_1(\nu_1 + l_1 - 2)(a_1-a_0)^2(a_1-a_2)^2(a_1-a_3)^2\ldots(a_1-a_i)^2, \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\eta(a_k) = -\nu_k(\nu_k + l_k - 2)(a_k-a_0)^2(a_k-a_1)^2\ldots(a_k-a_{k-1})^2 \\
\qquad\qquad (a_k-a_{k+1})^2(a_k-a_{k+2})^2\ldots(a_k-a_i)^2, \\
\quad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
\eta(a_i) = -\nu_i(\nu_i + l_i - 2)(a_i-a_0)^2(a_i-a_1)^2\ldots(a_i-a_{i-1})^2.
\end{cases}$$

$\eta(x)$ ist eine ganze Funktion $2i^{\text{ten}}$ Grades; man gelangt in einfacher Weise zu den Werten für die durch die Gleichungen (12) bestimmbaren $i+1$ Konstanten von $\eta(x)$, wenn man $\eta(x)$ in folgender Form ansetzt:

(13) $$\eta(x) = -\varphi_i\left\{\eta_0 x^{i-1} + \eta_1 x^{i-2} + \cdots \eta_{i-1} + \frac{\eta_i}{x-a_0} + \frac{\eta_{i+1}}{x-a_1} + \cdots \frac{\eta_{2i}}{x-a_i}\right\},$$

wo $\eta_0, \eta_1 \ldots \eta_{2i}$ Konstante bezeichnen, und wo φ_i durch die Funktion

$i+1^{\text{ten}}$ Grades $(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_i)$ zu ersetzen ist. dieser Form (13) für $\eta(x)$ folgt:

$$\eta(a_0) = -\eta_i(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_i),$$
$$\eta(a_1) = -\eta_{i+1}(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_i),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta(a_k) = -\eta_{i+k}(a_k-a_0)(a_k-a_1)\dots(a_k-a_{k-1})(a_k-a_{k+1})\dots(a_k-$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta(a_i) = -\eta_{2i}(a_i-a_0)(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1}).$$

Hieraus folgt sofort durch Vergleich mit (12):

$$\eta_i = \nu_0(\nu_0+l_0-2)(a_0-a_1)(a_0-a_2)\dots(a_0-a_i),$$
$$\eta_{i+1} = \nu_1(\nu_1+l_1-2)(a_1-a_0)(a_1-a_2)\dots(a_1-a_i),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta_{i+k} = \nu_k(\nu_k+l_k-2)(a_k-a_0)(a_k-a_1)\dots(a_k-a_{k-1})$$
$$(a_k-a_{k+1})\dots(a_k-a_i),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\eta_{2i} = \nu_i(\nu_i+l_i-2)(a_i-a_0)(a_i-a_1)\dots(a_i-a_{i-1}).$$

Diese Ausdrücke für $\eta_i, \eta_{i+1}\dots\eta_{2i}$ lassen sich einfacher schre durch Einführung der Funktion

$$\varphi_i(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_i);$$

es ist

$$\text{(14a)}\qquad \eta_{i+k} = \nu_k(\nu_k+l_k-2)\frac{\varphi_i(a_k)}{a_k-a_k} \quad \text{für } k = 0, 1, 2\dots i$$

Mit Rücksicht auf (5), (7) und (13) erhält man noch

$$\text{(14b)}\qquad \eta_0 = n(n+p-1);$$

die übrigen Konstanten $\eta_1, \eta_2\dots\eta_{i-1}$ sind unbestimmt gebli Hiermit hat sich ergeben:

Die sämtlichen Lamé'schen Funktionen $i+1^{\text{ter}}$ Gat genügen der Differentialgleichung:

$$\text{(15)}\qquad 4(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_i)\frac{d^2W}{dx^2}$$
$$+2(x-a_0)(x-a_1)\dots(x-a_i)$$
$$\left\{\frac{l_0}{x-a_0}+\frac{l_1}{x-a_1}+\dots\frac{l_i}{x-a_i}\right\}\frac{dW}{dx}$$
$$-\left\{\eta_0x^{i-1}+\eta_1x^{i-2}+\dots+\eta_{i-2}x+\eta_{i-1}\right.$$
$$\left.+\frac{\eta_i}{x-a_0}+\frac{\eta_{i+1}}{x-a_1}+\dots\frac{\eta_{2i}}{x-a_i}\right\}W=0,$$

und die Funktionen erster Art haben die Form

$$\text{(15a)}\qquad W = (x-a_0)^{\frac{\nu_0}{2}}(x-a_1)^{\frac{\nu_1}{2}}\dots(x-a_i)^{\frac{\nu_i}{2}}U,$$

wo U eine ganze Funktion von x bezeichnet, welche der Gleichung (11) genügt; $a_0, a_1 \ldots a_i$ sind beliebige Konstante, $l_0, l_1 \ldots l_i$ positive ganze Zahlen; $\nu_0, \nu_1 \ldots \nu_i$ sind beliebige ganze Zahlen mit der Bedingung

$$\nu_0 + \nu_1 + \cdots \nu_i \leq n,$$

wo n den Grad von W in $\sqrt{x}$ bezeichnet. $\eta_0, \eta_i, \eta_{i+1} \ldots \eta_{2i}$ sind in (14a) und (14b) bestimmt; $\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{i-1}$ sind willkürliche Konstante, über die so zu verfügen ist, dafs die Gleichung (10) durch eine ganze Funktion U erfüllt wird. Es ist $i \leqq p$; für $i = p$ hat man $l_0 = l_1 = l_2 = \cdots = l_p = 1$ zu setzen.

Die Lamé'sche Funktion $p+1^{\text{ter}}$ Gattung ist identisch mit der von Heine eingeführten Lamé'schen Funktion p^{ter} Ordnung; diese hat daher in (15a) und ihre Gleichung in (15) eine Form erhalten, die ihrer Definition entspricht.

Lamé'sche Funktionen erster Gattung.

§ 3. Die Differentialgleichung für die Funktionen erster Gattung geht aus (15) hervor für $i = 0$:

$$4(x-a_0)\frac{d^2W}{dx^2} + 2l_0\frac{dW}{dx} - \frac{\eta_0}{x-a_0}W = 0.^{1}) \tag{16}$$

Für η_0 ergiebt sich einmal nach (14):

$$\eta_0 = n(n+p-1)$$

und nach (14b) für $k = i = 0$:

$$\eta_0 = \nu_0(\nu_0 + l_0 - 2).$$

Durch Gleichsetzung beider Werte folgen, weil nach (4) $l_0 = p+1$ ist, für ν_0 die Werte:

$$\nu_0 = n, \quad \nu_0 = -(n+p-1).$$

Nach (15a) hat man weiter

$$W = (x-a_0)^{\frac{n}{2}} U_1,$$

$$W = (x-a_0)^{-\frac{n+p-1}{2}} U_2$$

zu setzen, wo U_1 und U_2 als ganze Funktionen von x durch (16) zu bestimmen sind. Trägt man nun in (16) für W einen Ausdruck von der Form:

1) Diese Gleichung wird gegen Ende des § nochmals aus der allgemeinen Lamé'schen Gleichung (5) abgeleitet, da sich für den einfachsten Fall der Funktionen 1ter Gattung $\Theta(x)$ leicht direkt bestimmen läfst.

$$W = (x - a_0)^{\frac{k}{2}} U$$

ein, so ergiebt sich für U sowohl wenn $k = n$, als wenn $k = -(n+p-1)$ gesetzt wird, die Gleichung:

$$2(x - a_0)\frac{d^2U}{dx^2} + 2(2k + p + 1)\frac{dU}{dx} = 0$$

mit der Lösung

$$U = c_0 + c_1 (x - a_0)^{-\frac{4k+p-1}{2}}.$$

Hieraus entsteht U_1 resp. U_2 für die genannten Werte $k = n$ und $k = -(n + p - 1)$. Da U_1 und U_2 als ganze Funktionen von x vorausgesetzt waren, so folgt $c_1 = 0$ d. h. U_1 und U_2 sind beide = Konst. Setzen wir noch a für a_0, so haben wir das Resultat:

Die Lamé'schen Funktionen erster Gattung, erster und zweiter Art sind

$$W = (x - a)^{\frac{n}{2}} \quad \text{und} \quad W = (x - a)^{-\frac{n+p-1}{2}};$$

sie genügen der Differentialgleichung:

$$4(x-a^2)\frac{d^2W}{dx^2} + 2(p+1)(x-a)\frac{dW}{dx} - n(n+p-1)W = 0.$$

Für die Funktionen erster Gattung lassen sich die gewonnenen Resultate leicht direkt aus (5) herleiten. Man hat dazu

$$\psi(x) = (x - a_0)^{l_0}$$

zu setzen und $\vartheta(x)$ so zu bestimmen, dafs die entstehende Gleichung:

$$4(x - a_0)^{l_0}\frac{d^2W}{dx^2} + 2l_0(x - a_0)^{l_0-1}\frac{dW}{dx} + \vartheta(x)W = 0$$

eine Lösung von der Form:

$$W = (x - a_0)^{\frac{\nu_0}{2}} U$$

zuläfst, wo U eine ganze Funktion von x ist. Über U setzen wir noch wie früher voraus, dafs U für $x = a$ nicht verschwinde. Die obige Gleichung geht nun in folgende für U über nach Division durch $(x - a_0)^{l_0 + \frac{\nu_0}{2} - 2}$:

$$4(x - a_0)^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2(l_0 + 2\nu_0)(x - a_0)\frac{dU}{dx}$$
$$+ \{\nu_0(\nu_0 + l_0 - 2) + (x - a_0)^{-l_0+2}\vartheta(x)\}U = 0.$$

Das letzte Glied dieser Gleichung mufs, da U ganze Funktion sein soll, vom gleichen Grade wie die ersten beiden sein, also der Faktor von U eine Konstante, daher $(x - a_0)^{-l_0+2}\vartheta(x) = \text{Konst.}$ und

$$\vartheta(x) = \text{Konst.}\,(x - a_0)^{l_0-2};$$

Der Koeffizient der höchsten Potenz von $\Theta(x)$ ist nach (5a) $-n(n+p-1)$; daher

$$\Theta(x) = -n(n+p-1)(x-a_0)^{l_0-2}.$$

Hierdurch erhalten die Gleichungen für W und U die Formen:

$$4(x-a_0)^2\frac{d^2W}{dx^2} + 2l_0(x-a_0)\frac{dW}{dx} - n(n+p-1)W = 0$$

$$4(x-a_0)^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2(l_0+2\nu_0)(x-a_0)\frac{dU}{dx}$$
$$+ \{\nu_0(\nu_0+l_0-2) - n(n+p-1)\}U = 0$$

Die erste Gleichung hat die verlangte Form. Setzen wir in der zweiten Gleichung $x = a_0$, so mufs, weil $U \gtrless 0$ für $x = a_0$ vorausgesetzt ist,

$$\nu_0(\nu_0+l_0-2) - n(n+p-1) = 0$$

sein, also

$$\nu_0 = n \quad \text{oder} \quad \nu_0 = -(n+p-1)$$

wenn l_0 nach (4) durch $p+1$ ersetzt wird. Hierdurch erhält auch die Gleichung für U die verlangte Form:

$$4(x-a_0)\frac{d^2U}{dx^2} + 2(2\nu_0+p+1)\frac{dU}{dx} = 0.$$

Das Weitere folgt wie vorhin.

Lamé'sche Funktionen zweiter Gattung.

§ 4. Die Funktionen zweiter Gattung gehen aus (15) und (15a) für $i = 1$ hervor:

$$(17)\quad \begin{cases} 4(x-a_0)(x-a_1)\frac{d^2W}{dx^2} + 2(x-a_0)(x-a_1)\left\{\frac{l_0}{x-a_0} + \frac{l_1}{x-a_1}\right\}\frac{dW}{dx} \\ \qquad -\left(\eta_0 + \frac{\eta_1}{x-a_0} + \frac{\eta_2}{x-a_1}\right)W = 0 \\ W = (x-a_0)^{\frac{\nu_0}{2}}(x-a_1)^{\frac{\nu_1}{2}}U, \end{cases}$$

wo mit U eine ganze Funktion von x bezeichnet wird, welche für $x = a_0$ und $x = a_1$ nicht verschwindet. Ferner folgt aus (14) und (14b) für $i = 1$, $k = 0$ und 1:

$$(17a)\quad \begin{cases} \eta_0 = n(n+p-1), \\ \eta_1 = \nu_0(\nu_0+l_0-2)(a_0-a_1), \\ \eta_2 = \nu_1(\nu_1+l_1-2)(a_1-a_0). \end{cases}$$

Die Gleichung für W läfst sich vereinfachen, indem man setzt:

$$x = (a_1 - a_0)\, s + a_0,$$

also $$x - a_0 = (a_1 - a_0)\, s,$$

$$x - a_1 = (a_1 - a_0)\,(s - 1).$$

Ersetzt man in der hierdurch aus (17) entstehenden Gleichung wieder s durch den Buchstaben x, so hat man wegen (17a), wenn man noch $(a_1 - a_0)^{\frac{\nu_0 + \nu_1}{2}} W$ für W schreibt:

$$(18)\quad \begin{cases} 4x(x-1)\frac{d^2W}{dx^2} + 2x(x-1)\left\{\frac{l_0}{x} + \frac{l_1}{x-1}\right\}\frac{dW}{dx} \\ -\left(n(n+p-1) - \frac{\nu_0(\nu_0+l-2)}{x} + \frac{\nu_1(\nu_1+l_1-2)}{x-1}\right)W = 0 \\ W = x^{\frac{\nu_0}{2}}(x-1)^{\frac{\nu_1}{2}}\, U, \end{cases}$$

wo U, wie früher, eine ganze Funktion sein und jetzt sowohl für $x = 0$ als für $x = 1$ nicht verschwinden soll.

Man hätte (18) auch aus (17) durch Einführung der Werte $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ erhalten können. Das wollen wir bei Bildung der Gleichung für U berücksichtigen. Die Gleichung (10) geht für $i = 1$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ mit Rücksicht auf (8), (10a) und (13) über in:

$$(19)\quad 4x^2(x-1)^2\frac{d^2U}{dx^2} + 2x^2(x-1)^2(4\nu_1 + \chi_1)\frac{dU}{dx}$$
$$+\left\{2x^2(x-1)^2\left(2\nu_1^2 + \chi_1\nu_1 + 2\frac{d\nu_1}{dx}\right) + \eta(x)\right\}U = 0,$$

wo zu setzen ist

$$(19a)\quad \begin{cases} \nu_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{\nu_0}{x} + \frac{\nu_1}{x-1}\right), \\ \chi_1 = \frac{l_0}{x} + \frac{l_1}{x-1}, \\ \eta(x) = -x(x-1)\left\{\eta_0 + \frac{\eta_1}{x} + \frac{\eta_2}{x-1}\right\}; \end{cases}$$

und nach (17a)

$$(19b)\quad \begin{cases} \eta_0 = n(n+p-1), \\ \eta_1 = -\nu_0(\nu_0 + l_0 - 2), \\ \eta_2 = \nu_1(\nu_1 + l_1 - 2). \end{cases}$$

Zunächst wird

$$(20)\quad 4\nu_1 + \chi_1 = \frac{(p+2q+1)x - (2\nu + l_0)}{x(x-1)}$$

wobei zur Abkürzung gesetzt ist (cf. 4)

$$(21)\quad \begin{cases} p = l_0 + l_1 - 1, \\ q = \nu_0 + \nu_1. \end{cases}$$

Ferner hat man:

$$4v_1^2 + 2\chi_1 v_1 + 4\frac{dv_1}{dx} = 2v_1(2v_1 + \chi_1) + 4\frac{dv_1}{dx}$$

$$= \left(\frac{v_0}{x} + \frac{v_1}{x-1}\right)\left(\frac{v_0+l_0}{x} + \frac{v_1+l_1}{x-1}\right) - \frac{2v_0}{x^2} - \frac{2v_1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{v_0(v_0+l_0-2)}{x^2} + \frac{v_1(v_1+l_1-2)}{(x-1)^2} + \frac{v_0(v_1+l_1)+v_1(v_0+l_0)}{x(x-1)};$$

glich

$$2x^2(x-1)^2\left(2v_1^2+2\chi_1 v_1+\frac{dv_1}{dx}\right) = (x-1)^2 v_0(v_0+l_0-2)$$

$$+ x v_1^2(v_1+l_1-2) + x(x-1)(2v_0 v_1 + v_0 l_1 + v_1 l_0).$$

Ferner

$$\eta(x) = -x(x-1)\eta_0 - (x-1)\eta_1 - x\eta_2.$$

Vergleicht man diesen Ausdruck mit vorigen, so erkennt man cht, dafs mit Rücksicht auf die Ausdrücke (19b) für die Konstanten , η_1, η_2 sich in

$$2x^2(x^2-1)\left(2v_1^2 + \chi_1 v_1 + 2\frac{dv_1}{dx}\right) + \eta(x)$$

nächst $x-1$ und dann noch x als Faktor absondern läfst, und man ält diesen Ausdruck in der einfachen Form:

$$x-1)\ \{v_0(v_0+l_0-2) + v_1(v_1+l_1-2) - n(n+l_0+l_1-2)$$
$$+ 2v_0 v_1 + v_0 l_1 + v_1 l_0\}$$

d dafür:

$$x(x-1)(v_0+v_1-n)(v_0+v_1+n+l_0+l_1-2)$$

d schliefslich mit Rücksicht auf (21):

$$x(x-1)(q-n)(q+n+p-1).$$

Durch diesen Ausdruck hat man den Faktor von U in der eichung (19) zu ersetzen; damit gewinnt diese Gleichung die sehr ıfache Gestalt:

2) $$4x(x-1)\frac{d^2U}{dx^2} + 2\{(p+2q+1)x - (l_0+2v_0)\}\frac{dU}{dx}$$
$$+ (q-n)(q+n+p-1)U = 0.$$

Das eine Integral dieser Gleichung ist eine ganze Funktion geben durch:

2a) $$U = C \cdot F\left(-\frac{n-q}{2}, \frac{n+q+p-1}{2}, \frac{l_0}{2}+v_0, x\right),$$

C eine noch unbestimmte Konstante bedeutet. Da $q < n$ voraus- ıetzt wurde, so bricht die hypergeometrische Reihe F ab und U eine ganze Funktion.

Wir haben das Resultat:

Alle Lamé'schen Funktionen zweiter Gattung, n^{ten} Grades p^{ter} Ordnung genügen der Differentialgleichung:

$$(23)\qquad 4x(x-1)\frac{d^2W}{dx^2}+2\left\{(p+1)x-l_0\right\}\frac{dW}{dx}$$
$$-\left\{n(n+p-1)-\frac{\nu_0(\nu_0+l_0-2)}{x}+\frac{\nu_1(\nu_1+l_1-2)}{x-1}\right\}W=0$$

und zwar haben die Funktionen erster Art die Form

$$(23a)\qquad W=x^{\frac{\nu_0}{2}}(x-1)^{\frac{\nu_1}{2}}U,$$

wo U eine ganze Funktion von $\sqrt{x}$ vom Grade $n-q$ ist, die der Gleichung (22) genügt und durch (22a) definiert ist. Zur Abkürzung ist gesetzt:

$$p+1=l_0+l_1,$$
$$q=\nu_0+\nu_1.$$

l_0, l_1, ν_0, ν_1 sind ganze Zahlen mit der Bedingung

$$q=\nu_0+\nu_1\leqq n.$$

Zu jedem n gehören $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ Funktionen W.

Die letzte Behauptung ist noch zu erweisen. Für

$\nu_0=0$ kann ν_1 die $n+1$ Werte $0, 1, 2 \ldots n$ annehmen,
$\nu_0=1$ „ ν_1 „ n „ $0, 1, 2 \ldots n-1$ „
. . . . . .
$\nu_0=j$ „ ν_1 „ $n-j+1$ „ $0, 1, 2 \ldots n-j$ „
. . . . . .
$\nu_0=n$ „ ν_1 „ 1 „ 0 „

Die Anzahl zugehöriger Wertpaare ν_0, ν_1 ist daher, wie angegeben:

$$(24)\quad =(n+1)+n+(n-1)+\cdots+(n-j+1)+\cdots+2+1$$
$$=\frac{(n+1)(n+2)}{2}.$$

Die Lamé'schen Funktionen zweiter Gattung enthalten für $\nu_0=\nu_1=0$ die gleiche Anzahl willkürlicher Konstanten wie die hypergeometrische Reihe; sie gehen in diese über, wenn noch $\frac{q}{2}$ durch α, $\frac{n+p-1}{2}$ durch β, l_0 durch γ ersetzt wird; und die Funktionen, welche der Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe genügen, stehen zu den durch (23) und (23a) definierten allgemeinen Funktionen in demselben Verhältnis, wie die von Heine eingeführten Funktionen $\mathfrak{P}_\nu^n(x)$ zu den Kugelfunktionen $P_\nu^n(x)$.

§ 5. Die Kugelfunktionen p^{ter} Ordnung gehören zu den Lamé'schen Funktionen zweiter Gattung für die speziellen Werte der Konstanten

$$l_0=1,\quad l_1=p,\quad \nu_0=0,\quad \nu_1=\nu.$$

Wie oben gezeigt wurde, gehören zu $\nu = 0 \; n + 1$ Werte ν_1, also $n + 1$ Lamé'sche Funktionen zweiter Gattung; demnach ergiebt sich die gleiche Anzahl von Kugelfunktionen p^{ter} Ordnung, die zu einem gegebenen n gehören, wie Heine gefunden hat. Aber für $l_0 = 1$, $l_1 = p$ braucht nicht $\nu_0 = 0$ zu sein, sondern ν_0 kann jeden Wert von 0 bis n annehmen. Daher würde man, falls man die Differentialgleichung (1) der allgemeinen Lamé'schen Funktionen zum Ausgangspunkt für eine Theorie der Kugelfunktionen nehmen und dieselben, wie Heine, als Lamé'sche Funktionen für die speziellen Werte der Konstanten

$$a_0 = 0, \; a_1 = a_2 = \cdots a_p = 1$$

definieren wollte, zu mehr als $n + 1$ Kugelfunktionen gelangen, die zu jedem n gehören. Diese Anzahl $n + 1$ wird aber durch die historisch begründete Definition der Kugelfunktionen als Entwickelungskoeffizienten gefordert. Die Heine'sche Definition würde erst dann richtig sein, wenn auch noch die Konstanten in $\vartheta(x)$ spezialisiert würden.

Bei Darstellung der Kugelfunktionen zweiter Ordnung geht Heine den historischen Weg und führt dieselben als Entwickelungskoeffizienten ein. In der Theorie der Kugelfunktionen p^{ter} Ordnung dagegen definiert Heine, wie gesagt, die Kugelfunktionen als Lamé'sche Funktionen für die obigen Werte der Konstanten a; und bei Ableitung ihrer Differentialgleichung macht er die Annahme $\nu_0 = 0$, ohne die Berechtigung dieser Annahme zu erweisen, wie aus seinen Schriften: Handbuch der Kugelfunktionen, 2. Aufl. I. § 123 und Crelle J. Bd. 62 hervorgeht. Heine sagt in letzterer Schrift S. 118 bei Bestimmung des Faktors $\vartheta(x)$ im letzten Gliede der Lamé'schen Gleichung (1), worin $\psi(x) = x(x-1)^p$ gesetzt wird (also in unserer Bezeichnung $l_0 = 1$, $l_1 = p$, $l_2 = l_3 \ldots = 0$): Die gesuchten Formen müssen „von einer der Formen

$$G, \; \sqrt{x}\, G, \; \sqrt{x-1}\, G, \; \sqrt{x}\,\sqrt{x-1}\, G$$

sein", wo mit G eine ganze Funktion bezeichnet wird; und weiter: „Man hat zwei Fälle zu unterscheiden; erstens kann es eintreten, dafs W für $x = 1$ nicht verschwindet ....." Zweitens betrachtet Heine den Fall, dafs W für $x = 1$ verschwinde. Es waren aber noch die beiden Fälle zu untersuchen, in denen W für $x = 0$ verschwindet und nicht verschwindet. Man hat zur Betrachtung aller Fälle in die allgemeine Lamé'sche Gleichung (1) für W einen Ausdruck einzuführen von der Form

$$W = x^{\frac{\nu_0}{2}} (x-1)^{\frac{\nu_1}{2}} U$$

und $\vartheta(x)$ so zu bestimmen, dafs U als ganze Funktion hervorgeht, während Heine W in der Form

$$W = (x-1)^{\frac{\nu}{2}} U$$

einführt. Durch den ersteren Ausdruck für W geht Gleichung (1) in Gleichung (23) über, wenn dort $l_0 = 1$ gesetzt wird, während Heine, indem er die letztere Form für W annimmt, für W die Gleichung erhält:

$$(25) \qquad 4x(x-1)\frac{d^2W}{dx^2} + 2\Big[(p+1)x - 1\Big]\frac{dW}{dx} - \Big[n(n+p-1) + \frac{\nu(\nu+p-2)}{x-1}\Big]W = 0.$$

Legt man aber diese Gleichung (25), wie Heine, als Definitionsgleichung für die Kugelfunktionen zu Grunde und definiert dieselben als Lamé'sche Funktionen, welche derselben genügen, so gewinnt man doch nicht, wie Heine, $n+1$ solcher Funktionen, sondern aufserdem noch n Lamé'sche Funktionen, welche derselben Gleichung genügen. Diese $2n+1$ Lamé'schen Funktionen sind einmal in der Form

$$W = (x-1)^{\frac{\nu}{2}} U,$$

dann in der Form

$$W = x^{\frac{1}{2}}(x-1)^{\frac{\nu}{2}} U$$

enthalten (vergl. die Einleitung). Denn die Gleichung (23), welche sich als Definitionsgleichung für die allgemeinen Lamé'schen Funktionen zweiter Gattung ergab, geht in die Gleichung (25) über sowohl für $\nu_0 = 0$ als für $\nu_0 = 1$; also diejenigen Funktionen, welche der Gleichung (23) für $l_0 = 1$, $l_1 = p$ und für $\nu_0 = 0$ resp. $\nu_0 = 1$ genügen, sind auch Integrale der Gleichung (25).

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 8. Ausgegeben im März 1888.

Berichte über die Versammlungen.

Versammlung vom 12. Februar 1887.

Herr Professor Dr. Schubert teilt einen Beweis elementarer Art für den Satz mit, dafs bei stereographischer Projektion stets ein Kreis wieder ein Kreis wird. Herr Baumeister Möller hält den angekündigten Vortrag „Über den Einfluſs der Zentrifugalkraft und der Reibungswiderstände auf den Luftaustausch zwischen Gebieten hoher und Gebieten niedriger Temperatur".

Der Vortragende giebt eine Kritik der Ferrell'schen Theorie und will die Strömung vom Äquator zum Pol und wieder zurück zum Äquator durch Reibung der oberen an der unteren Luftschicht erklären.

Hauptversammlung vom 26. Februar 1887.

Der Jahrverwalter Herr Dr. Wagner erstattet den Jahresbericht über das 197. Gesellschaftsjahr. Nach demselben zählt die Gesellschaft 5 Ehrenmitglieder, 44 hiesige ordentliche und 14 auswärtige ordentliche Mitglieder. Einen groſsen Verlust hat die Gesellschaft durch den Tod des Herrn Ingenieur H. F. Reitz zu beklagen. Zum Adjunkten wird alsdann Herr Dr. Schubert gewählt. Aus der Abrechnung ergiebt sich

Einnahme: ℳ 523,19. Ausgabe: ℳ 501,00.
Kassenbestand: ℳ 1121,33.

An die Hauptversammlung schloſs sich wie immer ein Festessen, an welchem sich mehrere Gäste beteiligten.

Versammlung vom 19. März 1887.

Der Vorsitzende eröffnet die Sitzung mit einer Ansprache, in welcher die Verdienste des am 3. März verstorbenen Bürgermeisters Dr. Kirchenpauer um das wissenschaftliche Leben in Hamburg überhaupt und im besonderen um die mathematische Gesellschaft, die ihn deswegen vor mehreren Jahren zu ihrem Ehrenmitgliede ernannt hatte, hervorgehoben wurde. Zum ehrenden Andenken an den Verstorbenen erhoben sich die Anwesenden von ihren Sitzen. Der Vorstand hatte der Trauer um den Verstorbenen dadurch Ausdruck gegeben, dafs er einen Kranz zur Auschmückung des Sarges in das Trauerhaus schickte, und dafs die beiden Jahrverwalter an dem Leichenbegängnis offiziell teil nahmen.

Herr Dr. Liebenthal hält dann seinen Vortrag „Über die Attraktion des Ellipsoids". Derselbe ist weiter unten mitgeteilt.

Versammlung vom 16. April 1887.

Herr Dr. Köpke hält den angekündigten Vortrag „Über das Prinzip von der Kondensation der Singularitäten bei Hankel und Dini". Der Vortragende betrachtet zunächst die eigentümliche Funktion, welche Hankel in einer Abhandlung der „Tübinger Universitätsschriften" vom Jahre 1870, die auch in Band 20 der „Mathem. Annalen" vom Jahre 1882 wieder abgedruckt ist, gegeben hat. Diese Funktion hat folgende Definition.

Es sei $\varphi(y)$ definiert für Werte von y zwischen -1 und $+1$ und sei auch nach dem Taylor'schen Satze für alle solche Werte entwickelbar nur nicht für $y = 0$. Ferner bekomme $\varphi(y)$ keine anderen Werte als solche, die zwischen -1 und $+1$ liegen. Dann ist

$$f(x) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi(\sin n x \pi)}{n^s}, \text{ wo } s > 3 \text{ ist,}$$

die Hankel'sche Funktion. Die sie darstellende Reihe ist konvergent, stetig und differenzierbar für irrationale Werte von x gliederweise. An den Beispielen $\varphi(y) = y \sin \frac{1}{y}$ und $\varphi(y) = y^2 \sin \frac{1}{y}$ wird gezeigt, dafs für rationale Werte von x das Verhalten der Funktion ein anderes wird. Namentlich beweist Hankel nicht streng, dafs die Funktion in der Nähe des rationalen Wertes unendlich viel Oscillationen besitzt.

Dini knüpft nun in seinen „Fondamenti per la teorica della funzioni di variabili reali" (Pisa 1878) an Hankels Funktion an. Es

sei eine Funktion definiert für $x = a$ bis $x = a + \varepsilon$, aber nicht für $x = a$ selbst. Dann untersucht Dini die notwendige Bedingung, dafs die Funktion einen Grenzwert für $x = a$ besitzt. Mit Benutzung besonders abgeleiteter Hilfssätze beweist dann Dini streng, dafs die Hankel'sche Funktion stetig in den irrationalen Werten von x ist. Ebenso findet Dini in strengster Weise die notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dafs eine Reihe gliederweise differenzierbar sei.

Versammlung vom 14. Mai 1887.

Herr Dr. Schubert teilt mit, dafs die Stadtbibliothek die Anschaffung der mathematischen Bücher für die bewilligten 2000 Mark auf Grund der vom Verein eingereichten Liste dem Buchhändler Otto Meifsner übertragen hat. Herr Dr. Järisch macht auf einige den Sinn entstellende Druckfehler im Referat seines Vortrages über Lamé'sche Funktionen Seite 200 in Nr. 7 dieser Mitteilungen aufmerksam. Er giebt z. B. nicht „eine praktische Darstellung", sondern die historische Entwickelung dieser Funktionen. Er betont nicht „die Ungenauigkeit der Heine'schen Definition dieser Art von Funktionen", sondern zeigt, dafs die Kugelfunktionen nicht als spezielle Lamé'sche Funktionen in Heines Sinne aufzufassen seien. Wir bitten dementsprechend das Referat über den betreffenden Vortrag im vorigen Hefte berichtigen zu wollen. Es wird dann noch beschlossen, jedem Hefte ein Inhaltsverzeichnis hinzuzufügen. Herr Ahlborn hält den angekündigten Vortrag „Über Quaternionen", indem er die Grundlagen des Quaternionenkalküls in geometrischer Hinsicht darstellt.

Versammlung vom 11. Juni 1887.

Herr Dr. Schubert macht eine kleine Mitteilung über eine praktische Vereinfachung des Verfahrens, die Pell'sche Gleichung

$$x^2 - ay^2 = 1$$

mittelst Verwandelung von $\sqrt{a}$ in einen periodischen Kettenbruch zu lösen.

Herr Ahlborn hält dann den angekündigten Vortrag, in welchem die Theorie der Quaternionen weitergeführt wird.

Versammlung vom 10. September 1887.

Herr Dr. Schubert teilt mit, dafs für die vom Hamburger Senat der Stadtbibliothek überwiesenen 2000 Mark zur Beschaffung mathematischer Werke nunmehr auf Grund der vom Vereine aufgestellten

Liste die Bücher angekauft seien. Dem Wunsche, dafs nächstens in der Gesellschaft eine Verlesung der Liste stattfinde, soll entsprochen werden. Es wird ferner als wünschenswert erachtet, dafs die Gesellschaft zu ihrem 200jährigen Stiftungsfeste im Anschlufs an den Abrifs ihrer Geschichte ein vollständiges Verzeichnis der in Hamburger Bibliotheken vorhandenen mathematischen Litteraturerzeugnisse publiziere.

Herr Dr. Hoppe macht zwei kleine Mitteilungen betreffend die Priorität der Entdeckung der chemischen Wirkung des galvanischen Stromes durch Ritter und des Parallelismus zwischen Wärmeleitung und Elektrizitätsleitung durch von Arnim.

Herr Dr. Schubert hält sodann den angekündigten Vortrag „Über den Ansatz und die Lösung logischer Gleichungen". Zunächst werden die Symbole festgestellt, sodann die Gesetze erwähnt und demonstriert, besonders im Anschlufs an das Buch von Schröder. Es werden die logischen Definitionen in diese Formelsprache übersetzt und gezeigt, wie mit den vorher abgeleiteten Gesetzen arithmetisch operierend Schlüsse gezogen werden können. Es wird der Kalkül in zwei Beispielen durchgeführt, in welchen die einfache Überlegung den Schlufs kaum auffindbar machen würde.

Versammlung vom 8. Oktober 1887.

Der Vorsitzende macht Mitteilung über die am 22. Oktober 1887, als dem 300jährigen Geburtstage von Joachim Jungius, in Aussicht genommene Gedenkfeier, an welche sich am Abend ein Festessen anschliefsen soll.

Der Vorsitzende, Herr Kapitän Koldewey, hält sodann den angekündigten Vortrag „Über einige Entwickelungen aus der Theorie der Deviation der Kompasse an Bord eiserner Schiffe". Zunächst werden die drei Poisson'schen Gleichungen

$$X' - X = aX + bY + cZ + P$$
$$Y' - Y = dX + eY + fZ + Q$$
$$Z' - Z = gX + hY + kZ + R$$

klargelegt, worin X, Y, Z die Komponenten der magnetischen Kraft der Erde nach den drei Dimensionen des Schiffes: horizontal nach vorn und nach Steuerbord, vertikal nach unten; X', Y', Z' die Komponenten der gesammten auf den Kompafs wirkenden magnetischen Kraft des Schiffes und der Erde bedeuten. Angenommen wird, dafs die Länge der Kompafsnadel verschwindend klein ist gegen die Entfernung der störenden Kräfte.

$a, b, c, d, e, f, g, h, k$ sind Koeffizienten, deren Gröfse abhängig von dem Aufstellungsorte des Kompasses und der Induktionsfähigkeit des Eisens, und P, Q, R sind die Komponenten des festen (permanenten und remanenten) Magnetismus des Schiffes.

Setzt man in diese drei Gleichungen

$$X = H \cos \zeta, \quad Y = -H \sin \zeta, \quad Z = H \operatorname{tang} I,$$
$$X' = H' \cos \zeta', \quad Y' = -H' \sin \zeta', \quad Z' = H' \operatorname{tang} I,$$

H die magnetische Horizontalkraft der Erde, I die Inklination, ζ magnetischen Kurs des Schiffes, ζ' den Kompafskurs, so dafs $\zeta' = \delta$ die Deviation, d. h. die Abweichung der Kompafsnadel der Richtung des magnetischen Meridians, bedeuten, so erhält aus den beiden ersten Gleichungen nach einigen Reduktionen δ als Funktion von ζ und 2ζ, nämlich

$$\operatorname{tang} \delta = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B} \sin \zeta + \mathfrak{C} \cos \zeta + \mathfrak{D} \sin 2\zeta + \mathfrak{E} \cos 2\zeta}{1 + \mathfrak{B} \cos \zeta - \mathfrak{C} \sin \zeta + \mathfrak{D} \cos 2\zeta - \mathfrak{E} \sin 2\zeta}.$$

er Ausdruck läfst sich mit Hilfe der imaginären Einheit $\sqrt{-1} = i$ der logarithmischen Reihe in eine Reihe verwandeln, welche δ Funktion von ζ und der Vielfachen dieses Winkels giebt.

Diese Formel und die Formel (1) wird indes in der Praxis nicht tzt, vielmehr ist es für die Bestimmung der Koeffizienten aus benen Beobachtungen und der Berechnung der Deviation zweckiger, δ als Funktion des Kompafskurses ζ' zu geben.

Der Vortragende entwickelt diese Funktion unter Zugrundelegung aus dem Parallelogrammgesetz der Kräfte unmittelbar sich erenden Deviationsformel

$$\sin \delta = \frac{s}{H} \sin (\zeta' + \alpha),$$

I die Horizontal-Komponente der magnetischen Erdkraft, s die auf Kompafs wirkende magnetische Horizontalkraft des Schiffes ist, α den Winkel bezeichnet, den diese Kraft mit der Kiellinie des fes macht. Durch Einführung der rechtwinkligen Komponenten

$$X' - X = s \cos \alpha \quad Y' - Y = s \sin \alpha$$

deren Werte aus den Poisson'schen Gleichungen ergiebt sich einigen Reduktionen die strenge Formel

$$\sin \delta = \mathfrak{A} \cos \delta + \mathfrak{B} \sin \zeta' + \mathfrak{C} \cos \zeta' + \mathfrak{D} \sin (2\zeta' + \delta) + \mathfrak{E} \cos (2\zeta' + \delta)$$

n $\mathfrak{D} = \frac{1}{\lambda} \frac{a-e}{2}$, $\lambda = 1 + \frac{a+e}{2}$, $\mathfrak{A} = \frac{1}{\lambda} \frac{d-b}{2}$, $\mathfrak{E} = \frac{1}{\lambda} \frac{d+b}{2}$,

$$\mathfrak{B} = \frac{c}{\lambda} \operatorname{tang} I + \frac{P}{\lambda} \frac{1}{H}, \quad \mathfrak{C} = \frac{f}{\lambda} \operatorname{tang} I + \frac{Q}{\lambda} \frac{1}{H}.$$

Die Koeffizienten $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{D}$, $\mathfrak{E}$ sind identisch mit denen in Formel (1). Überschreitet die Deviation im Maximum nicht die Gröfse von 20′, so genügt die Näherungsformel

(3) $\delta = A + B \sin \zeta' + C \cos \zeta' + D \sin 2\zeta' + E \cos 2\zeta'$,

welche in der Praxis gewöhnlich gebraucht wird.

Der Vortragende diskutiert alsdann ausführlich die vorstehenden Formeln und die Bedeutung und Gröfse der darin vorkommenden Induktionskoeffizienten a, b, c, d . . . ., indem derselbe zugleich auf eine von ihm in „Aus dem Archiv der deutschen Seewarte 1879“ veröffentlichte Arbeit „Über die Veränderungen des Magnetismus in eisernen Schiffen“ und auf ein von der deutschen Seewarte in nächster Zeit zur Ausgabe gelangendes Werk: „Der Kompafs an Bord“, verweist, wo dieser Gegenstand ausführlich behandelt ist.

Versammlung vom 12. November 1887.

Die Versammlung beschliefst, den naturwissenschaftlichen Verein zu seinem 50jährigen Jubiläum am 18. November zu beglückwünschen und ihm eine durch Kunstdruck gezierte Adresse zu überreichen. Der von Dr. Schubert vorgeschlagene Text wird angenommen, ebenso dafs die Adresse die Namen von Männern enthalten soll, die als Mathematiker und Physiker zugleich bahnbrechend waren.

Herr Dr. Keferstein hält darauf den angekündigten Vortrag „Über eine Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln der Kongruenz $g^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ für einen reellen Primzahlmodul p“ (weiter unten abgedruckt).

Versammlung vom 10. Dezember 1887.

Der Vorsitzende berichtet über die Beglückwünschung des naturwissenschaftlichen Vereins und legt etwa 40 Abzüge der Adresse für die Mitglieder aus.

Als neue Mitglieder werden aufgenommen Herr Dr. Oeltjen und Herr Schiffbauingenieur O. Schlick.

Herr Dr. Hoppe macht Mitteilung über die richtige Berechnung der Stromarbeit, welche von einem um einen Magneten teilweise rotierenden und festgehaltenen Stromkreis ausgeübt wird im Gegensatz zu andern irrigen Ableitungen. Zweitens begründet Herr Dr. Hoppe, inwiefern Ritter schon 1798 vor Volta das dem letzteren zugeschriebene Spannungsgesetz erkannt und ausgesprochen hat. Noch deutlicher spricht er dies in einer 1801 vor Ankunft Voltas in Paris erschienenen Abhandlung aus, wo gesagt ist, dafs die Spannung zwischen Gold und

gleich der Summe der Spannungen zwischen Gold und Silber zwischen Silber und Zink ist. Freilich sprach Ritter dies nur elektrochemischen Standpunkt aus, während Volta elektro-sche Messungen ausführt.

Herr Ingenieur Bubendey hält sodann den angekündigten Vortrag: ler Herstellung einer 150 m langen, 10 m breiten schwimmenden bfertigungsstelle, welche auf 29 Schwimmkasten ruht, war die abe zu lösen, für bestimmte Belastungen die Durchbiegung eines 29 Stützen ruhenden Balkens zu bestimmen. Der Vortragende von der allgemeinen Form der Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{p}{T \cdot E} \text{ aus,}$$

elcher Gleichung p die Belastung auf die Längeneinheit, T das heitsmoment und E den Elastizitätsmodul bezeichnet.

An einigen einfachen Beispielen wurde nachgewiesen, wie sich : Integrationskonstanten bestimmen lassen.

In dem praktisch vorliegenden Fall werden durch Behandlung inzelnen Stützenzwischenräume für die Tangenten der elastischen in den Stützpunkten je zwei Ausdrücke gefunden, durch deren hsetzen die erforderliche Anzahl von Gleichungen zur Bestimmung Stützensenkungen gewonnen wird.

Zum Schlufs wurde als Annäherung auch der Fall in Betracht gen, dafs der Balken ununterbrochen unterstützt sei, wobei dann dem Punkte der auf die Längeneinheit bezogene Gegendruck des sers der Einsenkung proportional ist.

Versammlung vom 14. Januar 1888.

Eingegangen ist eine Aufforderung der Akademie für Mathematik Physik in Neapel mit ihr in Schriftenaustausch zu treten. Letzteres beschlossen. Die nächstens zum Druck zu gebenden Mitteilungen 1 2 Abhandlungen von Dr. Keferstein und Dr. Liebenthal lten.

Herr Dr. Hoppe fragt an, ob wohl schon vor Cavallo, der im 1798 mit Hilfe von Schwefeläther Eis fabrizierte, eine Kälte-hine konstruiert sei. Die erste Kältemaschine werde gewöhnlich ie (1813) zugeschrieben. Den Anwesenden ist nichts über die e bekannt.

Herr Dr. Köpke zeigt eine von ihm angefertigte Zeichnung, e ein von ihm hergestelltes Demonstrationsmodell, welches dazu , die Theorie des Regenbogens zu verdeutlichen.

Herr Dr. Krüfs hält den angekündigten Vortrag „Über die Farbenkorrektion von Fernrohrobjektiven nach Frauenhofer und Gaufs“. Zu den 3 Bedingungen einer fehlerfreien Zusammensetzung einer Sammellinse aus 2 Glassorten führte Gaufs als 4. Bedingung die ein, dafs auch ein Randstrahl der zweiten Farbe sich nach der Brechung mit den drei anderen in Rechnung gezogenen Strahlen in einem Punkte der Achse vereinige. Herr Dr. Krüfs hat nun die Fehler der verschiedenen Arten von Objektiven hinsichtlich ihrer Kugelgestaltfehler und ihrer Farbenfehler ausführlich berechnet und geprüft. Diese Untersuchungen sind in einer Abhandlung zusammengestellt, die in der Festschrift des naturwissenschaftlichen Vereins erschienen ist. An der Hand dieser Abhandlung, von der jedes Mitglied ein Exemplar erhält, werden die Resultate näher erläutert.

Eingegangene Schriften.

Die Gesellschaft empfing im Austausch die erschienenen Hefte von:

Atti della Reale Academia dei Lincei zu Rom; Bulletin de la Société mathématique de France; Jornal de Sciencias math. e astron. von Dr. Texeira; American Journal of Mathematics; Ciel et terre revue populaire.

Die Società Reale di Napoli hat im November 1887 um Schriftenaustausch gebeten und wird dieselbe gegen Zusendung unserer Mitteilungen die

Rendiconti della R. Academia della Scienze Fisiche et Mathematiche di Napoli

einschicken.

Die folgenden Herren und Institute haben unserer Bibliothek eigene Schriften zugehen lassen, für welche die Gesellschaft ihnen zu besonderem Danke verpflichtet ist: Herr Klitzkowsky, Herr Obergeometer Stück, Herr Dr. Hoppe, Herr Dr. Krüfs, Herr Bierens de Haan, Mathematischer Verein in Göttingen, Naturwissenschaftlicher Verein in Hamburg, Mathematischer Verein in Berlin.

Das Potential des Ellipsoids.

(Von Dr. Emil Liebenthal.)

Seien T ein irgendwie begrenzter Körper, $d\tau$ ein unbestimmtes Element desselben, x_1', x_2', x_3' die rechtwinkligen Koordinaten von $d\tau$, x_1, x_2, x_3 die des angezogenen Punktes und[1]) $r^2 = \Sigma(x - x')^2$, so stellt das über den ganzen Raum T zu erstreckende dreifache Integral:

(I.) $$V = k\iiint \frac{d\tau}{r}$$

das Potential des Körpers T von der konstanten Dichtigkeit k dar.

Dieses durch die Gleichung (I) definierte Attraktionsproblem gestattet nun die durch die Integrale

(II.) a) $V = \iiint f(r)\,d\tau$; b) $V = \iiint \varphi(x_1', x_2', x_3')\,\frac{d\tau}{r}$;

c) $V = \iiint \varphi(x_1', x_2', x_3') f(r)\,d\tau$

charakterisierten Verallgemeinerungen, von denen sich die erstere auf eine Veränderung des Attraktionsgesetzes und die zweite auf eine Änderung der Dichtigkeit φ bezieht, während die dritte diese beiden Fälle zugleich umfafst.

Der anziehende Körper T sei ein Ellipsoid von der Gleichung $\Sigma \frac{x'^2}{a^2} - 1 = 0$.

Was die Attraktion des Ellipsoids anbelangt, so giebt es, wenn ich das Problem (I) als bekannt übergehe, vom Problem (IIa) mehrere Lösungen, die sich, so viel mir bekannt ist, jedoch nur auf den Fall beziehen, dafs die Anziehung umgekehrt proportional einer Potenz der Entfernung erfolgt. Hervorheben möchte ich die diesbezügliche Arbeit von Mehler[2]), der sich des Dirichlet'schen Dis-

1) Zur gröfseren Übersicht werden stets die folgenden Kürzungen gebraucht: das Zeichen Σ resp. Π soll bedeuten, dafs, nach Ausnahme der Variabeln r und s, allen unter diesem Zeichen stehenden Gröfsen nach einander die Indices 1, 2, 3 zu geben und die so entstandenen Ausdrücke zu addieren resp. multiplizieren sind. Das Zeichen S soll auf eine cyklische Vertauschung der Indices und nachherige Summation hinweisen. Ferner sei:

$$D_x^{\Sigma m}(\varphi) = \frac{\partial^{m_1+m_2+m_3}}{\partial x_1^{m_1} \cdot \partial x_2^{m_2} \cdot \partial x_3^{m_3}}; \qquad \sum_{k=0}^{m}{}^{3} = \sum_{k_1=0}^{m_1} \sum_{k_2=0}^{m_2} \sum_{k_3=0}^{m_3}.$$

2) Mehler. Die Anziehung einer von zwei Flächen zweiten Grades begrenzten Schale. Borchardt's J. Bd. 60.

continuitätsfaktors bedient, und die Arbeit von Züge[1]), der das Ellipsoid durch Kreisschnitte zerlegt.

Betreffs des Problems (IIb) sind mir nur die Abhandlungen von Oberbeck[2]) und Ferrers[3]) bekannt geworden. Durch Integration der Differentialgleichung des Potentials $\Delta V(\sigma) = 0$, wenn σ die bekannte Wurzel der Gleichung $1 - \Sigma \frac{x^2}{a^2 + \sigma} = 0$ bezeichnet, gelingt es Oberbeck, wenn die Dichtigkeit gleich gewissen einfachen Funktionen der Koordinaten ist, das Potential in Gestalt von Ausdrücken zu ermitteln, die dem Dirichlet'schen Potential des homogenen Ellipsoids ähnlich sind. Auf einer allgemeineren Grundlage bewegen sich die Untersuchungen von Ferrers, mit denen ich erst bekannt wurde, als ich das Resultat dieser Arbeit bereits im Wesentlichen zu übersehen vermochte. Als Ausgangspunkt dient ihm der Satz: „Wenn V das Potential des Ellipsoids bei der Dichtigkeitsfunktion $\varphi\left(\Sigma \frac{x'^2}{a^2} - 1\right)$ ist, welche an der Oberfläche verschwindet, so stellen die Derivierten $D_x^m(V)$ so lange die Potentialwerte für die Dichtigkeit $D_x^m(\varphi)$ dar, als diese letzteren Funktionen an der Grenze wieder verschwinden. Es wird sodann der Weg angegeben, wie man, vom bekannten Potential des Ellipsoids bei der Dichtigkeit $\left(\Sigma \frac{x'^2}{a^2} - 1\right)^n$ ausgehend, auch das Potential bei der Dichtigkeit $\Pi(x'^\alpha)$ in Gestalt eines einfachen Integrales ableiten könne, da sich dieses Produkt in eine Reihe von Differentialquotienten der Potenzen von $\left(\Sigma \frac{x'^2}{a^2} - 1\right)$ entwickeln lasse. Doch ist die Rechnung ebenfalls nur in einigen speziellen Fällen durchgeführt.

Seien nun

$$(1) \qquad V_\beta = -\frac{1}{\beta+1} \iiint \varphi(x_1', x_2', x_3') r^{\beta+1} d\tau;$$

$$P_\beta = -\frac{1}{\beta+1} \iiint r^{\beta+1} d\tau$$

die Potentiale, wenn die Dichtigkeit gleich φ resp. 1 ist und die Anziehung nach dem Gesetze r^β erfolgt, so soll im folgenden das Potential V_β des Ellipsoids für den Fall be-

1) H. Züge. Über die Anziehung eines homogenen Ellipsoids. Clebsch Annalen Bd. 10, p. 273—287.

2) A. Oberbeck. Über das Potential des Ellipsoids. Grunerts Archiv Bd. 58, p. 113—126.

3) N. M. Ferrers. On the potential of ellipsoids, ellipsoidal shells, elliptic laminae and elliptic rings of variable densities. Quart. J. Bd. 14, p. 1—22.

timmt werden, dafs die Dichtigkeit φ eine rationale ganze unktion vom Grade α_1, α_2, α_3 in Bezug auf x_1', x_2', x_3' ist, enn β einen Wert aus der Zahlenreihe $-2, 0, 2 \ldots$ beeichnet.

Zu diesem Zwecke mögen die folgenden Untersuchungen vorausgeschickt werden.

. Allgemeine Reihenentwickelung des Potentials V_β für beliebig gestaltete Körper T.

Die wiederholte Anwendung der Gleichung

$$\int x' \varphi(x_1', x_2', x_3') \cdot \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{d\tau}{r}$$

$$= x \int \varphi(x_1', x_2', x_3') \frac{df(r)}{dr} \cdot \frac{d\tau}{r} - \frac{\partial}{\partial x} \int \varphi(x_1', x_2', x_3') f(r)\, d\tau$$

st erkennen, wie man ein Potential bei der Dichtigkeit $(x'^{\alpha}) \cdot \varphi(x_1', x_2', x_3')$ auf ein Potential bei der Dichtigkeit $\varphi(x_1', x_2', x_3')$ rückführen könne. Ist nun speziell $\varphi(x_1', x_2', x_3') = 1$, so läfst h also das Potential bei der Dichtigkeit $\Pi(x'^{\alpha})$ auf ein solches der konstanten Dichtigkeit 1 zurückführen. So ergiebt sich spielsweise unmittelbar

$$\int \frac{x'^3 d\tau}{r} = x^3 P_{-2} + 3x^2 \frac{\partial P_0}{\partial x} + 3x P_0 - 3x \frac{\partial^2 P_2}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial P_2}{\partial x} + \frac{1}{3} \frac{\partial^3 P_4}{\partial x^3}.$$

ir erkennen somit, dafs sich das Potential V_β eines bebig gestalteten Körpers in eine Reihe von Differentialotienten der Funktionen P_β, $P_{\beta+2} \ldots$ entwickeln lasse, ren Koeffizienten ganze Funktionen von x_1, x_2, x_3 oder nstante sind.

Es handelt sich also jetzt um die Ableitung dieser Reihenwickelung von V_β. Vermittels der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{1}{r} - \frac{1}{r} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2$$

l des Schlusses von k auf $k+1$ kann man zeigen, dafs sich der ch x genommene k^{te} Differentialquotient der beliebigen Potenz r^p die folgende nach fallenden Potenzen von $\frac{\partial r}{\partial x}$ fortschreitende Reihe wickeln läfst:

$$\frac{\partial^k r^p}{\partial x^k} = r^{p-k} \sum_{l=0}^{k'} p(p-2) \cdots (p-2k+2l+2) \begin{bmatrix} k \\ 2l \end{bmatrix} \left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{k-2l},$$

ren Koeffizienten stets, mit Ausnahme der graden p, die gleich oder einer als $2k-2$ sind, einen von Null verschiedenen Wert haben.

Zur Abkürzung ist dabei gesetzt:

$$\left[\begin{matrix} k \\ 2l \end{matrix}\right] = \frac{k(k-1)\cdots(k-2l+1)}{2\cdot 4\cdots 2l},$$

während $\binom{k}{l}$ den Binomialkoeffizienten $\frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{1\cdot 2\cdots l}$ bezeichnen soll. Als obere Summationsgrenze ist, je nachdem k grade oder ungrade ist, für k' der Wert $\frac{k}{2}$ oder $\frac{k-1}{2}$ zu nehmen und $\left[\begin{matrix} k \\ 2l \end{matrix}\right]_{l=0}$ gleich 1 zu setzen.

Geben wir nun in Gleichung (3) x, k, l den Index 1 und differentiieren den so entstandenen Ausdruck unter Berücksichtigung der Formel:

$$r^{p-k}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{k-2l} = (x-x')^{k-2l}\cdot r^{p-2k+2l}$$

k_2 mal nach x_2 und schliefslich noch k_3 mal nach x_3, so wird:

(4)
$$D_x^{\Sigma k}(r^p)$$
$$= r^{p-\Sigma k}\sum_{l=0}^{k'}{}_3\, p(p-2)\cdots(p-\Sigma 2k+\Sigma 2l+2)\,\Pi\left\{\left[\begin{matrix} k \\ 2l \end{matrix}\right]\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{k-2l}\right\},$$

und dem entsprechend auch:

$$D_x^{\Sigma(k-2l)}(r^{p-\Sigma 2l}) = r^{p-\Sigma k}\sum_{\mathfrak{l}=0}^{k'-l}{}_3\,(p-\Sigma 2l)(p-\Sigma 2l-2)\cdots$$
$$(p-\Sigma 2(k-l-\mathfrak{l})+2)\cdot\Pi\left\{\left[\begin{matrix} k-2l \\ 2\mathfrak{l} \end{matrix}\right]\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{k-2l-2\mathfrak{l}}\right\}.$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit

$$p(p-2)\cdots(p-\Sigma 2l+2)\,\Pi\left\{(-1)^l\left[\begin{matrix} k \\ 2l \end{matrix}\right]\right\}$$

und summieren nach einander nach l_1 von 0 bis k_1', nach l_2 von 0 bis k_2' und nach l_3 von 0 bis k_3', so können wir, indem wir $\mathfrak{l}+l=\varkappa$ setzen und die neue Summationsordnung $\sum_{\varkappa=0}^{k'}{}_3\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\varkappa}{}_3$ einführen, d. h. erst die Summation nach den $\mathfrak{l}$ und sodann die nach den $\varkappa$ ausführen, unter Benutzung der Relation

$$\left[\begin{matrix} k \\ 2l \end{matrix}\right]\cdot\left[\begin{matrix} k-2l \\ 2\mathfrak{l} \end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix} k \\ 2\varkappa \end{matrix}\right]\cdot\binom{\varkappa}{\mathfrak{l}}$$

der rechten Seite die Form geben,

$$r^{p-\Sigma k}\cdot\sum_{\varkappa=0}^{k'}{}_3\, p(p-2)\cdots(p-\Sigma 2(k-\varkappa)+2)\cdot$$
$$\Pi\left\{\left[\begin{matrix} k \\ 2\varkappa \end{matrix}\right]\cdot\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^{k-2\varkappa}\right\}\cdot\sum_{\mathfrak{l}=0}^{\varkappa}{}_3\,\Pi\left\{(-1)^{\mathfrak{l}}\cdot\binom{\varkappa}{\mathfrak{l}}\right\}$$

:he sich, da die nach f zu nehmende Summe gleich 0 für $\varkappa > 0$ gleich 1 für $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = 0$ ist, auf das erste Glied:

$$p(p-2)\cdots(p-\Sigma 2k+2)\,r^{p-\Sigma k}\cdot \Pi\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^k\right\}$$

ıziert. Es folgt mithin die Gleichung:

$$r^{p-\Sigma k}\Pi\left\{\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^k\right\}$$

$$\sum_{l=0}^{k'}{}_3\frac{\Pi\left\{(-1)^l\begin{bmatrix}k\\2l\end{bmatrix}\right\}}{(p-\Sigma 2l)(p-\Sigma 2l-2)\cdots(p-\Sigma 2k+2)}\,D_x^{\Sigma(k-2l)}(r^{p-\Sigma 2l}),$$

stets gültig ist aufser für grade p, die gleich oder kleiner als -2 sind.

Nun ist die Dichtigkeit φ vom Grade α_1, α_2, α_3 in Bezug auf x_2', x_3', mithin

$$\varphi(x_1', x_2', x_3') = \sum_{k=0}^{\alpha}{}_3 D_x^{\Sigma k}(\varphi)\cdot r^{\Sigma k}\,\Pi\left\{\frac{(-1)^k}{k!}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^k\right\}.$$

ıstituieren wir diesen Ausdruck in die Definitionsgleichung (1) für V_β, elangen wir mit Hilfe von Gleichung (5), in der $p = \Sigma 2k + \beta + 1$ etzen ist, zu der **gesuchten Reihenentwickelung**,

$$V_\beta = \frac{1}{\beta+1}\sum_{k=0}^{\alpha}{}_3\,\Pi\left\{\frac{(-1)^k}{k!}\right\}D_x^{\Sigma k}(\varphi)\cdot$$

$$\sum_{l=0}^{k}{}_3\frac{\Pi\left\{(-1)^l\begin{bmatrix}k\\2l\end{bmatrix}\right\}}{(3+\beta)(5+\beta)\cdots(\Sigma 2(k-l)+\beta-1)}\,D_x^{\Sigma(k-2l)}(P_{\Sigma 2(k-l)+\beta})$$

für jedes beliebige β, mit Ausnahme der Werte $-3, -5, \cdots$, ig ist.

Im Falle der Newtonschen Attraktion wird also die Bestimmung Potentials $V_{-2}(V)$ auf die Bestimmung des Potentials

$$P_{2n}\cdots n = -1, 0, 1\cdots$$

ckgeführt. Zu denselben Funktionen gelangen wir auch bei uns gestellten Aufgabe, wo die Anziehung nach dem Gesetze $\cdot\cdot\gamma \geqq -1$ erfolgt.

Aus diesen Erörterungen geht zugleich hervor, dafs das Problem, ler Weise, wie wir es auffassen, nicht in die Kategorie (IIc), lern vielmehr in die Kategorie (IIa) gehört, da, wie die Glei- ıg (2) zeigt, die von uns aus erstrebte Reduktion eine rein ıale ist, weil die Veränderung der Dichtigkeitsfunktion auf die Attraktionsgesetzes geworfen wird.

In Bezug auf die Funktion $V_{2\gamma}$ möge noch bemerkt werden, dafs dieselbe mit den Derivierten bis zur $(2\gamma + 3)^{\text{ten}}$ Ordnung für im Endlichen gelegene Punkte überall endlich und stetig bleibt, während die Differentialquotienten der $(2\gamma + 4)^{\text{ten}}$ Ordnung beim Durchgange durch die Oberfläche von T eine sprungweise Änderung erleiden. Es ist nämlich:

$$\Delta^{\gamma+2} V^i_{2\gamma} = \frac{(2\gamma+2)!}{2\gamma+1} \cdot 4\pi \cdot \varphi(x_1, x_2, x_3); \quad \Delta^{\gamma+2} V^a_{2\gamma} = 0,$$

wenn $\Delta^{\gamma+2}$ die $(\gamma + 2)$malige Anwendung der Operation $\Delta = \Sigma \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ bezeichnet und sich der Index i resp. a auf einen inneren resp. äufseren Punkt bezieht.

Diese beiden Gleichungen folgen unmittelbar aus der Jelletschen Differentialgleichung:

$$\Delta V_\beta = (\beta + 2)(\beta - 1) V_{\beta-2},$$

durch welche Mehler in der oben citierten Abhandlung $V_{\beta-2}$ aus V_β ableitet und durch deren Integration sich für die Kugel unter Berücksichtigung der eben ausgesprochenen Endlichkeits- und Stetigkeitsbedingungen, von $P_{-2}(P)$ ausgehend, nach einander die Gröfsen $P_0, P_2 \ldots$ unmittelbar ermitteln lassen.

B. Bestimmung des Potentials P_{2n} des Ellipsoids $(n = 0, 1 \ldots)$.

Unter Verallgemeinerung eines für P üblichen Verfahrens gehen wir von einem inneren Punkte aus und machen denselben zum Ursprung des Polarkoordinatensystems der r, ϑ, φ, so dafs die Relationen bestehen:

$$x_1' = x_1 + r \sin\vartheta \cos\varphi; \quad x_2' = x_2 + r \sin\vartheta \sin\varphi; \quad x_3' = x_3 + r \cos\vartheta.$$

Die Gleichung des Ellipsoids lautet dann:

$$Ar^2 + 2Br - C = 0,$$

wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\sin\vartheta \cos\varphi = d_1; \quad \sin\vartheta \sin\varphi = d_2; \quad \cos\vartheta = d_3$$

$$A = \Sigma \frac{d^2}{a^2}; \quad B = \Sigma \frac{dx}{a^2}; \quad C = 1 - \Sigma \frac{x^2}{a^2}.$$

Führt man nun in dem Integralausdruck für P^i_{2n} die Integration nach r aus unter Zusammenfassung der entgegengesetzt gerichteten Radienvektoren

$$r_1 = \frac{-B + \sqrt{B^2 + AC}}{A}; \quad r_2 = \frac{B + \sqrt{B^2 + AC}}{A},$$

so werden in

$$P_{2n}^{i} = -\frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} r_1^{2n+4} + r_2^{2n+4} \over 2n+4 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

Quadratwurzelausdrücke herausfallen. Es ist nämlich

$$\frac{r_1^{2n+4} + r_2^{2n+4}}{2n+4} = \sum_{\alpha=0}^{n+2} 2^{2\alpha} \cdot \frac{(n+1+\alpha)!}{(n+2-\alpha)!\,(2\alpha)!} \frac{B^{2\alpha} \cdot C^{n+2-\alpha}}{A^{n+2+\alpha}}$$

$$B^{2\alpha} = \sum\nolimits_3^{\varkappa} (2\alpha)!\; \Pi\left\{\frac{1}{\varkappa!}\left(\frac{dx}{a^2}\right)^{\varkappa}\right\} \cdots \Sigma\varkappa = \alpha$$

$$C^{n+2-\alpha} = \sum_{\mu_1=0}^{\Sigma\mu=n+2-\alpha} \sum_{\mu_2=0}^{\mu} \sum_{\mu_3=0} \frac{(n+2-\alpha)!}{(n+2-\alpha-\Sigma\mu)!}\; \Pi\left\{\frac{(-1)^{\mu}}{\mu!}\binom{x}{a}^{2\mu}\right\} \cdots$$

tituieren wir diese Werte in P_{2n} und beachten, dafs von dem Aus-
ke $B^{2\alpha}$ nur die graden Potenzen zur Geltung kommen, so ergiebt
für den Koeffizienten von $\Pi\{x^{2q}\}$ ein Doppelintegral, dessen zu
rierende Funktion wir, abgesehen von dem konstanten Faktor
$\frac{1}{n+1}$), mit $\beta_{q_1 q_2 q_3}$ bezeichnen wollen; es wird also:

$$\beta_{q_1 q_2 q_3} = \frac{\sin\vartheta}{\Pi(a^{2q})} \sum_{\alpha=0}^{\Sigma q} \sum\nolimits_3^{\varkappa} \left[(-1)^{\Sigma q-\alpha} \cdot 2^{2\alpha} \cdot \frac{(n+1+\alpha)!}{(n+2-\Sigma q)!} \cdot \right.$$

$$\left. \Pi\left\{\frac{1}{(2\varkappa)!\,(q-\varkappa)!}\left(\frac{d}{a}\right)^{2\varkappa}\right\}\right] \frac{1}{A^{n+2+\alpha}},$$

n der dreifachen Summe die $\varkappa$ den Bedingungen genügen:

$$\Sigma\varkappa = \alpha; \quad 0 \leqq \varkappa_1 \leqq q_1; \quad 0 \leqq \varkappa_2 \leqq q_2; \quad 0 \leqq \varkappa_3 \leqq q_3.$$

chnen wir nun ferner den Ausdruck in der eckigen Klammer
$F(\alpha, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3)$, so ergiebt sich

$$\beta_{q_1+1, q_2, q_3} = -\frac{\sin\vartheta}{a_1{}^2\Pi(a^{2q})} \sum_{\alpha=0}^{\Sigma q+1} \sum\nolimits_3^{\eta} F(\alpha, \eta_1, \eta_2, \eta_3) \frac{n+2-\Sigma q}{(q_1+1-\eta_1)A^{n+2+\alpha}},$$

ie η den Bedingungen genügen:

$$\Sigma\eta = \alpha; \quad 0 \leqq \eta_1 \leqq q_1 + 1; \quad 0 \leqq \eta_2 \leqq q_2; \quad 0 \leqq \eta_3 \leqq q_3.$$

ntsprechen also $\alpha = 0$ die Werte $\varkappa_1 = \varkappa_2 = \varkappa_3 = \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 0$;
so gehört zu $\alpha = \Sigma q$ $\varkappa_1 = q_1$, $\varkappa_2 = q_2$, $\varkappa_3 = q_3$ und zu $\alpha = \Sigma q + 1$
$q_1 + 1$, $\eta_2 = q_2$, $\eta_3 = q_3$. Ferner läfst sich zeigen:
1) dafs in Gl. (7) einem Werte α die Wertekombinationen $\varkappa_1 \varkappa_2 \varkappa_3$
$\alpha - 1$ die Werte $\varkappa_1'$, $\varkappa_2'$, $\varkappa_3'$ in der Weise entsprechen, dafs die
$\varkappa_3$ mit den $\varkappa_1' + 1$, $\varkappa_2'$, $\varkappa_3'$ übereinstimmen bis auf die extremen
te und zwar so, dafs noch eine Kombination $\varkappa_1' + 1$, $\varkappa_2'$, $\varkappa_3'$ vor-
nt, in der $\varkappa_1' + 1$ um die Einheit gröfser ist als das gröfste $\varkappa_1$,
dafs noch eine Kombination $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ vorkommt, in der $\varkappa_1$ um

die Einheit kleiner ist als das kleinste $\varkappa_1' + 1$, oder dafs beides zugleich eintritt, und dafs für ein überschüssiges $\varkappa_1' + 1$ resp. $\varkappa_1$ gilt:

$$\varkappa_1' = q_1; \quad \varkappa_1 = 0$$

2) dafs die Gesamtheit der von einander verschiedenen $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$; $\varkappa_1' + 1, \varkappa_2', \varkappa_3'$ gerade die η_1, η_2, η_3 sind, welche in Gl. (7a) demselben Werte α entsprechen.

Es ist nun:

(7b)
$$\frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{1}{a_1}\beta_{q_1, q_2, q_3}\right)$$

$$= -\frac{\sin\vartheta}{a_1^2 \Pi(a^{2q})} \sum_{\alpha=0}^{\Sigma q} \sum_{3}^{\varkappa} F(\alpha, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3) \cdot \frac{2q_1 + 2\varkappa_1 + 1}{A^{n+2+\alpha}}$$

$$+ \frac{\sin\vartheta}{a_1^2 \Pi(a^{2q})} \sum_{\alpha=0}^{\Sigma q} \sum_{}^{\varkappa} F(\alpha, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3) \cdot \frac{2(n+2+\alpha)}{A^{n+3+\alpha}} \cdot \left(\frac{d_1}{a_1}\right)^2.$$

Man ersieht sofort, dafs das erste resp. letzte Glied in (7a) ($\alpha = 0$ resp. $\alpha = \Sigma q$) gleich dem $\frac{n+2-\Sigma q}{(q_1+1)(2p_1+1)}$fachen des ersten Gliedes ($\alpha = 0$) im ersten Summenausdruck resp. des letzten Gliedes im zweiten Summenausdruck von (7b) ist. Wird dann in diesem zweiten Summenausdruck $\alpha - 1$ an die Stelle von α und dem entsprechend $\varkappa_1', \varkappa_2', \varkappa_3'$ an die Stelle von $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ gesetzt, so ergiebt sich in Gl. (7b) für den Faktor von $\frac{\sin\vartheta}{a_1^2 \Pi(a^{2q})} \cdot \frac{1}{A^{n+2+\alpha}}$, den wir mit $G(\alpha)$ bezeichnen wollen, während $H(\alpha)$ den entsprechenden Faktor in Gl. (7a) bezeichnen soll, die Summe:

$$G(\alpha) = \sum^{\varkappa} F(\alpha, \varkappa)(2q_1 + 2\varkappa_1 + 1)$$
$$+ \sum^{\varkappa'} F(\alpha - 1, \varkappa') \cdot 2(n + 2 + \alpha) \cdot \left(\frac{d_1}{a_1}\right)^2.$$

Für die übereinstimmenden Werte $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$ und $\varkappa_1' + 1, \varkappa_2', \varkappa_3'$, für die wir gleich η_1, η_2, η_3 setzen wollen, liefert diese Summe, da

$$\sum^{\varkappa'} F(\alpha - 1, \varkappa') \cdot 2(n + 2 + \alpha) \cdot \left(\frac{d_1}{a_1}\right)^2 = \sum^{\eta} F(\alpha, \eta) \cdot \frac{\eta_1(2\eta_1 - 1)}{q_1' + 1 - \eta_1}$$

wird, den Beitrag

$$G(\alpha) = \sum^{\eta} F(\alpha, \eta) \cdot \left[(2q_1 + 2\eta_1 + 1) + \frac{\eta_1(2\eta_1 - 1)}{q_1 + 1 - \eta_1}\right]$$
$$= \sum^{\eta} F(\alpha, \eta) \cdot \frac{(q_1 + 1)(2q_1 + 1)}{q_1 + 1 - \eta_1}.$$

Für diejenigen Teile von $G(\alpha)$ und $H(\alpha)$, welche von den übereinstimmenden $\varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_3$; $\varkappa_1' + 1, \varkappa_2', \varkappa_3'$ herrühren, ist also:

$$H(\alpha) = \frac{n + 2 - \Sigma q}{(q_1 + 1)(2q_1 + 1)} \cdot G(\alpha).$$

Beziehung findet auch für ein überschüssiges $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, $\varkappa_3$ und berschüssiges $\varkappa_1' + 1$, $\varkappa_2'$, $\varkappa_3'$ statt.

olgt mithin die wichtige Rekursionsformel:

$$\beta_{q_1+1,\,q_2,\,q_3} = \frac{n+2-\Sigma q}{(q_1+1)(2q_1+1)} \cdot \frac{\partial}{\partial a_1}\left(\frac{1}{a_1}\,\beta_{q_1,\,q_2,\,q_3}\right),$$

lche $\beta_{q_1+1,\,q_2,\,q_3}$ aus $\beta_{q_1,\,q_2,\,q_3}$ abgeleitet wird.

findet so:

$$P_{2n}^{i} = -\frac{1}{2n+1}\sum_{q=0}^{\Sigma q=n+2}{}_3\,\gamma_{q_1,\,q_2,\,q_3}\,\Pi(x^{2q}),$$

Coeffizienten γ nach einander aus der Gleichung:

$$\gamma_{0,0,0} = \psi = \frac{4}{n+2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{A^{n+2}}$$

der 3 Gleichungen erhalten werden, die entstehen, wenn in nächst γ an die Stelle von β gesetzt wird und wenn sodann es 1, 2, 3 cyklisch vertauscht werden.

in wird:

$$= -\frac{1}{2n+1}\sum_{q=0}^{\Sigma q=n+2}{}_3\,\frac{(n+2)(n+1)\cdots(n+3-\Sigma q)}{\Pi\{q!\,1\cdot 3\cdots(2q-1)\}}\,\psi_{q_1,\,q_2,\,q_3}\cdot\Pi(x^{2q}),$$

$_{q_2,\,q_3}$ das Resultat der auf ψ nach einander q_1, q_2, q_3 mal an- n Operation

$$\cdots\frac{\partial}{\partial a_i}\left\{\frac{1}{a_i}\,\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\frac{1}{a_i}\,\psi\right)\right\}\cdots\,(i=1,\,2,\,3)$$

:t.

ist bekanntlich, wenn wir

$$\cos^2\vartheta = \frac{a_3^{\,2}}{a_3^{\,2}+s}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{A} = \frac{\pi}{2}\,a_1 a_2\cdot\frac{a_3^{\,2}+s}{\sqrt{(a_1^{\,2}+s)\,(a_2^{\,2}+s)}}.$$

olgt, da

$$\frac{1}{A^2} = \frac{a_3}{2}\,(a_3^{\,2}+s)\,\frac{d}{da_3}\left(\frac{1}{A}\right),$$

fferentiation nach a_3, wenn wir berücksichtigen, dafs s eine von a_3 ist, wodurch sich $\frac{\partial s}{\partial a_3} = \frac{2s}{a_3}$ ergiebt, und wenn wir e identische Gleichung:

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}(s^m u) = m\,\frac{\partial^{m-1}}{\partial s^{m-1}}(s^{m-1}u) + s\,\frac{\partial^m}{\partial s^m}(s^{m-1}u)$$

benutzen, in der u eine beliebige Funktion von s bezeichnet:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A^3} = \frac{\pi}{2} a_1 a_2 (a_3 + s)^2 \frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{s}{\sqrt{(a_1^2+s)(a_2^2+s)}}\right).$$

So erhalten wir, wenn wir zur Abkürzung allgemein

$$\sqrt{a^2+s} = b \tag{10}$$

setzen, durch successive Differentiation nach a_3

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{A^{n+2}} = \frac{1}{(n+1)!}\frac{\pi}{2} a_1 a_2 b_3^{2n+4} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\right)$$

und demnach, da $\sin\vartheta d\vartheta = \frac{1}{2}\frac{a_3 ds}{b_3^3}$ wird,

$$\psi = \frac{\pi\,\Pi(a)}{(n+2)!}\int_0^{\infty} b_3^{2n+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\right) ds,$$

worin die Ausdehnung der Integration bis zur Unendlichkeit gestattet ist, weil

$$\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\right) = \frac{1}{b_1 b_2}\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-2k+1)}{2^{n-k+1}} \cdot$$

$$\cdot \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2k-1)}{2^k}\left(\frac{n+1}{k}\right)\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^{2n-2k+2}\cdot\left(\frac{a_2}{b_2}\right)^{2k}.$$

Wollen wir nun ψ_{q_1, q_2, q_3} bestimmen, so werden wir zunächst auf durch die Indices q_1, q_2, q_3 vorgeschriebenen Differentiationen in a_1, a_2, a_3 geführt:

$$(a_3 b_3^{2n+1})_{q_3} = (2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2q_3+3)\cdot a_3 b_3^{2n+1} —$$

$$\left(a_1 a_2 \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\right)\right)_{q_1 q_2} = (-1)^{q_1+q_2}\cdot 1\cdot 3\cdots(2q_1-1)\cdot 1\cdot 3\cdot$$

$$(2q_2-1)\cdot a_1 a_2 \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\cdot\frac{1}{b_1^{2q_1} b_2^{2q_2}}\right),$$

wenn wir nämlich in dem letzteren Ausdruck zunächst die Differentiationen nach a_1, a_2 und sodann erst die nach s ausführen.

Es wird also:

$$P_{2n}^{i} = -\frac{\pi}{(2n+1)(n+2)!}\sum_{q=0}^{\Sigma q = n+2}{}^{J}_{3}(-1)^{q_1+q_2}(n+2)(n+1)\cdots(n-\Sigma q+3$$

$$II\left\{\frac{\alpha x^{2q}}{q!}\right\}\left[\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2q_3+3)}{1\cdot 3\cdots(2q_3-1)}\int_0^{\infty} b_3^{2n-2q_3+1}\cdot\right.$$

$$\left.\cdot\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\cdot\frac{1}{b_1^{2q_1} b_2^{2q_2}}\right) ds\right].$$

druck in der eckigen Klammer ist nun gleich

$$(-1)^{q_1}\int_0^\infty b_3^{2n+1}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\cdot\frac{1}{\Pi(b^{2q})}\right)ds,$$

an sich überzeugt, indem man auf das unbestimmte Integral

$$\int\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\cdot\frac{1}{\Pi(b^{2q})}\right)\frac{ds}{b_3}=\int\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\cdot\frac{1}{b_1^{2q_1}b_2^{2q_2}}\right)\cdot\frac{ds}{b_3^{2q_3+1}}$$

fache Weise $(n+1)$mal hinter einander die teilweise Inte-
anwendet, wodurch jene beiden Integrale erhalten werden.
an dann die Grenzen 0 und ∞ ein, so werden, da

$$\frac{\partial^m}{\partial s^m}\left(\frac{s^m}{b_1 b_2}\cdot\frac{1}{\Pi(b^{2q})}\right)=\frac{1}{b_1 b_2}\cdot\Sigma\frac{\text{const}}{\Pi(b^{2q'})}\cdots\Sigma q'\geqq m,$$

den Integrale bestimmte, endliche Werte annehmen, während
ne der von der Integration befreiten Glieder, welche sich,
(s) eine ganze Funktion von s bezeichnet, in der Form
$\frac{g(s)}{b_2 b_3)^{2n}}$ darstellt, für jene Grenzen verschwindet.
ıin wird:

$$-\frac{\pi\Pi(a)}{(2n+1)\,(n+2)!}\sum_{q=0}^{\Sigma q=n+2}{}_3(n+2)\,(n+1)\cdots(n-\Sigma q+3)\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty b_3^{2n+1}\,\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\,\Pi\left\{\frac{(-1)^q}{q!}\cdot\frac{x^{2q}}{b^{2q}}\right\}\right)ds.$$

Wir können nun die Summation nach den q aus-
führen und erhalten den Ausdruck für P_{2n}^i in der
sehr übersichtlichen Form:

$$P_{2n}^i=-\frac{\pi\Pi(a)}{(2n+1)\,(n+2)!}\cdot$$

$$\cdot\int_0^\infty b_3^{2n+1}\cdot\frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}}\left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2}\left(1-\Sigma\frac{x^2}{b^2}\right)^{n+2}\right)ds.$$

e des verallgemeinerten Jvory'schen Satzes finden wir dann
die Attraktionskomponenten $\frac{\partial P_{2n}^a}{\partial x}$ und aus diesen durch die
ng, dafs beim Durchgange durch die Oberfläche des Ellipsoids
P_{2n}^i ineinander übergehen, das Potential P_{2n}^a in derselben
e $\frac{\partial P_{2n}^i}{\partial x}$ und P_{2n}^i, nur dafs als untere Integrationsgrenze statt
kannte positive Wurzel σ der Gleichung $1-\Sigma\frac{x^2}{a^2+\sigma}=0$

Um nun die höheren Differentialquotienten von P_{2n} abzuleiten, wollen wir zur Abkürzung setzen

$$1 - \Sigma \frac{x^2}{b^2} = u; \quad \frac{s^{n-n_1}}{b_1 b_2} \cdot \Pi \left\{ \left(\frac{s}{b^2}\right)^k \right\} = t \cdots \Sigma k = n_1 + 1$$

und zeigen, dafs

$$\left| \frac{\partial^{n-n_1}}{\partial s^{n-n_1}} (t \cdot u^{n-n_1+1}) \right|_{s=\sigma} = 0 \tag{12}$$

$$\left| b_3^{2n-2n_1+1} \frac{\partial^{n-n_1}}{\partial s^{n-n_1}} (t \cdot u^{n-n_1+1}) \right|_{s=0,\sigma}^{s=\infty} = 0. \tag{13}$$

Dafs beide Ausdrücke für $s = \sigma$ verschwinden, ergiebt sich unmittelbar, wenn man bei der Differentiation t als den einen und u^{n-n_1+1} als den andern Faktor behandelt, wodurch in allen Gliedern u oder höhere Potenzen von u auftreten, die für $s = \sigma$ verschwinden. Setzt man ferner $t = \frac{s^{n-n_1}}{b_1 b_2} \cdot \Pi \left\{ \left(1 - \frac{a^2}{b^2}\right)^k \right\}$, so wird die Differentiation Brüche ergeben, welche Konstante als Zähler und $b_1 b_2$ multipliziert mit einer ganzen Funktion vom $(n - n_1)^{\text{ten}}$ oder höheren Grade in Bezug auf s im Nenner haben, mithin wird der letztere Ausdruck auch für $s = \infty$ verschwinden. Dafs derselbe auch für $s = 0$ verschwindet, erkennt man sofort, wenn man s^n als den einen und $\frac{s \cdot u^{n-n_1+1}}{b_1 b_2 \Pi \{b^{2k}\}}$ als den andern Faktor behandelt, wodurch sich bei der Differentiation überall der Faktor s heraussetzen läfst.

Nun ist:

$$\frac{\partial P_{2n}^a}{\partial x} = \frac{2}{(2n+1)(n+1)!} \pi \Pi(a) \int_\sigma^\infty b_3^{2n+1} \frac{\partial^{n+1}}{\partial s^{n+1}} \left(\frac{s^{n+1}}{b_1 b_2} \cdot u^{n+1} \frac{x}{b^2} \right) ds.$$

Mit Rücksicht auf Gl. 13 folgt daraus bei Anwendung der teilweisen Integration

$$\frac{\partial P_{2n}^a}{\partial x} = -\frac{1}{(n+1)!} \pi \Pi(a) \int_\sigma^\infty b_3^{2n-1} \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left(\frac{s^n}{b_1 b_2} \cdot u^{n+1} \cdot \frac{xs}{b^2} \right) ds,$$

und bei weiterer Differentiation nach x, da mit Rücksicht auf Gl. 12 der Faktor von $\frac{\partial \sigma}{\partial x}$ verschwindet,

$$\frac{\partial^2 P_{2n}^a}{\partial x^2} = \frac{2}{n!} \pi \Pi(a) \int_\sigma^\infty b_3^{2n-1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left(\frac{s^n}{b_1 b_2} \cdot u^n \cdot \frac{x^2 s}{b^4} \right) ds$$

$$- \frac{1}{(n+1)!} \pi \Pi(a) \int_\sigma^\infty b_3^{2n-1} \cdot \frac{\partial^n}{\partial s^n} \left(\frac{s^n}{b_1 b_2} u^{n+1} \cdot \frac{s}{b^2} \right) ds,$$

s erstere Integral durch Anwendung der teilweisen Integration ht in:

$$-\frac{2n-1}{n!}\pi\Pi(a)\int_{\sigma}^{\infty} b_3^{2n-3}\cdot\frac{\partial^{n-1}}{\partial s^{n-1}}\left(\frac{s^{n-1}}{b_1 b_2}u^n\frac{x^2s^2}{b^4}\right)ds.$$

rechende Ausdrücke ergeben sich auch für $\frac{\partial^2 P_{2n}^i}{\partial x^2}$.

So folgt durch successive Differentiation unter gleichzeitiger Anwendung der teilweisen Integration für die Differentialquotienten bis zur $(n+1)^{\text{ten}}$ Ordnung:

$$(14)\quad D_x^{\Sigma m}(P_{2n}) = -\frac{\pi}{2n+1}\sum_{x=0}^{m}{}_3\frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2n-2\lambda+3)}{(n-\lambda+2)!}\cdot$$

$$\cdot\int_{\sigma}^{\infty} b_3^{2n-2\lambda+1}\cdot\frac{\partial^{n-\lambda+1}}{\partial s^{n-\lambda+1}}\cdot$$

$$\cdot\left[\frac{s^{n-\lambda+1}}{b_1 b_2}\cdot u^{n-\lambda+2}\cdot\Pi\left\{a\binom{m}{2x}\left(\frac{xs}{b^2}\right)^{m-2x}\cdot\left(\frac{s}{b^2}\right)^x\right\}\right]ds,$$

wenn man zur Abkürzung

$$\Sigma(m-x)=\lambda$$

setzt und hier, sowie im Folgenden immer, für einen inneren resp. äufseren Punkt 0 resp. σ als untere Integrationsgrenze nimmt.

stimmung des Potentials $V_{2\gamma}(\gamma=-1, 0, 1\cdots)$ des Ellipsoids.

ezeichnen wir die in Gleichung (6) für $\beta=2\gamma$ nach l zu nehmende e mit W und substituieren in dieselbe die sich aus Gleichung (14) nden Ausdrücke, in denen $m=k-2l$ und $2n=\Sigma 2(k-l)+\beta$ zen ist, so gelangen wir zu einer Reihe von der Summations-

ng $\sum_{l=0}^{k'}{}_3\sum_{x=0}^{k'-l}{}_3$. Setzen wir dann $l+x=\mu$ und dem entsprechend $-l)-\lambda=\Sigma\mu$, so können wir W auch die Summationsordnung

$\sum_{x=0}^{\mu}{}_3$ geben; da nun ferner

$$\binom{k}{2l}\binom{k-2l}{x}=\binom{k}{2\mu}\cdot\binom{\mu}{x}$$

$$\sum_{x=0}^{\mu}{}_3(-1)^x\binom{\mu}{x}\left(\frac{s}{b^2}\right)^x=\left(1-\frac{s}{b^2}\right)^\mu=\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^\mu$$

ergiebt sich:

$$W = \pi \sum_{\mu=0}^{k'} {}_3 \frac{1}{(3+2\gamma)(5+2\gamma)\cdots(\Sigma 2\mu+2\gamma+1)} \cdot \frac{1}{(\Sigma\mu+\gamma+2)!} \cdot$$

$$\cdot \int^{\infty} b_3^{\Sigma 2\mu+2\gamma+1} \cdot \frac{\partial^{\Sigma\mu+\gamma+1}}{\partial s^{\Sigma\mu+\gamma+1}} \cdot$$

$$\cdot \left(\frac{s^{\gamma+1}}{b_1 b_2} \cdot u^{\Sigma\mu+\gamma+2} \cdot \Pi \left\{ a \left[\frac{k}{2\mu} \right] \cdot \left(\frac{xs}{b^2} \right)^{k-2\mu} \cdot \left(\frac{a^2 s}{b^2} \right)^{\mu} \right\} \right) ds$$

und wenn zur Abkürzung gesetzt wird:

$$\frac{s^{\gamma+1}}{b_1 b_2} \cdot u^{\Sigma\mu+\gamma+2} \Pi \left\{ a \cdot \left(\frac{a^2 s}{b^2} \right)^{\mu} \right\} = S_1; \quad \Pi \left\{ \left[\frac{k}{2\mu} \right] \cdot \left(\frac{xs}{b^2} \right)^{k-2\mu} \right\} = S_2$$

bei $\Sigma\mu$ maliger Anwendung der teilweisen Integration

$$W = \pi \sum_{\mu=0}^{k'} {}_3 \frac{1}{(\Sigma\mu+\gamma+2)! 2^{\Sigma\mu}} \int^{\infty} b_3^{2\gamma+1} \frac{\partial^{\gamma+1}}{\partial s^{\gamma+1}} (S_1 S_2)\, ds.$$

Durch Substitution in Gleichung (6) und Einführung der umgekehrten Summationsordnung $\sum_{\mu=0}^{\alpha'} {}_3 \sum_{k=2\mu}^{\alpha} {}_3$ folgt daraus:

$$V_{2\gamma} = -\frac{\pi}{2\gamma+1} \sum_{\mu=0}^{\alpha'} {}_3 \frac{1}{2^{\Sigma\mu} \cdot (\Sigma\mu+\gamma+2)!} \cdot$$

$$\cdot \int^{\infty} b_3^{2\gamma+1} \cdot \frac{\partial^{\gamma+1}}{\partial s^{\gamma+1}} \left(S_1 \sum_{k=2\mu}^{\alpha} {}_3 \left[\Pi \left\{ \frac{(-1)^k}{k!} \right\} \cdot S_2 D_x^{\Sigma k}(\varphi) \right] \right) ds.$$

Setzen wir dann

$k - 2\mu = \varrho$, $D_x^{\Sigma 2\mu}(\varphi(x_1 x_2 x_3)) = \psi(x_1 x_2 x_3)$, so dafs $D_x^{\Sigma k}(\varphi) = D_x^{\Sigma \varrho}(\psi)$

$$\frac{a^2 x}{b^2} = y, \tag{15}$$

so wird der nach k zu summierende Ausdruck nach dem Taylorschen Lehrsatz gleich:

$$\frac{1}{2^{\Sigma\mu}} \psi \left(x_1 - \frac{x_1 s}{b_1^2}, \; x_2 - \frac{x_2 s}{b_2^2}, \; x_3 - \frac{x_3 s}{b_3^2} \right) = \frac{1}{2^{\Sigma\mu}} D_y^{\Sigma 2\mu} (\varphi(y_1, y_2, y_3)).$$

Mithin erhalten wir das übersichtliche Endresultat:

$$V_{2\gamma} = -\frac{\pi}{2\gamma+1} \sum_{\mu=0}^{\alpha} {}_3 \frac{1}{(\Sigma\mu+\gamma+2)!} \cdot \tag{16}$$

$$\cdot \int^{\infty} b_3^{2\gamma+1} \cdot \frac{\partial^{\gamma+1}}{\partial s^{\gamma+1}} \left[\frac{s^{\gamma+1}}{b_1 b_2} u^{\Sigma\mu+\gamma+2} D_y^{\Sigma 2\mu} (\varphi(y_1, y_2, y_3)) \Pi \left\{ \frac{a}{4^{\mu}\mu!} \left(\frac{a^2 s}{b^2} \right)^{\mu} \right\} \right]_0$$

Falle der Newton'schen Attraktion:

$$V = \pi \sum_{\mu=0}^{\alpha'}{}_3 \frac{1}{(\Sigma\mu + 1)!} \cdot$$

$$\int^{\infty} u^{\Sigma\mu+1} D_y^{\Sigma 2\mu} (\varphi(y_1, y_2, y_3)) \Pi \left\{ \frac{1}{4^\mu \cdot \mu!} \frac{a}{b} \left(\frac{a^2 s}{b^2}\right)^\mu \right\} ds.$$

Relation $r^{2\gamma+1} = \frac{r^{2\gamma+2}}{r}$ geht nun hervor, dafs man auch entialausdrucke $V_{2\gamma}$ die in Bezug auf die Halbaxen a_1, rmmetrische Form:

$$V_{2\gamma} = - \frac{V}{2\gamma + 1} \sum_{\mu=0}^{\alpha'+\gamma+1}{}_3 \frac{1}{(\Sigma\mu + 1)!} \cdot$$

$$^{\Sigma\mu+1} \cdot D_y^{\Sigma 2\mu} [\varphi(y_1, y_2, y_3) \cdot (\Sigma(x - y)^2)^{\gamma+1}] \cdot A_{\mu_1\mu_2\mu_3} ds$$

ann, wenn $A_{\mu_1\mu_2\mu_3}$ das Produkt Π der Gleichung (16a) be- und wenn die x als von den y unabhängig angesehen werden, s aus diesem Ausdruck der für $P_{2\gamma}$ hervorgeht, wenn man nd dem entsprechend $\alpha' = 0$ setzt.

der Gleichung (16a) folgt unmittelbar das Oberbeck'sche

$$\iiint \frac{\varphi d\tau}{r} = \pi \int^{\infty} u \chi \Pi \left(\frac{a}{b}\right) ds,$$

Dichtigkeitsfunktionen $\varphi = \Sigma \frac{kx'}{a^2}$; $S\left\{k_1 \frac{x_2' x_3'}{a_2^2 a_3^2}\right\}$; $k\Pi\left\{\frac{x'}{a^2}\right\}$

te $\chi = \Sigma \frac{ky}{a^2}$; $S\left\{k_1 \frac{y_2 y_3}{a_2^2 a_3^2}\right\}$; $k\Pi\left\{\frac{y}{a^2}\right\}$

$\chi = \Sigma \frac{kx}{b^2}$; $S\left\{k_1 \frac{x_2 x_3}{b_2^2 b_3^2}\right\}$; $k\Pi\left\{\frac{x}{b^2}\right\}$

ıen.

nso erhalten wir auch mit Ferrers:

$$\iiint \frac{x'^2 d\tau}{r} = \pi \int^{\infty} \Pi\left(\frac{a}{b}\right) \left(uy^2 + \frac{1}{4} u^2 \cdot \frac{a^2 s}{b^2}\right) ds.$$

er Gelegenheit möchte ich darauf aufmerksam machen, dafs ler Ferrers'schen Abhandlung pag. 9 gegebene Entwickelung luktes $\left(\frac{x}{a}\right)^\alpha \left(\frac{y}{b}\right)^\beta \left(\frac{z}{c}\right)^\gamma$ einen Fehler enthält, und dafs auch emeine Rechnung zu einem übersichtlichen Resultate führt. rer Bezeichnungsweise mufs es nämlich, wenn man die dort ete Reihe ganz ausführt, heifsen:

$$\Pi(x'^{\alpha}) = \frac{1}{2^{\Sigma\alpha}} \cdot \sum_{m=0}^{\alpha'}{}_3 \frac{\Pi\{(-1)^m \alpha \cdot (\alpha-1)\cdots(\alpha-2m+1)\, a^{2\alpha-2m}\}}{\Pi\{m!\}\cdot[\Sigma(\alpha-m)!]} \cdot$$
$$\cdot D_{x'}^{\Sigma(\alpha-2m)}\left[\left(\Sigma\frac{x'^2}{a^2}-1\right)^{\Sigma(\alpha-m)}\right].$$

Sei nun:

$$Q = \iiint\left(\Sigma\frac{x'^2}{a^2}-1\right)^n \cdot \frac{d\tau}{r} = -\frac{\pi}{n+1}\int^{\infty}\left(\Sigma\frac{x}{b^2}-1\right)^{n+1}\Pi\left(\frac{a}{b}\right)ds,$$

so ergiebt sich für $\Sigma q \leq n$ der Ausdruck,

$$\iiint D_{x'}^{\Sigma q}\left(\left(\Sigma\frac{x'^2}{a^2}-1\right)^n\right)\frac{d\tau}{r} = D_x^{\Sigma q}(Q) = -\frac{\pi}{n+1}\cdot$$
$$\cdot\sum_{l=0}^{q'}{}_3\,(n+1)\,n\cdots(n-\Sigma(q-l)+2)\int^{\infty}\left(\Sigma\frac{x^2}{b^2}-1\right)^{n+1-\Sigma(q-l)}$$
$$\cdot\Pi\left\{\left[\begin{matrix}q\\2l\end{matrix}\right]\cdot\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{2x}{b^2}\right)^{q-2l}\cdot\left(\frac{2}{b^2}\right)^l\right\}ds,$$

durch dessen Substitution in die Formel:

$$V = \iiint\Pi(x'^{\alpha})\cdot\frac{d\tau}{r}$$

wir schliefslich zu einem der Gleichung (16a) analogen Resultate gelangen, in welchem statt φ die Gröfse $\Pi\{y^{\alpha}\}$ auftritt.

Durch eine einfache Grenzbetrachtung können wir nun vom Körperpotential V unmittelbar zum Flächenpotential Q übergehen. Zu diesem Zwecke schneiden wir von dem gegebenen Ellipsoid durch ein demselben ähnliches und ähnlich liegendes Ellipsoid von den Halbaxen $a_1(1-\varepsilon)$; $a_2(1-\varepsilon)$; $a_3(1-\varepsilon)$ eine unendlich dünne Schale ab, erteilen derselben die Dichtigkeit k und lassen schliefslich k derart ins Unendliche wachsen und ε derart abnehmen, dafs $\lim(k\varepsilon) =$ wird. Es wird dann, abgesehen von einem konstanten Faktor, das allgemeine Glied der Gl. (16a) zu $Q = \varepsilon\Sigma\frac{\partial V}{\partial a}a$ den Beitrag:

$$\int^{\infty} A u^{\Sigma\mu+1}\Big[2\cdot\frac{\Sigma\mu+1}{u}\cdot Y\Sigma\frac{y^2}{a^2} + 2s\Sigma\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{a^2x}{b^4}\right)$$
$$+ Y\left(1-\Sigma\frac{a^2}{b^2}+2s\Sigma\frac{\mu}{b^2}\right)\Big]ds$$

liefern, wenn bei A die Indices μ fortgelassen sind und Y den nach den y genommenen Differentialquotienten bezeichnet. Nun ist

$$\Sigma\frac{y^2}{a^2} = 1-u-s\frac{\partial u}{\partial s};\quad \Sigma\left(\frac{\partial Y}{\partial y}\cdot\frac{a^2x}{b^4}\right) = -\frac{dY}{ds};$$
$$\Sigma\frac{a^2}{b^2} = 3-s\Sigma\frac{1}{b^2};\quad \Pi\left(\frac{1}{b}\right)\Sigma\frac{1}{b^2} = -2\frac{\partial}{\partial s}\Pi\left(\frac{1}{b}\right).$$

enden wir nun mittelst der letzteren Relation auf

$$\int u^{\Sigma\mu+1} s\, Y A \Sigma \frac{1}{b^2}\, ds$$

teilweise Integration an, so ergiebt sich für das Flächenential Q:

$$Q = \iint \frac{\varphi}{\sqrt{\Sigma \frac{x'^2}{a^4}}} \cdot \frac{do}{r} = 2\pi \sum_{\mu=0}^{\alpha} {}_3 \frac{1}{(\Sigma\mu)!} \int u^{\Sigma\mu} D_y^{\Sigma 2\mu}(\varphi) \cdot A_{\mu_1\mu_2\mu_3} ds.$$

ferner

$$M = \iiint \Pi\{x'^{\alpha}\} d\tau, \quad M' = \iint \frac{\Pi\{x'^{\alpha}\}}{\sqrt{\Sigma \frac{x'^2}{a^4}}} \cdot do,$$

werden wir, da für $\varrho = \sqrt{\Sigma x^2} = \infty$: $\lim(\varrho V) = M$; $\lim(\varrho Q) = M'$; $= \sqrt{\sigma}$ und $u = 1 - \frac{\sigma}{s}$ werden, auf die Ausdrücke $\lim(\sqrt{\sigma} \cdot V)$; $(\sqrt{\sigma} \cdot Q)$ geführt; dieselben sind entweder gleich 0, oder gleich multipliziert mit dem letzten Gliede der Gl. (16a) und (18), d. h. ch einer Konstanten multipliziert mit dem Integral

$$\left\{ \sqrt{\sigma} \int_{\sigma}^{\infty} \frac{ds}{s \frac{s}{2}} \left(1 - \frac{\sigma}{s}\right)^{\Sigma\alpha'+1} \right\}_{\sigma=\infty} = 2 \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2 + \Sigma\alpha)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (3 + \Sigma\alpha)};$$

erhalten mithin

$$M = 0 \text{ oder } = 4\pi \frac{\Pi\{1 \cdot 3 \cdots (\alpha - 1) \cdot a^{\alpha+1}\}}{1 \cdot 3 \cdots (3 + \Sigma\alpha)}$$

$$M' = 0 \text{ oder } = 4\pi \frac{\Pi\{1 \cdot 3 \cdots (\alpha - 1) \cdot a^{\alpha+1}\}}{1 \cdot 3 \cdots (1 + \Sigma\alpha)};$$

achdem $\Pi\{x'^{\alpha}\}$ ungrade oder nur grade Potenzen enthält.

Aus der Formel für M und der Reihenentwickelung:

$$= \sum_{\Sigma(q+q')=2\gamma} \gamma! \Pi \left\{ (-1)^{q'} \frac{(q+q')!}{\left(\frac{q+q'}{2}\right)!} \frac{x^q}{q!} \frac{x'^{q'}}{q'!} \right\} \cdots (q+q') \text{ grade Zahl}$$

t ferner, dafs sich das Potential $V_{2\gamma-1}$ als geschlossener Aus- k darstellen läfst.

D. Zum Schlusse möge noch ermittelt werden, wie man die im Innern des Ellipsoids enthaltene Masse über die Oberfläche zu verteilen habe, ohne die Wirkung auf äufsere Punkte zu ändern.

Sei T ein durch die Oberfläche von der Gleichung $f(x_1', x_2', x_3') = 0$ renzter Körper, seien ferner Φ und Ψ zwei durch die Differential- ichung:

(21) $$\Phi = \Delta(f\Psi)$$

verbundene Funktionen, so stellen die Integrale:

(22) $$Q_a = \iiint \frac{\Phi d\tau}{r}; \quad Q_i = \iiint \frac{\Phi d\tau}{r} + 4\pi f\Psi$$

das Oberflächenpotential des Körpers T bei der Dichtigkeit

$$\chi = \frac{\partial(f \cdot \Psi)}{\partial n_i} = \pm \Psi \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$$

dar, welches nach aufsen hin dieselbe Wirkung ausübt wie der volle Körper bei der Dichtigkeit Φ, d. h. wenn man die im Innern enthaltene Masse bei der Dichtigkeit Φ so über die Oberfläche verteilt, dafs die Dichtigkeit gleich $\pm \Psi \sqrt{\Sigma \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2}$ wird, wo die Funktionen Φ und Ψ durch die Gleichung (21) zusammenhängen, so üben beide Massen auf äufsere Punkte die gleiche Anziehung aus.

Ist der Körper T speziell ein Ellipsoid und Φ die folgende Summe von homogenen Funktionen vom Grade 0, 1, 2 $\cdots$ m in Bezug auf die Koordinaten x_1, x_2, x_3:

$$\Phi = \sum_{k=0}^{\Sigma k=m}{}_3 \, c_{k_1,k_2,k_3} \Pi(x^k),$$

wo die c Konstante bezeichnen, so ist

$$\Psi = \sum_{k=0}^{\Sigma k=m}{}_3 \, d_{k_1,k_2,k_3} \Pi(x^k)$$

ein Integral der Differentialgleichung (21), die dadurch übergeht in:

(23) $$\sum_{k=0}^{\Sigma k=m}{}_3 \, c_{k_1,k_2,k_3} \Pi(x^k)$$

$$= 2 \sum_{k=0}^{\Sigma k=m}{}_3 \left[S\left\{ \frac{l_2}{a_1^2} d_{k_1-2,k_2+2,k_3} + \frac{l_3}{a_1^2} d_{k_1-2,k_2,k_3+2} + \frac{l_1}{a_1^2} d_{k_1,k_2,k_3} \right\} - S\left\{ l_1 d_{k_1+2,k_2,k_3} \right\} \right] \Pi(x^k),$$

wenn $l = \binom{k+2}{2}$ gesetzt wird und die d mit negativem Index und die d, deren Indexsumme gröfser als m ist, gleich 0 genommen werden.

Verstehen wir nun unter d_p allgemein einen Koeffizienten, dessen Indexsumme gleich p ist, und bezeichnen in (23) den ersten Summenausdruck S, der eine lineare Funktion von 1, 3, 5 oder 7 der d_p ist, mit $C_{k_1,k_2,k_3}(d_p)$ und die aus 3 Gliedern bestehende zweite Summe S mit $D_{k_1,k_2,k_3}(d_{p+2})$, so ergiebt sich zur successiven Be-

ıung der $\binom{p+2}{2}$ Gröfsen d_p aus den c_p und d_{p+2} das Glei-
;ensystem:

$$C_{k_1,k_2,k_3}(d_p) = \frac{1}{2} c_{k_1,k_2,k_3} + D_{k_1,k_2,k_3}(d_{p+2}) \cdots \Sigma k = p.$$

:hst werden also die d_m resp. d_{m-1} bestimmt durch das System

$$C_{k_1,k_2,k_3}(d_m) = \frac{1}{2} c_{k_1,k_2,k_3} \cdots \Sigma k = m;$$

resp. $C_{k_1,k_2,k_3}(d_{m-1}) = \frac{1}{2} c_{k_1,k_2,k_3} \cdots \Sigma k = m-1,$

ıf die d_{m-2} durch das System

$$_{,k_3}(d_{m-2}) = \frac{1}{2} c_{k_1,k_2,k_3} + D_{k_1,k_2,k_3}(d_m) \cdots \Sigma k = m-2 \text{ u. s. f.}$$

)berflächendichtigkeit wird dann gleich

$$2\sqrt{\Sigma \frac{x'^2}{a^4}} \cdot \sum_{k=0}^{\Sigma k=m} {}_3 d_{k_1,k_2,k_3} H(x^k).$$

eispielsweise

$$\Phi = x_1^2, \text{ also } m = 2 \text{ und } c_{2,0,0} = 1,$$

:nd die übrigen Koeffizienten c gleich Null zu setzen sind,
rd:

$$\varphi = d_{2,0,0}x_1^2 + d_{0,2,0}x_2^2 + d_{0,0,2}x_3^2 + d_{0,0,0},$$

e d mit graden Indices nach einander aus dem Gleichungensystem:

$$\left(\frac{1}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right)d_{2,0,0} + \frac{1}{a_1^2} d_{0,2,0} + \frac{1}{a_1^2} d_{0,0,2} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{a_2^2} d_{2,0,0} + \left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{6}{a_2^2}+\frac{1}{a_3^2}\right)d_{0,2,0} + \frac{1}{a_2^2} d_{0,0,2} = 0$$

$$\frac{1}{a_3^2} d_{2,0,0} + \frac{1}{a_3^2} d_{0,2,0} + \left(\frac{1}{a_1^2}+\frac{1}{a_2^2}+\frac{6}{a_3^2}\right) d_{0,0,2} = 0$$

ıus

$$\Sigma \frac{1}{a^2} \cdot d_{0,0,0} = d_{2,0,0} + d_{0,2,0} + d_{0,0,2}$$

ımt werden, während sich die übrigen Koeffizienten d gleich
ergeben.

ın derselben Weise läfst sich die Aufgabe auch für jede beliebige
:rdichtigkeit φ lösen, wenn dieselbe als ganze Funktion der
linaten gegeben ist. Bezeichnet nämlich m die höchste Dimension
· Reihe, so haben wir nur die oben definierte Funktion Φ vom
: m zu bilden und dieselbe mit der Funktion φ dadurch in
:instimmung zu bringen, dafs wir die Koeffizienten der Produkte
ı hoher Potenzen von x_1, x_2, x_3 einander gleich, und die Koeffi-
:n der überschüssigen Glieder der Reihe Φ gleich 0 setzen.

Eine Methode zur Bestimmung der primitiven Wurzeln der Kongruenz $g^{p-1} \equiv 1 \bmod p$, für einen reellen Primzahlmodul p.

(Von Dr. Hans Keferstein.)

Unter der Voraussetzung, dafs primitive Wurzeln der Kongruenz

(I) $$x^{p-1} \equiv 1 \bmod p,$$

wo p eine Primzahl und x kein Vielfaches von p ist, existieren und eine solche primitive Wurzel g bekannt ist, läfst sich die Aufgabe, den kleinsten Exponenten δ zu finden, der für ein gegebenes x die Kongruenz

(II) $$x^{\delta} \equiv 1 \bmod p$$

erfüllt, oder kürzer, den Exponenten δ, „zu welchem x gehört," stets leicht lösen. Wir schicken den Beweis für diese Behauptung voraus und lassen dann eine Methode zur Auffindung sämtlicher primitiven Wurzeln der Kongruenz (I) folgen.

Zuvörderst vereinfacht sich die Aufgabe durch die Bemerkung, dafs man die Betrachtung auf solche x beschränken kann, welche $\leqq \frac{p-1}{2}$ sind, da für

$$y = ap + x; \quad x < p;$$
$$(ap + x)^{\delta} \equiv x^{\delta} \bmod p;$$

und für

$$z = p - x; \quad x \leqq \frac{p-1}{2};$$
$$(p - x)^{\delta} \equiv (-1)^{\delta} x^{\delta} \bmod p$$

wird. Bildet man die 0te bis $(p-2)^{te}$ Potenz der primitiven Wurzel so wird wegen

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \bmod p.$$

$$g^0 = 1 \equiv 1; \quad g^1 \equiv r_1; \quad g^2 \equiv r_2; \quad \ldots \quad g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1; \quad g^{\frac{p+1}{2}} \equiv -r_1;$$
$$g^{\frac{p+3}{2}} \equiv -r_2; \quad \ldots \quad g^{p-2} \equiv -r_{\frac{p-3}{2}};$$

sämtliche Kongruenzen sind bezogen auf den Modul p. Wir wollen diesen Modul künftig der einfacheren Schreibweise wegen weglassen, so dafs er bei allen Kongruenzen, die nicht ausdrücklich auf einen anderen Modul bezogen sind, hinzuzudenken ist. Die Reste r sind bekanntlich sämtlich von einander verschieden. Dem absoluten Werte

ch lassen sie sich alle durch Zahlen darstellen, die $\leqq \frac{p-1}{2}$ sind; denn z. B. $r_k > \frac{p-1}{2}$, etwa $r_k = p - r_k'$; wo $r_k' \leqq \frac{p-1}{2}$; so wird

$$g^k \equiv r_k = p - r_k' \equiv -r_k'.$$

)lglich sind die r sämtlich Zahlen der Reihe

$$\pm 1;\ \pm 2;\ \cdots\ \pm \frac{p-1}{2};$$

ıd stimmt der absolute Wert einer jeden dieser Zahlen mit dem bsoluten Werte eines r überein.

Es sei nun in

$$r_k \equiv g^k$$

$\frac{-1}{\delta}$ der gröfste gemeinsame Teiler von k und $p-1$; also

$$k = \alpha \cdot \frac{p-1}{\delta} \text{ und } p-1 = \delta \frac{p-1}{\delta},$$

α und δ relativ prim sind. Wir behaupten, dafs dann r_k zu den ‹ponenten δ gehört. Denn es wird erstens

$$r_k{}^\delta \equiv g^{\alpha \frac{p-1}{\delta} \delta} \equiv (g^{p-1})^\alpha \equiv 1.$$

ire nun schon

$$r_k{}^{\delta'} \equiv 1; \quad \text{wo } \delta' < \delta;$$

müfste sein

$$r_k{}^{\delta'} \equiv g^{\alpha \frac{p-1}{\delta} \delta'};$$

hin $\frac{\alpha \delta'}{\delta}$ eine ganze Zahl oder

$$\alpha \delta' \equiv 0 \bmod \delta$$

r da α und δ relativ prim sind

$$\delta' \equiv 0 \bmod \delta;$$

s unmöglich ist, da $\delta' < \delta$. Wir haben also den Satz: „Gehört zu dem Exponenten k einer primitiven Wurzel g und haben k und -1 den gröfsten gemeinsamen Teiler $\frac{p-1}{\delta}$, so ist δ der kleinste ponent, für welchen $r^\delta \equiv 1$ wird“, oder kürzer: „Ist Ind. $r_k = k$ d $k = \alpha \frac{p-1}{\delta}$, wo α und δ relativ prim sind, so gehört r_k zu m Exponenten δ.“

Da nun $\varphi(\delta)$ Exponenten von g existieren, welche mit $p-1$ n gröfsten gemeinsamen Teiler $\frac{p-1}{\delta}$ besitzen und jeder dieser Exnenten der Index eines r ist, so giebt es offenbar auch $\varphi(\delta)$ inngruente Zahlen, die zu δ gehören. Ist der Index eines r relativ

prim zu $p-1$, so gehört dieses r zu $p-1$; mithin sind all r primitive Wurzeln und es giebt deren $\varphi(p-1)$.

Beispiel $p = 13$. $g = 2$.

Ind.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
r	2	4	-5	3	6	-1	-2	-4	5	-3
δ	12	6	4	3	12	2	12	3	4	6

Wir gehen nunmehr dazu über, eine Methode zur Best sämtlicher primitiven Wurzeln der Kongruenz

$$g^{p-1} \equiv 1$$

zu geben, welche auf einer Aussonderung der nicht primitiven W aus der Reihe der Zahlen $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots \pm \frac{p-1}{2}$ ber

Es sei

$$p - 1 = 2^x a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots$$

wo $a, b, c \ldots$ Primfaktoren bedeuten. Wir bilden die quadr Reste der Zahlen 1, 2, 3, $\cdots \frac{p-1}{2}$ und setzen

$$1^2 \equiv 1; \quad 2^2 \equiv \varrho_{2,2}; \quad 3^2 \equiv \varrho_{2,3}; \quad \cdots \quad \left(\frac{p-1}{2}\right)^2 \equiv \varrho_{2,\frac{p-1}{2}};$$

diese Reste ϱ sind sämtlich von einander verschieden, da $y^2 \equiv z^2$ wäre, entweder $y + z \equiv 0$ oder $y - z \equiv 0$ sein müfs unmöglich, da für $y \leq \frac{p-1}{2}$; $z < \frac{p-1}{2}$ ist. Für diejenige welche gröfser als $\frac{p-1}{2}$ sind, kann man wie früher wieder i gänzung zu p mit negativem Vorzeichen einführen. Thut m so sind die ϱ jedenfalls $\frac{p-1}{2}$ Zahlen aus der Reihe

$$\pm 1, \pm 2, \cdots \pm \frac{p-1}{2}.$$

Nun mufs nach dem früheren jedes k der Reihe

$$1, 2, 3, \cdots k, \cdots \frac{p-1}{2}$$

dem absoluten Werte nach mit dem absoluten Werte eine Kongruenzen

$$1 \equiv 1; \quad g^1 \equiv r_1; \quad g^2 \equiv r_2; \quad \cdots \quad g^{\frac{p-3}{2}} \equiv r_{\frac{p-3}{2}}$$

übereinstimmen. Es sei

$$\pm k = r_\lambda \equiv g^\lambda$$

also

$$k^2 \equiv \varrho_{2,k} \equiv g^{2\lambda}.$$

Folglich gehört $\varrho_{2,k}$ zu einer geraden Potenz von g, ist also keine primitive Wurzel. Mithin können nur quadratische Nichtreste mod p primitive Wurzeln für diesen Modul sein.

Anmerkung. Dieses Kriterium genügt zur Bestimmung der primitiven Wurzeln jeder Primzahl von der Form $p = 2^\lambda - 1$, da dann die Anzahl dieser Wurzeln

$$\varphi(p-1) = 2^{\lambda-1} = \frac{2^\lambda}{2} = \frac{p-1}{2}$$

ist und andrerseits $\frac{p-1}{2}$ quadratische Nichtreste existieren. Z. B. sind für $p = 17 = 2^4 + 1$; die quadratischen Reste ± 1, ± 2, ± 4, ± 8; also die quadratischen Nichtreste und mithin auch die primitiven Wurzeln ± 3, ± 5, ± 6, ± 7. Ferner reicht die Bestimmung der quadratischen Reste aus für Primzahlen der Form $p = 4n + 1$, wenn n eine Primzahl ist und für Primzahlen der Form

$$p = 4n + 3 = 2(2n + 1) + 1,$$

falls $2n + 1$ eine Primzahl ist. Um dies einzusehen, berücksichtige man, dafs für $p = 4n + 1$; $g^{2n} \equiv -1$; und wenn $g^n \equiv r_n$; $r_n^2 \equiv -1$; also -1 quadratischer Rest ist (was auch sonst aus der Theorie dieser Reste bekannt ist); ferner dafs $g^{2a} \equiv -g^{2n+2a}$; wo $a < n$; dafs dagegen für $p = 4n + 3$; $g^{2n+1} \equiv -1$; also -1 Nichtrest ist. Nun treten für $p = 4n + 1$ gerade $2n$ quadratische Reste auf. Aufserdem folgt aus $(\pm x)^2 \equiv -1 \equiv g^{2n}$; dafs $(g^n + x)(g^n - x) \equiv 0$; also entweder $g^n \equiv x$ oder $g^n \equiv -x$ und entsprechend wegen $g^n \equiv -g^{3n}$; entweder $g^{3n} \equiv -x$; oder $g^{3n} \equiv x$; hieraus ergiebt sich, dafs $\pm x$ weder quadratischer Rest, noch primitive Wurzel ist. Demnach sind $2n + 2$ Zahlen als nicht primitive Wurzeln bekannt; es ist aber

$$4n - (2n + 2) = 2n - 2 = 2(n - 1) = \varphi(4n),$$

falls n eine Primzahl ist, d. h. die übrigen Zahlen der Reihe $1, 2, \ldots 4n$ sind die gesuchten primitiven Wurzeln. Im zweiten Fall, wo $p = 4n + 3$ und $2n + 1$ eine Primzahl ist, treten $2n + 1$ quadratische Reste auf, der Nichtrest -1, da sein Index $2n + 1$ ist, kann auch keine primitive Wurzel sein und

$$4n + 2 - (2n + 2) = 2n = \varphi(2(2n + 1))$$

d. h. die Anzahl der noch übrigen Zahlen ist wieder gleich der Anzahl der gesuchten primitiven Wurzeln, jene Zahlen selbst sind also mit den letzteren identisch.

Seien nun

$$R_{2,1};\ R_{2,2};\ \cdots\ R_{2,\frac{p-1}{2}}$$

die $\frac{p-1}{2}$ quadratischen Nichtreste mod p, wo $p = 2^x \cdot a^\alpha \cdot b^\beta \cdot c^\gamma$ Wir bilden die a^{ten} Potenzreste dieser R und es sei

$$R_{2,k}^a \equiv \varrho_{a,k};$$

dann ist $\varrho_{a,k}$ kein quadratischer Rest; denn wäre $\varrho_{a,k}$ ein solcher müfste $\varrho_{a,k} \equiv g^{2\alpha}$ sein und daraus würde wegen

$$R_{2,k} \equiv g^{2\beta+1};$$

also

$$R_{2,k}^a \equiv g^{\alpha(2\beta+1)} \equiv \varrho_{a,k};$$

also

$$g^{2\alpha} \equiv g^{\alpha(2\beta+1)}$$

folgen, d. h. eine ungerade Potenz einer primitiven Wurzel mü kongruent einer geraden Potenz derselben Wurzel sein, was offei unmöglich ist. $\varrho_{a,k}$ gehört demnach zu den $\frac{p-1}{2}$ quadratischen Ni resten. Aus

$$R_{2,k}^a \equiv g^{\alpha(2\beta+1)} \equiv \varrho_{a,k}$$

folgt aber, dafs

$$\text{Ind } \varrho_{a,k} = a(2\beta+1) \equiv 0 \bmod a;$$

wobei zunächst $a(2\beta+1) < p-1$ vorausgesetzt ist. Für $a(2\beta$ - $= q \cdot (p-1) + \mu;\ \mu < p-1;$ wird

$$g^{a(2\beta+1)} \equiv g^{a(2\beta+1)-q(p-1)};\quad \text{wegen } g^{q(p-1)} \equiv 1;$$

also ebenfalls

$$\text{Ind } \varrho_{a,k} = a(2\beta+1) - q \cdot 2^x \cdot a^\alpha b^\beta c^\gamma \cdots \equiv 0 \bmod a.$$

In jedem Falle ist also

$$\text{Ind } \varrho_{a,k} \equiv 0 \bmod a$$

mithin $\varrho_{a,k}$ keine primitive Wurzel. Folglich sind die a^{ten} Po reste der quadratischen Nichtreste mod p sämtlich keine primi Wurzeln, und letztere können nur noch unter den a^{ten} Nichtreste quadratischen Nichtreste gesucht werden. Die Anzahl jener a^{ten} I ist offenbar gleich der Anzahl derjenigen Exponenten von g, w durch a, aber nicht durch 2 teilbar sind, also gleich $\frac{p-1}{2a}$, m ist die Anzahl derjenigen Zahlen, welche weder quadratische a^{te} Reste sind, gleich

$$p-1-\frac{p-1}{2}-\frac{p-1}{2a}=(p-1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)$$
$$=2^{x-1}a^{\alpha-1}b^{\beta}c^{\gamma}\cdots(a-1).$$

Wir bezeichnen dieselben durch $R_{a,1}$; $R_{a,2}$; ... $R_{a,l}$. Durch eine der obigen völlig analoge Betrachtung erkennt man leicht, dafs die b^{ten} Reste dieser Zahlen zu Exponenten von g gehören, welche weder durch 2, noch durch a, wohl aber durch b teilbar sind, oder dafs ihre Indices $\equiv 0 \bmod b$ sind. Mithin kann keiner dieser b^{ten} Reste quadratischer oder a^{ter} Rest, aber auch keine primitive Wurzel sein. Die Anzahl derselben ist $\frac{p-1}{2ab}(a-1)$ und die Anzahl der b^{ten} Nichtreste, unter welchen die primitiven Wurzeln zu suchen sind, bestimmt sich leicht gleich

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)=2^{x-1}a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma}\cdots(a-1)(b-1).$$

Bildet man in dieser Weise die Potenzreste für jeden Exponenten, der ein Primfaktor von $p-1$ ist, so bleiben offenbar zuletzt

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$$
$$=2^{x-1}a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^{\gamma-1}\cdots(a-1)(b-1)(c-1)\cdots$$

Nichtreste übrig. Diese Anzahl ist aber gleich $\varphi(p-1)$, also gerade gleich der Anzahl der gesuchten primitiven Wurzeln, folglich sind jene Nichtreste diese Wurzeln selbst.

Hiermit ist also auch der zweite Teil unserer Aufgabe erledigt und eine methodische Bestimmung sämtlicher primitiver Wurzeln der Kongruenz

$$g^{p-1}\equiv 1 \bmod p$$

gegeben.

Es kann noch die auf eine Vereinfachung des angegebenen Verfahrens hinzielende Frage aufgeworfen werden, welche Zahlen R denselben k^{ten} Potenzrest ϱ_k liefern, wie ein bestimmtes R. Sind nämlich $2, a, b, \ldots h$ diejenigen Primfaktoren von $p-1$, für welche als Exponenten die Potenzreste bereits gebildet worden sind, so giebt es nach dem obigen noch

$$(p-1)\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{h}\right)$$

Zahlen R, für welche die k^{ten} Reste zu suchen sind. Die Anzahl der Exponenten von g, die weder durch 2, noch durch $a, b, \ldots h$, wohl aber durch k teilbar sind, ist gleich

$$\frac{p-1}{k}\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{h}\right);$$

also liefert nur der k^{te} Teil der obigen Anzahl der R voneinander verschiedene Reste ϱ_k, und es läfst sich leicht zeigen, dafs auch immer genau k der R denselben Rest ϱ_k liefern. Ist nämlich

$$R^k \equiv \varrho_k,$$

wo k einen ungeraden Primfaktor von $p-1$ bedeutet, und

$$g^{\frac{p-1}{k}} \equiv R_2; \quad g^{2\frac{p-1}{k}} \equiv R_3; \cdots g^{(k-1)\frac{p-1}{k}} \equiv R_k;$$

so folgt wegen

$$R_2^k \equiv R_3^k \equiv \cdots \equiv R_k^k \equiv 1;$$

dafs auch

$$R^k \equiv (RR_2)^k \equiv (RR_3)^k \equiv \cdots \equiv (RR_k)^k \equiv \varrho_k$$

und R, RR_2, RR_3, ... RR_k sind offenbar k inkongruente Zahlen mod p. Sie gehören aber auch sämtlich zu den R, welche nach Bildung der 2ten, a^{ten}, b^{ten}, ... h^{ten} Potenzreste als Nichtreste übrig geblieben sind. Denn nach unseren Auseinandersetzungen ist Ind R nicht teilbar durch 2, a, b, ... h. Wäre nun Ind $(R \cdot R_l) \equiv 0$ nach einem der Moduln 2, a, b, ... h, so würde, da jedenfalls

$$\text{Ind } R_l = l\frac{p-1}{k} \equiv 0 \bmod 2ab \ldots h,$$

aus der bekannten Relation

$$\text{Ind } (R \cdot R_l) \equiv \text{Ind } R + \text{Ind } R_l \bmod p-1,$$

also auch

$$\text{Ind } (RR_l) \equiv \text{Ind } R + \text{Ind } R_l \bmod 2ab \ldots h$$

$$0 \equiv \text{Ind } R \bmod 2ab \ldots h$$

folgen, was nicht der Fall ist. In der That liefern also immer k de$R$ einen gleichen Rest ϱ_k. Die Bestimmung der Zahlen $R_2, R_3, \ldots R_k$, welche die Eigenschaft besitzen, dafs ihre Produkte mit einem gegebene$R$ denselben k^{ten} Potenzrest liefern wie dieses R, oder derjenigen Zahle, deren k^{ter} Potenzrest 1 ist, welche also „zum Exponenten k gehören", da ja k als Primfaktor von $p-1$ notwendig die kleinste Zahl is, welche diese Bedingung erfüllt, läfst sich allgemein durchführen, ud zwar mit Hilfe gewisser cyklischer Beziehungen unter den quadratische$n$ Kongruenzen mod p. Indem wir eine ausführliche Darstellung dieser Relationen einer späteren Untersuchung vorbehalten, beschränken wir uns an diesem Orte auf eine Benutzung derselben bei der Beha$d$lung zweier Zahlenbeispiele für die im Vorstehenden gegebene Methde zur Bestimmung der primitiven Wurzeln.

1. Beispiel:

$$p = 43; \quad p-1 = 2 \cdot 3 \cdot 7.$$

Es sind zunächst 21 quadratische Kongruenzen aufzustelen Wir finden:

$$
\begin{array}{ll|ll}
1^2 \equiv & 1 \bmod 43; & 12^2 \equiv & 15 \bmod 43; \\
2^2 \equiv & 4 & 13^2 \equiv & -3 \\
3^2 \equiv & 9 & 14^2 \equiv & -19 \\
4^2 \equiv & 16 & 15^2 \equiv & 10 \\
5^2 \equiv & -18 & 16^2 \equiv & -2 \\
6^2 \equiv & -7 & 17^2 \equiv & -12 \\
7^2 \equiv & 6 & 18^2 \equiv & -20 \\
8^2 \equiv & 21 & 19^2 \equiv & 17 \\
9^2 \equiv & -5 & 20^2 \equiv & 13 \\
10^2 \equiv & 14 & 21^2 \equiv & 11. \\
11^2 \equiv & -8 & &
\end{array}
$$

Quadratische Nichtreste sind also die Zahlen:

$$-1, +2, +3, -4, +5, -6, +7, +8, -9, -10, -11, +12, -13, -14, -15, -16, -17, +18, +19, +20, -21.$$

Von diesen Nichtresten sind die kubischen Reste zu bilden. Vorher aber bestimmen wir die Zahlen, welche zum Exponenten 3 gehören, aus dem Cyklus:

$$6^2 \equiv -7 \bmod 43$$
$$(-7)^2 \equiv 6,$$

woraus $6^3 \equiv (-7)^3 \equiv 1 \bmod 43$ folgt. Nunmehr ergiebt sich:

$$
\begin{array}{lll}
(-1)^3 \equiv & (-6)^3 \equiv & 7^3 \equiv -1 \bmod 43 \\
2^3 \equiv & 12^3 \equiv (-14)^3 \equiv & 8 \\
3^3 \equiv & 18^3 \equiv (-21)^3 \equiv & -16 \\
(-4)^3 \equiv & 19^3 \equiv (-15)^3 \equiv & -21 \\
5^3 \equiv (-13)^3 \equiv & & 8^3 \equiv -4 \\
(-9)^3 \equiv (-11)^3 \equiv & & 20^3 \equiv 2 \\
(-10)^3 \equiv (-17)^3 \equiv & & (-16)^3 \equiv -11.
\end{array}
$$

Kubische Nichtreste sind demnach noch die Zahlen

$$+3, +5, -6, +7, -9, -10, +12, -13, -14, -15, -17, +18, +19, +20.$$

Hiervon sind die 7ten Potenzreste zu bilden. Zur Bestimmung der Zahlen, welche zum Exponenten 7 gehören, können folgende beiden Cyklen von je 3 Kongruenzen dienen:

$$
\begin{array}{lll|lll}
(-2)^2 \equiv & 4 \bmod 43 & \text{und} & (-8)^2 \equiv & 21 \bmod 43 \\
4^2 \equiv & 16 & & 21^2 \equiv & 11 \\
16^2 \equiv & -2 & & 11^2 \equiv & -8;
\end{array}
$$

wobei

$$1 + 4 + 16 - 2 + 21 + 11 - 8 \equiv 0 \bmod 43.$$

Hieraus folgt, dafs

$$(-2)^7 \equiv 4^7 \equiv (-8)^7 \equiv 11^7 \equiv 16^7 \equiv 21^7 \equiv 1 \bmod 43.$$

Somit wird:

$3^7 \equiv (-6)^7 \equiv 12^7 \equiv 19^7 \equiv (-10)^7 \equiv 5^7 \equiv 20^7 \equiv -6 \bmod$
$7^7 \equiv (-14)^7 \equiv (-15)^7 \equiv (-13)^7 \equiv (-9)^7 \equiv (-17)^7 \equiv 18^7 \equiv 7.$

Nichtreste sind demnach

3, 5, — 9, — 10, 12, — 13, — 14, — 15, — 17, 18, 19, 20.

und diese 12 Zahlen resp. ihre Ergänzungen zu 43, also

3, 5, 34, 33, 12, 30, 29, 28, 26, 18, 19, 20

sind die gesuchten primitiven Wurzeln.

In der That ist z. B.

$1 \equiv$	$1 \equiv -3^{21} \bmod 43$	$3^{11} \equiv -13 \equiv -3^{32} \bmod 43$	
$3 \equiv$	$3 \equiv -3^{22}$	$3^{12} \equiv 4 \equiv -3^{33}$	
$3^2 \equiv$	$9 \equiv -3^{23}$	$3^{13} \equiv 12 \equiv -3^{34}$	
$3^3 \equiv$	$-16 \equiv -3^{24}$	$3^{14} \equiv -7 \equiv -3^{35}$	
$3^4 \equiv$	$-5 \equiv -3^{25}$	$3^{15} \equiv -21 \equiv -3^{36}$	
$3^5 \equiv$	$-15 \equiv -3^{26}$	$3^{16} \equiv -20 \equiv -3^{37}$	
$3^6 \equiv$	$-2 \equiv -3^{27}$	$3^{17} \equiv -17 \equiv -3^{38}$	
$3^7 \equiv$	$-6 \equiv -3^{28}$	$3^{18} \equiv -8 \equiv -3^{39}$	
$3^8 \equiv$	$-18 \equiv -3^{29}$	$3^{19} \equiv 19 \equiv -3^{40}$	
$3^9 \equiv$	$-11 \equiv -3^{30}$	$3^{20} \equiv 14 \equiv -3^{41}.$	
$3^{10} \equiv$	$10 \equiv -3^{31}$		

2. Beispiel:

$$p = 61; \quad p - 1 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5.$$

Als quadratische Reste treten der Reihe nach auf:

1, 4, 9, 16, 25, — 25, — 12, 3, 20, — 22, — 1, 22, — 14, 13, — 12, — 16, 19, — 5, — 27, 14, — 4, — 20, 27, 15, 5, — 3, — — 13, — 15.

Quadratische Nichtreste sind also:

$\pm 2, \pm 6, \pm 7, \pm 8, \pm 10, \pm 11, \pm 17, \pm 18, \pm 21, \pm$
$\pm 24, \pm 26, \pm 28, \pm 29, \pm 30.$

Da nun

$$13^2 \equiv -14 \bmod 61$$
$$(-14)^2 \equiv 13,$$

so folgt:

$$13^3 \equiv (-14)^3 \equiv 1.$$

Also

$$(\pm 2)^3 \equiv (\pm 26)^3 \equiv (\mp 28)^3 \equiv \pm 8 \bmod 61$$
$$(\pm 6)^3 \equiv (\pm 17)^3 \equiv (\mp 23)^3 \equiv \pm 28$$

$$(\pm\ 7)^3 \equiv (\pm\ 24)^3 \equiv (\pm\ 30)^3 \equiv \pm\ 23 \bmod 61$$
$$(\pm\ 8)^3 \equiv (\pm\ 10)^3 \equiv (\mp\ 18)^3 \equiv \pm\ 24$$
$$(\pm\ 11)^3 \equiv (\pm\ 21)^3 \equiv (\pm\ 29)^3 \equiv \mp\ 11.$$

Sowohl quadratische als kubische Nichtreste sind folglich die Zahlen:

$\pm\ 2,\ \pm\ 6,\ \pm\ 7,\ \pm\ 10,\ \pm\ 17,\ \pm\ 18,\ \pm\ 21,\ \pm\ 26,\ \pm\ 29,\ \pm\ 30.$

Zur Bestimmung derjenigen Zahlen, welche zum Exponenten 5 gehören, dient der Cyklus:

$$(-\ 3)^2 \equiv\ 9 \bmod 61 \qquad 20^2 \equiv -\ 27 \bmod 61$$
$$9^2 \equiv 20 \qquad (-\ 27)^2 \equiv -\ 3,$$

welcher der Bedingung genügt:

$$1 + 9 + 20 - 27 - 3 \equiv 0 \bmod 61.$$

Es ergiebt sich daraus, dafs

$$(-\ 3)^5 \equiv 9^5 \equiv 20^5 \equiv (-\ 27)^5 \equiv 1.$$

Folglich:

$$(\pm\ 2)^5 \equiv (\mp\ 6)^5 \equiv (\pm\ 18)^5 \equiv (\mp\ 7)^5 \equiv (\mp\ 21)^5 \equiv \pm\ 29$$
$$(\pm\ 10)^5 \equiv (\mp\ 30)^5 \equiv (\pm\ 29)^5 \equiv (\pm\ 26)^5 \equiv (\pm\ 17)^5 \equiv \pm\ 21.$$

Die gesuchten 16 primitiven Wurzeln sind also:

$$\pm\ 2,\ \pm\ 6,\ \pm\ 7,\ \pm\ 10,\ \pm\ 17,\ \pm\ 18,\ \pm\ 26,\ \pm\ 30.$$

In der That wird z. B.

1	$\equiv 1 \equiv -\ 2^{30} \bmod 61$	2^{15}	$\equiv 11 \equiv -\ 2^{45} \bmod 61$
2	$\equiv 2 \equiv -\ 2^{31}$	2^{16}	$\equiv 22 \equiv -\ 2^{46}$
2^2	$\equiv 4 \equiv -\ 2^{32}$	2^{17}	$\equiv -\ 17 \equiv -\ 2^{47}$
2^3	$\equiv 8 \equiv -\ 2^{33}$	2^{18}	$\equiv 27 \equiv -\ 2^{48}$
2^4	$\equiv 16 \equiv -\ 2^{34}$	2^{19}	$\equiv -\ 7 \equiv -\ 2^{49}$
2^5	$\equiv -\ 29 \equiv -\ 2^{35}$	2^{20}	$\equiv -\ 14 \equiv -\ 2^{50}$
2^6	$\equiv 3 \equiv -\ 2^{36}$	2^{21}	$\equiv -\ 28 \equiv -\ 2^{51}$
2^7	$\equiv 6 \equiv -\ 2^{37}$	2^{22}	$\equiv 5 \equiv -\ 2^{52}$
2^8	$\equiv 12 \equiv -\ 2^{38}$	2^{23}	$\equiv 10 \equiv -\ 2^{53}$
2^9	$\equiv 24 \equiv -\ 2^{39}$	2^{24}	$\equiv 20 \equiv -\ 2^{54}$
2^{10}	$\equiv -\ 13 \equiv -\ 2^{40}$	2^{25}	$\equiv -\ 21 \equiv -\ 2^{55}$
2^{11}	$\equiv -\ 26 \equiv -\ 2^{41}$	2^{26}	$\equiv 19 \equiv -\ 2^{56}$
2^{12}	$\equiv 9 \equiv -\ 2^{42}$	2^{27}	$\equiv -\ 23 \equiv -\ 2^{57}$
2^{13}	$\equiv 18 \equiv -\ 2^{43}$	2^{28}	$\equiv 15 \equiv -\ 2^{58}$
2^{14}	$\equiv -\ 25 \equiv -\ 2^{44}$	2^{29}	$\equiv 30 \equiv -\ 2^{59}$

Mitteilungen

der

Mathematischen Gesellschaft

in Hamburg.

№ 9. Ausgegeben im März 1889.

Bericht über die Versammlungen im 199. Vereinsjahr 1888/89.

(Erstattet vom Jahrverwalter Dr. Edm. Hoppe.)

Das 199. Vereinsjahr hatte neben den gewöhnlichen Arbeiten eine Reihe von Vorbereitungen in Angriff zu nehmen für eine würdige Begehung des 200jährigen Jahresfestes, welches Mitte Februar 1890 zu feiern ist. Es ist zu dem Zweck bereits im April eine Kommission gewählt, die eine Reihe von Sitzungen abgehalten und die Arbeiten für die Festschrift thätig gefördert hat. Es ist jedoch hier nicht der Ort, über diese Arbeiten zu berichten, da die Kommission auch für das nächste Gesellschaftsjahr unverändert die weitere Vorbereitung führen wird. Jedoch sind mit Rücksicht auf die im nächsten Jahre erscheinenden, umfassenden Publikationen in diesem Jahre die wissenschaftlichen Arbeiten in den Mitteilungen etwas beschränkt worden, und aus demselben Grunde wird mit dem gegenwärtig zur Ausgabe gelangenden Heft 9 der erste Band der Mitteilungen unserer Gesellschaft abgeschlossen. Daher geben wir diesem Heft einen besonderen Bandtitel und eine Inhaltsangabe für den ganzen Band bei.

Hauptversammlung vom 13. Februar 1888.

Der Jahrverwalter Herr Kapitän Koldewey erstattet den Jahresbericht über das 198. Gesellschaftsjahr. Nach demselben zählt die Gesellschaft 4 Ehrenmitglieder, 46 hiesige ordentliche und 12 auswärtige ordentliche Mitglieder. Einen grofsen Verlust hat die Gesellschaft durch den Tod ihres Ehrenmitgliedes Sr. Magnificenz Bürgermeister Dr. Kirchenpauer erlitten. Die Gesellschaft beklagt in ihm mit der gesamten Vaterstadt tief den Verlust eines sich für alle

wissenschaftlichen Bestrebungen warm interessierenden Mannes, der auch unserer Gesellschaft seine lebhaften Sympathien wiederholt zu erkennen gegeben und ihre Bestrebungen kräftig gefördert hat. — Zum Adjunkten für das Jahr 1888/89 wird Herr Bauinspektor J. F. Bubendey gewählt. — Aus der Abrechnung ergiebt sich eine

Einnahme von ℳ. 537,82, eine Ausgabe von ℳ. 451,80
und ein Kassenbestand von ℳ. 1178,35.

An die Hauptversammlung schlofs sich wie bisher ein in gehobenster Stimmung verlaufendes Festessen, an welchem sich auch 8 Gäste beteiligten.

Sitzung vom 10. März.

Der Jahrverwalter Dr. Hoppe erklärt, dafs es nicht mehr möglich gewesen sei, die Sitzung zu verlegen und drückt den Schmerz der Versammelten über das am Tage zuvor erfolgte Ableben Sr. Majestät des Kaisers Wilhelm I. aus.

Es werden die Herren Ingenieur Bernhard Schäffer und Dr. M. Schäffer in die Gesellschaft aufgenommen.

Herr Denker hält einen Vortrag „Über Gangveränderung der Chronometer auf See", worin derselbe begründet, dafs eine Prüfung des Chronometers sich nicht nur auf die Beobachtung des Ganges während einer verhältnismäfsig kurzen Zeit zu beziehen habe, sondern dafs eine Prüfung des Werkes notwendig sei. Es sei wohl möglich, ein fehlerhaft gebautes Werk durch Hülfskompensationen zu einem vorzüglichen Gang auf kurze Zeit zu bringen, aber dieses Werk werde nach verhältnismäfsig kurzer Zeit überhaupt nicht mehr brauchbar sein, sobald nämlich wegen der mangelhaften Konstruktion Fehler nach einer bestimmten Richtung vergröfsert wären. Darum sei ein dauernd gut gehendes Chronometer besser als ein auf kurze Zeit vorzüglich gehendes, und ein gut gebautes Chronometer bedürfe keiner Hülfskompensation, welche sich nur als eine Ausgleichung einer Summe von Fehlern, die bei der Konstruktion gemacht seien, erweise.

Sitzung vom 14. April.

Der Vorsitzende teilt mit, dafs das Mitglied Herr Baumeister Koldewey, wegen seiner zeitweiligen Übersiedelung nach Berlin, in die Zahl der auswärtigen Mitglieder übergetreten sei. Wegen mehrerer Versehen in der Versendung der Mitteilungen wird auf Antrag des Vorsitzenden beschlossen, dafs eine Versendungsliste geführt werden solle, von der Streichungen nur auf Beschlufs der Gesellschaft statt-

finden können. — Ferner wird beschlossen, kurze Mitteilungen über die Sitzungen den hiesigen Zeitungen zur Verfügung zu stellen. — Es wird eine Festkommission zur Vorbereitung des 200jährigen Jubelfestes mit dem Recht der Kooptation gewählt.

Herr Professor Schubert macht eine Mitteilung über die Anzahl der Möglichkeiten, eine gewisse Summe in Reichswährung zu zahlen, und über die Methode, diese Anzahl zu bestimmen. Von den auf diese Fragen bezüglichen Formeln seien die folgenden hier erwähnt, in denen m_p die Kombinationszahl $\frac{m(m-1)\cdots(m-p+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots p}$ bedeutet:

1) $10m$ Pfennige lassen sich in Ein-, Zwei-, Fünf- und Zehn-Pfennigstücken auf soviel Arten bezahlen, wie $1+10m_1+19m_2+10m_3$ angiebt;

2) $100m$ Pfennige lassen sich in Ein-, Zwei-, Fünf-, Zehn-, Zwanzig- und Fünfzig-Pfennigstücken auf soviel Arten bezahlen, wie

$$1+4561m_1+59\,995m_2+199\,450m_3+244\,000m_4+100\,000m_5$$

angiebt;

3) $100m$ Pfennige lassen sich in Ein-, Zwei-, Fünf-, Zehn-, Zwanzig-, Fünfzig- und Hundert-Pfennigstücken auf soviel Arten bezahlen, wie

$$1+4562m_1+64\,556m_2+259\,445m_3+443\,450m_4+344\,000m_5+100\,000m_6$$

angiebt.

Demnach lassen sich in Geldstücken bis zu höchstens einer Mark:

1 Mark auf nur 4563 Arten,

20 Mark dagegen schon auf 11 666 015 431 Arten

bezahlen.

Herr Professor Kiefsling hält einen Vortrag „Über die geometrische Entwicklung der Dämmerungserscheinungen", dessen Inhalt in der gröfseren Publikation des Vortragenden „Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen zur Erklärung der nach dem Krakatauausbruche beobachteten atmosphärischen Störung" bereits veröffentlicht ist.

Sitzung vom 12. Mai.

Auf Antrag der kaiserl. Leopold. Karol. Deutschen Akademie beschliefst die Gesellschaft, mit derselben in Schriftenaustausch zu treten. Der Jahrverwalter unterbreitet eine Reihe von Beschlüssen der Festkommission der Genehmigung der Gesellschaft. Danach wird zum 200jährigen Jahresfest eine umfangreiche Festschrift in drei Teilen erscheinen, deren erster die Geschichte der Gesellschaft, deren zweiter

wissenschaftliche Abhandlungen, deren dritter einen Katalog aller Hamburgischen Bibliotheken vorhandenen mathematischen und pl kalischen Publikationen enthalten soll.

Herr Dr. F. Bohnert wird als ordentliches Mitglied der Ge schaft aufgenommen.

Herr Professor Schubert teilt einen Brief aus dem Briefwe zwischen Leibnitz und Placcius vom 8. September 1690 mit welchem der Gründung der mathematischen Gesellschaft Erwähn geschieht, und die Richtung bezeichnet wird, in welcher die Ge schaft mit Aussicht auf Erfolg wirken könne.

Herr Dr. Bock hält einen Vortrag „Über das Prinzip der tuellen Geschwindigkeiten". Sämtliche Gesetze der Mechanik beru auf 4 Axiomen: 1) Zusammensetzung von Kräften, Geschwindigk und Beschleunigungen nach dem Parallelogramm. 2) Eine Kraft s recht zur Unterlage eines Punktes wirkend, erteilt diesem keine wegung. 3) Zwei in der Verlängerung der starren Verbindungs zweier Punkte nach entgegengesetzter Richtung wirkende gleich g Kräfte haben die Gesamtwirkung 0. 4) Die Kraft ist gleich der M multipliziert mit der Beschleunigung. Mit diesen vier Sätzen ist von Guido Ubaldi am Hebel zuerst erkannte Prinzip der virtu Geschwindigkeit im Einklang. Es wird angewendet auf den dafs zwischen n durch ihre Koordinaten gegebenen Punkten $3n$ Bedingungsgleichungen bestehen, und gezeigt, wie sich alle an möglichen Fälle auf diesen zurückführen lassen, und wie d'Alembert'schen und Lagrange'schen Bewegungsgleichungen dem Prinzip hergeleitet werden können.

Sitzung vom 9. Juni.

Der Jahrverwalter begrüfst Herrn Dr. Schrader, der nach jähriger Abwesenheit in Neuguinea wieder als ordentliches Mit in die Gesellschaft eingetreten ist.

Herr Dr. Repsold wird als ordentliches hiesiges Mitglied Gesellschaft aufgenommen.

Herr Dr. Oeltjen behandelt in einem Vortrage die Differe gleichungen für das Gleichgewicht der isotropen, elastischen P ohne die früher übliche Beschränkung, dafs die Platte unendlich sei. Die Lösung des Problems hat der Vortragende in seiner Inaug dissertation bekannt gemacht.

Sitzung vom 15. September.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs sein von Einem Hohen Senate befürwortetes Gesuch an das Auswärtige Amt in Berlin, nach den bald nach der Gründung der Gesellschaft vom dermaligen Kaiser der Gesellschaft verliehenen Privilegien, deren Urkunden beim grofsen Brande von Hamburg mit ein Raub der Flammen geworden sind, in Wien Nachforschungen anzustellen, mit gröfstem Entgegenkommen und gewünschtem Erfolge vom Auswärtigen Amt erledigt ist. Der Vorsitzende legt die ihm von der königl. Preufs. Gesandtschaft dahier unter dem 11. Juli überreichten vier Abschriften der Privilegia impressoria aus den Jahren 1699, 1704, 1718, 1729 und 1738 vor. Die Gesellschaft spricht ihren lebhaften Dank aus, welchen der Vorsitzende der königl. Preufs. Gesandtschaft zu übermitteln verspricht.

Ebenfalls teilt der Vorsitzende mit, dafs er im Namen der Festkommission an Einen Hohen Senat ein Gesuch gerichtet habe, zur Herstellung des Katalogs aus Staatsmitteln eine Beihülfe in Höhe von 3000 Mark gewähren zu wollen. Unter Zustimmung des Bürgerausschusses hat der Senat diese Bitte gütigst gewährt, und wird der Vorsitzende beauftragt, Herrn Senator Stammann, welcher über diese Angelegenheit Hohem Senate referiert hat, den wärmsten Dank der Gesellschaft auszudrücken.

Es wird auf Antrag des Vorsitzenden beschlossen, dem § 10 der Statuten folgenden Zusatz zu geben: „Sollte ein Mitglied wegen ehrenrühriger Handlungen ausgeschlossen werden müssen, so geschieht dies auf Antrag des Vorstandes unter Zustimmung von $^2/_3$ der einheimischen Mitglieder."

Herr Dr. Hoppe hält einen Vortrag über die Differentialgleichungen für die Bewegungserscheinungen in der Atmosphäre, worin zunächst die Unzulänglichkeit der Bestrebungen von Ferrel einerseits und von Guldberg und Mohn andererseits, die Bewegung der Luft mathematisch zu behandeln, dargelegt wird. Die für die Bewegung der Gase gültigen Differentialgleichungen werden in ihrer allgemeinsten Form aufgestellt. In dieser Allgemeinheit sind die Gleichungen nicht integrierbar, darum werden eine Reihe von speziellen Annahmen gemacht, wodurch die Gleichungen die Form annehmen, in welcher sie von Oberbeck in seiner bekannten Arbeit in den Sitzungsberichten der Berliner Akademie vom 15. März 1888 benutzt worden sind. Diese Arbeit wird diskutiert und auf die Bedeutung der dadurch erhaltenen Resultate, speziell auf den Zusammenhang mit den von Werner von Siemens dargelegten Anschauungen, hingewiesen.

Sitzung vom 13. Oktober.

Der Vorsitzende Dr. Hoppe teilt mit, dafs durch schriftliche Umfrage bei den hiesigen ordentlichen Mitgliedern der Gesellschaft einstimmig beschlossen sei, Herrn Senator Dr. Stammann wegen seiner grofsen Verdienste um die Gesellschaft zum Ehrenmitgliede zu ernennen, und dafs die beiden Jahrverwalter Herrn Senator Dr. Stammann das übliche Diplom persönlich zu überreichen die Ehre gehabt hätten. Derselbe habe die Ehrenmitgliedschaft mit dem Ausdruck des besten Dankes angenommen und den Vorsitzenden beauftragt diesen Dank der Gesellschaft auszudrücken.

Der Antrag des Vorstandes auf Streichung des Herrn A. v. Hartung aus der Liste der auswärtigen Mitglieder auf Grund des § 10 der Statuten ist einstimmig genehmigt.

Herr Professor Schubert bespricht das von Dr. G. Loria erschienene Buch: Die hauptsächlichsten Theorien der Geometrie etc. übersetzt von F. Schütte.

Herr Dr. Hoppe lenkt die Aufmerksamkeit der Gesellschaft auf den Zusammenhang der elektromagnetischen Lichttheorie mit Experimenten, welche im Berliner physikalischen Institute von Herrn Wien ausgeführt sind, und welche einen Widerspruch zwischen der Maxwell'schen Theorie und den Beobachtungen ergeben.

Herr Dr. Bohnert hält einen Vortrag über „die Lehre von den Minimalflächen in ihrer Beziehung zur Funktionentheorie", in welchem die neueren Arbeiten auf diesem Gebiete, besonders die von Weierstrafs und Schwartz in Bezug auf Methode und Resultate klargelegt werden. Der Vortragende erklärt sich bereit, diese Methode in der folgenden Sitzung bei einem speziellen Beispiel anzuwenden.

Sitzung vom 10. November.

Der Jahrverwalter verliest ein Schreiben des naturwissenschaftlichen Vereins, worin die Mitglieder der Gesellschaft zur Teilnahme an dem Stiftungsfest des Vereins aufgefordert werden.

Herr Professor Kiefsling berichtet über die Publikation der Krakatau-Kommission, welche seiner Zeit von der Royal Society eingesetzt worden war, und geht besonders auf den physikalischen Teil der Arbeit ein.

Herr Dr. Bohnert behandelt in einem Vortrage die Aufgabe: „Es wird ein einfach zusammenhängendes, ganz im Endlichen liegendes, von Punktsingularitäten freies Minimalflächenstück gesucht, welches zwischen zwei zu einander parallelen Ebenen liegt, dieselben recht-

winklig trifft und längs zweier zu einander parallelen, gegen die Ebenen unter Winkeln von 45° geneigten Geraden endigt.“ Der Inhalt des durch Demonstration an Modellen unterstützten Vortrages ist in der Inaugural-Dissertation des Vortragenden bereits der Öffentlichkeit übergeben.

Sitzung vom 8. Dezember.

Der Jahrverwalter teilt mit, dafs seine Anfragen, ob die Besitzer gröfserer Privatbibliotheken gewillt seien, ihre Bücher zu verleihen, und dieselben in den Katalog aufgenommen zu sehen wünschten, unbeantwortet geblieben seien, darum werden nur die öffentlichen Bibliotheken bearbeitet. Eine Aufforderung des Vereins für Sanitätswachen, seine Zwecke zu unterstützen, wird zur Kenntnis der Gesellschaft gebracht. Herr Dr. Busche wird als ordentliches hiesiges Mitglied der Gesellschaft aufgenommen.

Herr W. Lazarus hält einen Vortrag „über einige mathematische Aufgaben der Lebensversicherungstechnik“. Die auf dem Gebiete der Lebensversicherung vorkommenden Rechnungen haben zur Grundlage 1) den Zinsfufs, 2) die Mortalitätstafeln und gipfeln in der Leibrentenberechnung, auf welche fast alle Aufgaben zurückzuführen sind. Da die gewöhnliche Methode der Berechnung für jede einzelne Aufgabe die ganze mühsame Berechnung von neuem erfordert, versuchte man schon früher die Angaben der Mortalitätstafeln durch eine mathematische Betrachtung zu ersetzen, bei welcher die Anzahl der Lebenden als Funktion des Alters erscheint. Nach kurzer Charakterisierung der Arbeiten Makehams und der von jenem angenommenen Funktion, legte der Vortragende seine eignen Arbeiten auf diesem Gebiete vor. Er entwickelt, welche allgemeinen Bedingungen die Funktion erfüllen müfse, dafs sie z. B. schneller abnehmen müsse als eine geometrische Progression, und wie man diese Bedingungen analytisch ausdrücken könne. Eine geometrische Darstellung des Verlaufs der Funktion und deren erster Ableitung gab eine Anschauung von der Annäherung der Funktionswerte an die genau berechneten. Es zeigte sich, dafs auf diese Weise annäherungsweise die richtigen Zahlenwerte für jedes Alter erhalten werden. Die noch nicht publizierten Resultate der Untersuchung werden demnächst veröffentlicht werden.

Sitzung vom 12. Januar 1889.

Das Jahresfest soll wie bisher auch in diesem Jahre am Fastnachtsmontage gefeiert werden. Die Vorschläge des Vorsitzenden über Heft 9 der Mitteilungen finden keinen Widerspruch.

Herr Professor Kiefsling teilt eine elementare Ableitung der adiabatischen Umformung mit, d. h. der Überführung einer Luftmenge in andere Druck- und Volumenverhältnisse, ohne dafs Wärme von aufsen zugeführt oder nach aufsen abgegeben wird, wie das z. B. beim pneumatischen Feuerzeug und der Clement-Desormes'schen Bestimmung des Verhältnisses der spez. Wärme der Luft bei konstantem Volumen und konstantem Druck der Fall ist. Die von F. Neumann gelegentlich im physikalischen Seminar zu Königsberg mitgeteilte Entwicklung beruht auf der ununterbrochenen Aufeinanderfolge unendlich kleiner Veränderungen des Volumens und Druckes, so dafs die in jedem einzelnen Schritt durch Druckzunahme ergänzte Wärme durch die folgende Volumenveränderung wieder aufgehoben wird. Der ganzen elementaren Rechnung liegt dasselbe Verfahren zu Grunde, durch welches Voss in der Zeitschrift für physikalischen Unterricht Bd. I S. 155 die adiabatische Gleichung abgeleitet hat.

Herr Dr. Köpke fesselt die Aufmerksamkeit der Gesellschaft durch seine Auseinandersetzungen über empirische und idealisierende Raumauffassung. Die Vorwürfe mehrerer Philosophen, besonders des Stuart Mill, dafs die Geometrie wegen der Unanschaulichkeit von Punkt, Linie, Fläche in ihrer euklidischen Fassung voll inneren Widerspruchs sei, hat die Forderung gezeitigt, man solle nur anschauliche Körper behandeln. Nachdem schon früher darauf aufmerksam gemacht worden war, dafs eine empirische Kurve nicht Bild einer Funktion sein könne, hat F. Klein diese Frage näher untersucht und einen Funktionsbegriff definiert, dessen Darstellung nicht eine Linie, sondern einen Funktionsstreifen ergiebt, ausgedrückt durch $y = f(x) \pm \varepsilon$, wo $\varepsilon <$ als eine gegebene kleine Gröfse ist. Dieser Funktionsstreifen hat einen Differentialquotienten, der aber nicht bestimmt ist. Abgesehen davon, dafs der Funktionsstreifen eigentlich als körperliches Gebilde anzuschauen ist, ist auch sonst die Klein'sche Darstellung nicht von Widersprüchen frei, so ist seine Definition der Funktion enger als die von Klein selbst als Funktionen anerkannten Ausdrücke verlangen, und es ist daher seine Arbeit nicht geeignet, den Glauben an die euklidische Geometrie zu erschüttern. Nur soviel folgt aus Kleins Arbeit, dafs willkürliche Funktionen unberechtigt sind. — Noch weiter als Klein geht Pasch, welcher den Satz aufstellt: die Geometrie ist Naturwissenschaft, daraus resultiert ihre Methode und ihre Axiome. Der Vortragende zeigt, wie wenig, selbst wenn man von den inneren Widersprüchen absehe, bei einer derartigen strengen Unterscheidung der empirischen und idealisierenden Methode herauskommt. Die Lehrsätze der Geometrie bleiben ihrem Wesen nach durchaus dieselben

wenn man sich nur vergegenwärtigt, dafs die idealen Gebilde als Grenzwerte der empirischen aufzufassen sind, und daher die Sätze nicht mit der Schärfe dargestellt werden können, wie sie ausgesprochen werden. —

Eingegangene Schriften.

Die Gesellschaft empfing im Austausch mit den Schriften herausgebenden gelehrten Gesellschaften respekt. mit den Herausgebern die im Laufe des Jahres erschienenen Hefte von:

1) Atti della Reale Academia dei Lincei zu Rom; 2) Bulletin de la Société mathématique de France; 3) Jornal de Sciencias math. e astronom. von Dr. Teixeira in Coimbra; 4) American Journal of Mathematics (John Hopkins Univer. Baltimore); 5) Leopoldina von Heft XX an, sowie die Abhandlungen von Olbricht, Reichardt, Curtze, Schlegel, Moser, Schur, Elsas, Küstner, Weinck, Engler, Prowe, welche von der kaiserl. Leop. Carol. Deutsch. Akademie herausgegeben sind; 6) Rendiconti della Real. Academ. della Scienze Fisiche et Mathem. di Napoli von Vol. II. an; 7) Nieuw Archief voor Wiskunde und Wiskundige Opgaven T. III. von der Wisk. Genootschap in Amsterdam.

Ferner haben folgende Herren und Institute unserer Gesellschaft eigene Schriften zugehen lassen: Herr F. C. Lukas, Professor Hurwitz, H. Hübbe, Professor Schubert, Dr. Lemoine, Dr. Bohnert, Dr. Busche, der Mathematische Verein in Göttingen.

Die Gesellschaft spricht den Übersendern ihren besonderen Dank auch an dieser Stelle aus.

Zur Theorie der Elasticität isotroper Rotationskörper.

(Von Dr. P. Jaerisch.)

In meiner Arbeit „Allgemeine Integration der Elasticitätsgleichungen für die Schwingungen und das Gleichgewicht isotroper Rotationskörper“[1]) habe ich gezeigt, dafs die longitudinalen Teile der Schwingungskomponenten eindeutig sind, und dafs das System simultaner partieller Differentialgleichungen, welches die transversalen Teile bestimmt, sich durch Einführung anderer Koordinaten in ein System partieller Differentialgleichungen transformieren läfst, dessen Integration auf die Integration der Gleichung

$$\Delta^2 F + m^2 F = 0$$

1) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. CIV, Heft 3, 1889.

zurückgeführt werden kann, die in ebenen Koordinaten lautet:

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F = 0.$$

Es läfst sich nun, wie ich in der Anmerkung S. 192 bemerke und im folgenden zeige, das durch Transformation erhaltene System partieller Differentialgleichungen noch auf einem anderen Wege auf die Lösung der genannten Gleichung zurückführen. Dieser zweite Weg liefert zwar keine neuen Werte für die Schwingungskomponenten, aber doch zwei Darstellungen derselben, die für gewisse Körper eine einfachere Transformation gestatten dürften, und gerade der Umstand, dafs auf verschiedenen Wegen die gleichen Wertsysteme erhalten werden, beweist ihre Richtigkeit und Notwendigkeit.

In den §§ 2 und 3 wende ich die erhaltenen Darstellungen der Schwingungskomponenten auf die Kugel und den Kreiscylinder an. Dabei ergeben sich für die Kugel einmal diejenigen Ausdrücke für die Schwingungskomponenten, welche ich in meiner Arbeit „Über die elastischen Schwingungen einer isotropen Kugel“[1]) erhalten habe, und aufserdem zwei neue Integrale der Differentialgleichungen für die transversalen Komponenten, welche bei Anwendung der gleichen Methode zur Lösung des spezielleren Systems partieller Differentialgleichungen nicht gewonnen wurden und nicht gewonnen werden konnten, weil die Differentialgleichungen durch Einführung der spezielleren Koordinaten an Übersichtlichkeit verlieren. Aber die Behandlung des spezielleren Problems führte mich erst zur Auffindung der auf das allgemeinere Problem anwendbaren Methode und liefs mich insbesondere schliefsen, dafs auch die Integration der Differentialgleichungen in allgemeinen Koordinaten eines Rotationskörpers zurückzuführen sein wird auf die Lösung der genannten Gleichung.

Die Resultate über die möglichen Schwingungszustände einer Kugel, welche ich in der eben angeführten Arbeit erhalten habe, erfahren infolge der zwei neuen Darstellungen für die transversalen Schwingungskomponenten, welche sich für die Kugel ergeben haben, nur insofern eine Änderung, als den drei Schwingungszuständen, in welche die Kugel, wie ich gezeigt habe, bei geeigneter Erregung versetzt werden kann, ein vierter zuzufügen ist. Es hatte sich ergeben: Durch Erregung in der Richtung des Radius wird die Kugel in rein longitudinale Schwingungen, durch Erregung in der Richtung der Tangente in rein transversale Schwingungen versetzt; jene erfolgen längs des Radius, diese senkrecht dazu. Hängen aber die Anfangs-

1) Journal für reine und angewandte Mathematik Bd. 88, pag. 131.

verrückungen von allen drei sphärischen Koordinaten ab, so werden stets gleichzeitige longitudinale und transversale Schwingungen erregt. Jedem dieser drei Schwingungszustände gehören besondere Schwingungszahlen zu.

Den vierten hinzutretenden Schwingungzustand kann man als denjenigen allgemeiner rein transversaler Schwingungen bezeichnen. Die Schwingungen erfolgen nicht senkrecht zum Radius wie die des zweiten Zustandes, sondern hängen von allen drei sphärischen Koordinaten ab. Sie entstehen, wie die Schwingungen des dritten Zustandes, sobald die Anfangsverrückungen Funktionen von allen drei Koordinaten sind; und je nachdem dieselben mit oder ohne Volumenänderung erfolgen, treten die Schwingungen des dritten oder vierten Zustandes ein.

Knotenflächen treten nur bei den ersten beiden Schwingungszuständen auf und zwar entweder nur konzentrische Kugelflächen oder bei Torsionsschwingungen auch Kreiskegelflächen mit gemeinsamer Achse und Spitze. Die Schwingungszahlen sind bei dem ersten, zweiten und vierten Zustande nur von einer Elasticitätskonstante, bei dem dritten Zustande von beiden Elasticitätskonstanten abhängig.

Da wir nun, um die drei Oberflächenbedingungen zu erfüllen, nur dreier unabhängiger Integralsysteme bedürfen, während wir, die longitudinalen Komponenten eingerechnet, über fünf Integralsysteme verfügen, so erhalten wir durch Kombination zu je dreien für jeden der beiden letzten Schwingungszustände mehrere Arten von möglichen Schwingungen, in welche die Kugelteilchen versetzt werden können. Zur Beantwortung der Frage aber, wie die Anfangsverrückungen beschaffen sein müssen, damit eine bestimmte Schwingungsart eines der beiden letzten Schwingungszustände eintritt, bedarf es noch einer eingehenderen Untersuchung.

Ähnliches, wie über die Schwingungszustände der Kugel, läfst sich über die Schwingungszustände sagen, in welche irgend ein Rotationskörper versetzt werden kann. In der anfangs genannten Arbeit habe ich als Beispiel die Torsionsschwingungen des Rotationsellipsoids behandelt.

Es werden die allgemeinen Formeln dann in die Koordinaten des Kreiscylinders transformiert, und damit die allgemeinen Integrale der Elasticitätsgleichungen in Kreiscylinderkoordinaten aufgestellt, was bisher für die Schwingungen nicht geschehen ist.[1]) Im ersten Teile

1) Für das Gleichgewicht sind die Elasticitätsgleichungen des isotropen Kreiscylinders allgemein integriert in meiner Arbeit in diesen Mitteilungen 1886, pag. 167.

meiner Dissertation (Breslau 1879) suche ich Integrale der Elasticitätsgleichungen für die transversalen Schwingungen und berücksichtige nur diejenigen Lösungen, welche in Beziehung auf x, die Entfernung eines variablen Querschnitts von dem durch den Nullpunkt gehenden, reell periodisch sind. Die unter dieser Voraussetzung möglichen reinen Transversalschwingungen des Kreiscylinders bestehen, wie ich gezeigt habe, nur in Torsionsschwingungen. Auf die allgemeineren Schwingungszustände des Kreiscylinders einzugehen, behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

§ 1.

Die transversalen Teile der Schwingungskomponenten eines elastischen isotropen Rotationskörpers lassen sich nach § 4 (10) der genannten Arbeit in einfacher Weise ausdrücken durch drei Funktionen u, v, w, für welche sich im § 6 (23) und (23a) folgende Darstellungen ergeben haben:

$$(1a)\qquad \begin{cases} u = \left(\frac{d\vartheta}{d\xi} - p\frac{dr}{d\eta} + q\frac{dr}{d\xi}\right)\Phi, \\ v = \left(\frac{d\vartheta}{d\eta} + p\frac{dr}{d\xi} + q\frac{dr}{d\eta}\right)\Phi, \\ w = \vartheta\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$(1b)\qquad \begin{cases} u = \left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\xi} + \frac{q}{r}\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v = \left(\frac{p}{r}\frac{dr}{d\eta} - \frac{q}{r}\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w = -r\left(\frac{dp}{dr} + \frac{dq}{dx}\right)\Phi. \end{cases}$$

Hier sind ϑ, p, q drei zu bestimmende Funktionen der Variablen ξ, η. ξ, η, φ sind die Parameter der drei orthogonalen Flächenscharen, welche dem Rotationskörper zugehören. Statt ξ und η werden x und r eingeführt durch die Gleichung

$$(2)\qquad x + ir = f(\xi + i\eta),$$

woraus bekanntlich folgt

$$(2a)\qquad \begin{cases} \frac{dx}{d\xi} = \frac{dr}{d\eta}, \\ \frac{dx}{d\eta} = -\frac{dr}{d\xi}. \end{cases}$$

Φ genügt der Gleichung

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2\Phi = 0,$$

ıe reelle Konstante bezeichnet. Setzt man

$$y = r\cos\varphi,\ z = r\sin\varphi,$$

t die Gleichung

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F = 0$$

:oordinaten x, r, φ die Form an

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr} + \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{r^2}\frac{dF}{d\varphi^2} + m^2F = 0,$$

urch Transformation in die Koordinaten ξ, η, φ übergeht in

$$\frac{1}{r}\frac{d}{d\xi}r\frac{dF}{d\xi} + \frac{1}{r}\frac{d}{d\eta}r\frac{dF}{d\eta} + \frac{1}{r^2h^2}\frac{d^2E}{d\varphi^2} + \frac{m^2}{h^2}F = 0,$$

aus folgender Identität

$$\frac{d}{d\xi}P\frac{dQ}{d\xi} + \frac{d}{d\eta}P\frac{dQ}{d\eta} = \frac{1}{h^2}\left(\frac{d}{dr}P\frac{dQ}{dr} + \frac{d}{dx}P\frac{dQ}{dx}\right)$$

welche man für zwei Funktionen P und Q aus (2) und (2a) wo gesetzt ist

$$\frac{1}{h^2} = \left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^2 = \left(\frac{dr}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dr}{d\eta}\right)^2.$$

Funktionen ϑ, p, q sind nach § 6 (21) und (22) meiner us folgendem Systeme partieller Differentialgleichungen zu en:

$$\begin{cases} \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)p + \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dp}{dr} + \frac{1}{r}\frac{d^2rq}{drdx} = m^2\frac{d\vartheta}{dx}, \\ \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)q + \frac{d^2p}{drdx} + \frac{d^2q}{dx^2} = -m^2\frac{d\vartheta}{dr}, \\ \frac{dp}{dx} - r\frac{d\frac{q}{r}}{dr} = -m^2\vartheta, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\vartheta}{dr} + \frac{d^2\vartheta}{dx^2} - \frac{\nu^2}{r^2}\vartheta = \frac{dp}{dx} - \frac{1}{r}\frac{drq}{dr}. \end{cases}$$

e dieser Gleichungen kann dazu dienen, um entweder ϑ oder p nieren. Das letztere soll hier geschehen. Dann nehmen die Gleichungen nach Differentiation der ersten nach x folgende ı:

$$(7)\quad \begin{cases} \left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\left(r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}-m^2\vartheta\right)+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}-m^2\vartheta\right) \\ \qquad\qquad +\frac{1}{r}\frac{d^3rq}{drdx^2}=m^2\frac{d^2\vartheta}{dx^2}, \\ \left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)q+\frac{d}{dr}r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}+\frac{d^2q}{dx^2}=0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\vartheta=-2\frac{q}{r}. \end{cases}$$

Aus der ersten und dritten Gleichung folgt durch Elimination von

$$\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}+\frac{1}{r}\frac{d^3rq}{dx^3}=-2m^2\frac{q}{r},$$

welche, weil

$$m^2r\frac{d\frac{q}{r}}{dr}+2m^2\frac{q}{r}=\frac{m^2}{r}\frac{drq}{dr}$$

ist, durch die zweite Gleichung (7) erfüllt wird. Somit dienen zweite und dritte Gleichung zur Bestimmung von q und ϑ. Setzt man

$$(8)\qquad q=rF,$$

so genügen F und ϑ den Gleichungen

$$(9)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr}+\frac{d^2F}{dx^2}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)F=0, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d\vartheta}{dr}+\frac{d^2\vartheta}{dx^2}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)\vartheta=-2F. \end{cases}$$

Die zweite Gleichung liefert

$$(10)\qquad \vartheta=\vartheta^1+F^1,$$

wo F^1 der ersten Gleichung (9) genügt, ϑ^1 aber dasjenige Integral der zweiten Gleichung ist, welches mit F zugleich verschwindet. Um das letztere aufzufinden, beachte man folgende zwei Identitäten für jede Funktion F, welche der ersten Gleichung (9) genügt:

$$(11)\quad \begin{cases} \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{d}{dr}r\frac{dF}{dr}+\frac{d^2}{dx^2}r\frac{dF}{dr}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)r\frac{dF}{dr}=-2\frac{d^2F}{dx^2}-2m^2F, \\ \frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dxF}{dr}+\frac{d^2xF}{dx^2}+\left(m^2-\frac{\nu^2}{r^2}\right)xF=2\frac{dF}{dx}.^1) \end{cases}$$

Diese beiden Identitäten liefern für ϑ^1 zwei von einander abhängige Bestimmungen, falls man beachtet, dafs, wenn eine Funktion

1) Obige Formeln sind Verallgemeinerungen der Formeln (27) für $b=$ und (10b) meiner Arbeit „Über das Gleichgewicht des elastischen Kreiscylinders“ Heft 6, pag. 167 dieser Mitteilungen.

der ersten Gleichung (9) genügt, derselben Gleichung auch durch $\frac{d^2f}{dx^2} + m^2 f$ und $\frac{df}{dx}$ genügt wird. Setzt man also in (9) einmal

(12a) $$F = \frac{df_1}{dx},$$

dann

(12b) $$F = \frac{d^2f_2}{dx^2} + m^2 f_2,$$

und läfst f_1 und f_2 Integrale der ersten Gleichung (9) sein, so ergeben sich für ϑ die Werte

erstens

(13a) $$\vartheta^1 = -xf_1,$$

zweitens

(13b) $$\vartheta^1 = r\frac{df_2}{dr}.$$

Da oben F und F^1 von einander unabhängig waren, so kann man einmal F, dann F^1 verschwinden lassen; beachtet man noch, dafs ϑ^1 mit F verschwindet, und ersetzt F und ϑ^1 einmal durch (12a) und (13a), dann durch (12b) und (13b), so erhält man folgende drei Wertsysteme q, ϑ, welche den Gleichungen (9) genügen, und welche durch untere Indices unterschieden werden mögen:

(14)
$$\begin{cases} q_1 = 0, & \vartheta_1 = F^1; \\ q_2 = r\frac{df_1}{dx}, & \vartheta_2 = -xf_1; \\ q_3 = r\frac{d^2f_2}{dx^2} + m^2 r f_2, & \vartheta_3 = r\frac{df_2}{dr}. \end{cases}$$

Die zugehörigen Werte für p liefert die dritte Gleichung (6):

$$\frac{dp}{dx} = r\frac{d\frac{q}{r}}{dr} - m^2\vartheta,$$

aus welcher folgt

(15) $$p = r\int \frac{d\frac{q}{r}}{dr}\,dx - m^2\int \vartheta\,dx + p_0,$$

wo p_0 eine Konstante in Beziehung auf x ist. Um diese zunächst zu bestimmen, hat man zu bedenken, dafs p_0 derjenige Wert ist, welchen p annimmt, wenn gleichzeitig q und ϑ verschwinden. Daher gewinnt man aus (6) für p_0 die Gleichung:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\,r\frac{dp_0}{dr} + \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right)p_0 = 0.$$

Wir sondern das Wertsystem:

(16) $$q = 0, \quad \vartheta = 0, \quad p = p_0$$

ab, und ersetzen, um in dem Ausdrucke für p unbestimmte Integrale zu vermeiden, die Werte q_2 und ϑ_2 in (14) durch die folgenden

$$q_2 = r\frac{d^2 f_1}{dx^2}, \quad \vartheta_2 = -\frac{dxf_1}{dx}.$$

Die Berechtigung dafür folgt aus der zweiten Identität (11) nach Differentiation nach x. Ebenso ersetzen wir F^1 in (14) durch $\frac{dF^1}{dx}$. So erhalten wir folgende Wertsysteme:

$$(17)\quad \begin{cases} q_1 = 0, & \vartheta_1 = \frac{dF^1}{dx}, & p_1 = -m^2 F^1; \\ q_2 = r\frac{d^2 f_1}{dx^2}, & \vartheta_2 = -\frac{dxf_1}{dx}, & p_2 = r\frac{d^2 f_1}{dr\,dx} + m^2 x f_1; \\ q_3 = r\frac{d^2 f_2}{dx^2} + m^2 r f_2, & \vartheta_3 = r\frac{df_2}{dr}, & p_3 = r\frac{d^2 f_2}{dr\,dx}. \end{cases}$$

Hier genügen F^1, f_1, f_2 der ersten Gleichung (9). F^1 kann auch von x unabhängig sein; daher ist das Wertsystem (16) in dem ersten Wertsysteme (17) enthalten.

Aus den Werten q_i, p_i, ϑ_i in (17), welche in (1a) und (16) einzutragen sind, ergeben sich folgende 6 Wertsysteme für u, v, w, welche wir durch untere Indices u_i, v_i, w_i unterscheiden. Entsprechend bezeichnen wir die zugehörigen Funktionen F^1, f_1, f_2, welche alle derselben Gleichung genügen, durch H_i. Wir erhalten, wenn wir noch $-m^2 H_2$ durch H_2 ersetzen:

$$(18a)\quad \begin{cases} u_1 = \left(\frac{d^2 H_1}{d\xi\,dx} + m^2 H_1 \frac{dr}{d\eta}\right)\Phi, \\ v_1 = \left(\frac{d^2 H_1}{d\eta\,dx} - m^2 H_1 \frac{dr}{d\xi}\right)\Phi, \\ w_1 = \frac{dH_1}{dx}\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$(18b)\quad \begin{cases} u_2 = \frac{H_2}{r}\frac{dr}{d\xi}\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v_2 = \frac{H_2}{r}\frac{dr}{d\eta}\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w_2 = -r\frac{dH_2}{dr}\Phi; \end{cases}$$

$$u_3 = \left(-\frac{d^2 x H_3}{d\xi\,dx} - r\frac{d^2 H_3}{dr\,dx}\frac{dr}{d\eta} + r\frac{d^2 H_3}{dx^2}\frac{dr}{d\xi} - m^2 x H_3 \frac{dr}{d\eta}\right)\Phi,$$

$$v_3 = \left(-\frac{d^2 x H_3}{d\eta\,dx} + r\frac{d^2 H_3}{dr\,dx}\frac{dr}{d\xi} + r\frac{d^2 H_3}{dx^2}\frac{dr}{d\eta} + m^2 x H_3 \frac{dr}{d\xi}\right)\Phi,$$

$$u_4 = \left(\frac{d^2H_4}{dr\,dx}\frac{dr}{d\xi} + \frac{d^2H_4}{dx^2}\frac{dr}{d\eta} + m^2\frac{x}{r}H_4\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},$$

$$v_4 = \left(\frac{d^2H_4}{dr\,dx}\frac{dr}{d\eta} - \frac{d^2H_4}{dx^2}\frac{dr}{d\xi} + m^2\frac{x}{r}H_4\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},$$

$$w_4 = \left\{-r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d^2H_4}{dr\,dx} + m^2xH_4\right) - r^2\frac{d^2H_4}{dx^2}\right\}\Phi;$$

$$u_5 = \left(\frac{d}{d\xi}r\frac{dH_5}{dr} - r\frac{d^2H_5}{dr\,dx}\frac{dr}{d\eta} + r\frac{d^2H_5}{dx^2}\frac{dr}{d\xi} + m^2rH_5\frac{dr}{d\xi}\right)\Phi,$$

$$v_5 = \left(\frac{d}{d\eta}r\frac{dH_5}{dr} + r\frac{d^2H_5}{dr\,dx}\frac{dr}{d\xi} + r\frac{d^2H_5}{dx^2}\frac{dr}{d\eta} + m^2rH_5\frac{dr}{d\eta}\right)\Phi,$$

$$w_5 = r\frac{dH_5}{dr}\frac{d\Phi}{d\varphi};$$

$$u_6 = \left(\frac{d^2H_6}{dr\,dx}\frac{dr}{d\xi} + \frac{d^2H_6}{dx^2}\frac{dr}{d\eta} + m^2H_6\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},$$

$$v_6 = \left(\frac{d^2H_6}{dr\,dx}\frac{dr}{d\eta} - \frac{d^2H_6}{dx^2}\frac{dr}{d\xi} - m^2H_6\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},$$

$$w_6 = \left\{-r\frac{d}{dr}r\frac{d^2H_6}{dr\,dx} - r^2\frac{d}{dx}\left(\frac{d^2H_6}{dx^2} + m^2H_6\right)\right\}\Phi.$$

Die letzten 4 Wertsysteme lassen sich einfacher gestalten, weil mit Rücksicht auf (2a) für jede Funktion H hat:

$$\begin{cases}\dfrac{dH}{dr}\dfrac{dr}{d\xi} + \dfrac{dH}{dx}\dfrac{dr}{d\eta} = \dfrac{dH}{d\xi},\\[2ex] \dfrac{dH}{dr}\dfrac{dr}{d\eta} - \dfrac{dH}{dx}\dfrac{dr}{d\xi} = \dfrac{dH}{d\eta}.\end{cases}$$

zt man hier H durch $r\dfrac{dH}{dr}$, so nehmen mit Anwendung der eln (19) zunächst u_5, v_5, w_5 folgende Form an:

$$u_5 = \left(\frac{d}{dr}r\frac{dH_5}{dr} + r\frac{d^2H_5}{dx^2} + m^2rH_5\right)\frac{dr}{d\xi}\Phi,$$

$$v_5 = \left(\frac{d}{dr}r\frac{dH_5}{dr} + r\frac{d^2H_5}{dx^2} + m^2rH_5\right)\frac{dr}{d\eta}\Phi,,$$

$$w_5 = r\frac{dH_5}{dr}\frac{d\Phi}{d\varphi};$$

mit Rücksicht auf die erste Gleichung (9), welcher H_5 genügt, ı die Werte für u_5 und v_5 über in

$$\frac{\nu^2}{r}H_5\frac{dr}{d\xi}\Phi \text{ und } \frac{\nu^2}{r}H_5\frac{dr}{d\eta}\Phi.$$

zt man noch H_5 durch $\frac{H_2}{\nu^2}$, Φ durch $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, so werden u_5, v_5, w_5 Rücksicht auf die Gleichung (3), welcher Φ genügt, mit u_2, v_2, w_2 isch.

Die Werte u_6, v_6, w_6 nehmen bei Anwendung derselben Gleigen die Form an:

$$u_6 = \left(\frac{d^2 H_6}{d\xi\, dx} + m^2 H_6 \frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},$$

$$v_6 = \left(\frac{d^2 H_6}{d\eta\, dx} - m^2 H_6 \frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi},$$

$$w_6 = -\nu^2 \frac{dH_6}{dx}\Phi,$$

und gehen, wenn H_6 durch $-\frac{H_2}{\nu^2}$, Φ durch $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ ersetzt wird, in u_1, v_1, w_1 über. Es bleiben die ersten 4 Wertsysteme übrig, und davon lassen sich die letzteren zwei durch (19) in folgender einfacherer Form schreiben, wenn noch $-H_3$ für H_3 gesetzt wird:

(20a)
$$\begin{cases} u_3 = \left(\frac{d^2 x H_3}{d\xi\, dx} + r\frac{d^2 H_3}{d\eta\, dx} + m^2 x H_3 \frac{dr}{d\eta}\right)\Phi, \\ v_3 = \left(\frac{d^2 x H_3}{d\eta\, dx} - r\frac{d^2 H_3}{d\xi\, dx} - m^2 x H_3 \frac{dr}{d\xi}\right)\Phi, \\ w_3 = \frac{dx H_3}{dx}\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

(20b)
$$\begin{cases} u_4 = \left(\frac{d^2 H_4}{d\xi\, dx} + m^2 \frac{x}{r} H_4 \frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v_4 = \left(\frac{d^2 H_4}{d\eta\, dx} + m^2 \frac{x}{r} H_4 \frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w_4 = \left((r^2 m^2 - \nu^2)\frac{dH_4}{dx} - m^2 x r \frac{dH_4}{dr}\right)\Phi. \end{cases}$$

Von den vier erhaltenen, voneinander unabhängigen Wertsysteme u, v, w in (18a), (18b), (20a) und (20b) stimmen die beiden erste mit denjenigen (25a) und (25b) meiner genannten Arbeit überei wenn oben H_1 durch $\frac{F_1}{m^2}$ ersetzt wird; um die letzten beiden Wer systeme (20a) und (20b) mit denjenigen jener Arbeit zu vergleiche lassen wir die noch fehlenden Wertsysteme (25c) und (25d) derselbe hier folgen; diese sind:

(21a)
$$\begin{cases} u' = \left\{\frac{1}{m^2}\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dx F'}{dx} + r\frac{dF'}{dr}\right) + xF'\frac{dr}{d\eta} + rF'\frac{dr}{d\xi}\right\}\Phi, \\ v' = \left\{\frac{1}{m^2}\frac{d}{d\eta}\left(\frac{dx F'}{dx} + r\frac{dF'}{dr}\right) - xF'\frac{dr}{d\xi} + rF'\frac{dr}{d\eta}\right\}\Phi, \\ w' = \frac{1}{m^2}\left(\frac{dx F'}{dx} + r\frac{dF'}{dr}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

(21b)
$$\begin{cases} u'' = \left(-\frac{x}{r}F''\frac{dr}{d\xi} + F''\frac{dr}{d\eta}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v'' = \left(-\frac{x}{r}F''\frac{dr}{d\eta} - F''\frac{dr}{d\xi}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w'' = \left(rx\frac{dF''}{dr} - r^2\frac{dF''}{dx}\right)\Phi. \end{cases}$$

In diesen Integralsystemen (21a) und (21b) genügen F' und F'' derselben Gleichung wie die Funktionen H_i, nämlich der ersten Gleichung (9). Mit Berücksichtigung dieser Gleichung sowie der Formeln (2a) und (19), nach denen die Ausdrücke

$$\frac{d}{d\xi} r \frac{dF'}{dr} \quad \text{und} \quad \frac{d}{d\eta} r \frac{dF'}{d\eta}$$

in (21a) zerlegt werden, läfst sich zeigen, wie nicht näher ausgeführt werden soll, dafs das Wertsystem (20a) durch Kombination von (21a) und (18b), sowie (20b) durch Kombination von (21b) und (18a) hervorgeht, falls einerseits in (21a) F' durch $m^2 H_3$, in (18b) H_2 durch H_3 und Φ durch $\frac{d\Phi}{d\varphi}$, anderseits in (21b) F'' durch $-m^2 H_4$, in (18a) H_2 durch H_4 und Φ durch $\frac{d\Phi}{d\varphi}$ ersetzt und beachtet wird, dafs Φ der Gleichung

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + \nu^2 \Phi = 0$$

genügt.

Es bleiben somit die Wertsysteme (18a), (18b), (21a), (21b) übrig, von denen die ersten oder letzten beiden durch (20a) und (20b) ersetzt werden können. Darin genügen die Funktionen H_1, H_2, F', F'' der Gleichung:

$$\frac{1}{r} \frac{d}{d\xi} r \frac{dF}{d\xi} + \frac{1}{r} \frac{d}{d\eta} r \frac{dF}{d\eta} + \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) \frac{F}{h^2} = 0, \tag{22}$$

und die Produkte $H\Phi$, $F\Phi$ der in der Einleitung erwähnten Gleichung

$$\Delta^2 F + m^2 F = 0.$$

§ 2.

Anwendung auf die Kugel.

Die Gleichung (2)

$$x + ir = f(\xi + i\eta)$$

liefert für die Kugel die Werte:

$$r = e^{\xi} \cos \eta,$$
$$x = -e^{\xi} \sin \eta;$$

und aus (5a) folgt

$$h = \frac{1}{e^{\xi}}.$$

Ferner werde

$$e^{\xi} = \varrho$$

gesetzt. Dann hat man zur Transformation der vorstehenden Wertsysteme folgende Formeln zu beachten:

$$\frac{dr}{d\varrho} = \cos\eta, \qquad \frac{dx}{d\varrho} = -\sin\eta,$$
$$\frac{dr}{d\eta} = -\varrho\sin\eta; \qquad \frac{dx}{d\eta} = -\varrho\cos\eta;$$
$$\frac{d\varrho}{dr} = \cos\eta, \qquad \frac{d\eta}{dr} = -\frac{\sin\eta}{\varrho};$$
$$\frac{d\varrho}{dx} = -\sin\eta; \qquad \frac{d\eta}{dx} = -\frac{\cos\eta}{\varrho};$$

ferner folgt für jede Funktion F:

$$\frac{dF}{dx} = -\sin\eta\frac{dF}{d\varrho} - \frac{\cos\eta}{\varrho}\frac{dF}{d\eta},$$
$$\frac{dxF}{dx} = \sin^2\eta\frac{d\varrho F}{d\varrho} + \sin\eta\cos\eta\frac{dF}{d\eta} + \cos^2\eta F,$$
$$\frac{dF}{dr} = \cos\eta\frac{dF}{d\varrho} - \frac{\sin\eta}{\varrho}\frac{dF}{d\eta};$$

ferner

$$-xF\frac{dr}{d\xi} + rF\frac{dr}{d\eta} = 0,$$
$$xF\frac{dr}{d\eta} + rF\frac{dr}{d\xi} = \varrho^2 F,$$
$$x\frac{dF}{dr} - r\frac{dF}{dx} = \frac{dF}{d\eta},$$
$$\frac{dxF}{dx} + r\frac{dF}{dr} = \frac{d\varrho F}{d\varrho}.$$

Die Gleichung (22) nimmt in Kugelkoordinaten die Form an:

$$(23)\quad \frac{d^2\varrho F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{d\varrho F}{d\eta} + \left(m^2 - \frac{\nu^2}{\varrho^2\cos^2\eta}\right)\varrho F = 0,$$

und zerfällt, wenn man

$$(24)\qquad \varrho F = \Re P_\nu^n$$

setzt, wo $\Re$ nur von ϱ, P_ν^n nur von η abhängen soll, in die Gleichung

$$(25)\quad \begin{cases} \dfrac{d^2\Re}{d\varrho^2} + \left(m^2 - \dfrac{n(n+1)}{\varrho^2}\right)\Re = 0, \\ \dfrac{1}{\cos\eta}\dfrac{d}{d\eta}\cos\eta\dfrac{dP_\nu^n}{d\eta} + \left(n(n+1) - \dfrac{\nu^2}{\cos^2\eta}\right)P_\nu^n = 0. \end{cases}$$

Mit Beachtung vorstehender Formeln gehen die Integralsysteme (18a), 18b), (21a), (21b) in folgende über:

$$(26a)\quad \begin{cases} u_1 = \left(\varrho\dfrac{dH_1'}{d\varrho} + m^2 H_1\varrho\sin\eta\right)\Phi, \\ v_1 = \left(\dfrac{dH_1'}{d\eta} + m^2 H_1\varrho\cos\eta\right)\Phi, \\ w_1 = H_1'\dfrac{d\Phi}{d\varphi}, \end{cases}$$

:t ist

$$H'_1 = \sin\eta \frac{dH_1}{d\varrho} + \frac{\cos\eta}{\varrho}\frac{dH_1}{d\eta};$$

$$\begin{cases} u_2 = H_2 \frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v_2 = -\operatorname{tang}\eta H_2 \frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w_2 = \left\{-\cos^2\eta\varrho\frac{dH_2}{d\varrho} + \frac{\sin 2\eta}{2}\frac{dH_2}{d\eta}\right\}\Phi; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_3 = \left\{\varrho\frac{d^2\varrho H_3}{d\varrho^2} + m^2\varrho^2 H_3\right\}\Phi, \\ v_3 = \frac{d^2\varrho H_3}{d\eta d\varrho}\Phi, \\ w_3 = \frac{d\varrho H_3}{d\varrho}\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_4 = 0, \\ v_4 = -\frac{\varrho}{\cos\eta} H_4\Phi, \\ w_4 = \varrho\cos\eta\frac{dH_4}{d\eta}\frac{d\Phi}{d\varphi}. \end{cases}$$

letzten beiden Wertsysteme gehen mit Rücksicht auf (24)
Rücksicht darauf, dafs die Gleichung (23), welcher F genügt,
eichungen (25) zerfällt, in diejenigen beiden Wertsysteme,
h früher[1]) erhalten habe, über.

den Ausdrücken (10) meiner letzten Arbeit[2]) für die
ngskomponenten eines Rotationskörpers erhält man für die

$$\begin{cases} R = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\varrho}L + uM, \\ R_1 = -\frac{1}{l^2}\frac{1}{\varrho}\frac{d\sigma}{d\eta}L + vM, \\ R_2 = -\frac{1}{l^2}\frac{1}{\varrho\cos\eta}\frac{d\sigma}{d\varphi}L + wM. \end{cases}$$

ıt man für u, v, w die obigen Werte, für σ ein Integral
hung

$$\frac{\partial\sigma}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{d\varrho\sigma}{d\eta} + \frac{1}{\varrho^2\cos^2\eta}\frac{d^2\varrho\sigma}{d\varphi^2} + l^2\varrho\sigma = 0,$$

d M die folgenden Werte zu setzen:

$$\begin{cases} L = A_1\cos\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\delta}}lt + A_2\sin\sqrt{\frac{\lambda+2\mu}{\delta}}lt \\ M = B_1\cos\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}mt + B_2\sin\sqrt{\frac{\mu}{\delta}}mt, \end{cases}$$

rnal für reine u. angewandte Math. Bd. 88. pag. 141.
rnal für reine u. angewandte Math. Bd. 104. pag. 185.

wo A_i, B_i, l, m noch zu bestimmende, λ, μ, δ feste Konstante mit der Bedingung für coexistierende Longitudinal- und Transv schwingungen

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\delta} l^2 = \frac{\mu}{\delta} m^2. \tag{27c}$$

In den obigen Ausdrücken für die Schwingungskomponente fügt man mit Rücksicht auf die Ausdrücke für u, v, w übe Funktionen von ϱ, welche Gleichungen von der Form der Gleichung (25) genügen, hinreichend, um den drei Oberfli bedingungen in der in der Einleitung bemerkten Weise zu ge Man vergleiche darüber meine genannte Arbeit über die elast Schwingungen der Kugel.

§ 3.

Anwendung auf den Kreiscylinder.

Den Elasticitätsgleichungen in Kreiscylinderkoordinaten ge folgende Ausdrücke für die Komponenten, die aus den allgen Formeln für

$$\xi = x, \quad \eta = r \quad \text{und folglich} \quad h = 1$$

erhalten werden:

$$\begin{cases} R = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{dx} L + uM, \\ R_1 = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{dr} L + vM, \\ R_2 = -\frac{1}{l^2}\frac{d\sigma}{d\varphi} L + wM, \\ 0 = \sigma L, \end{cases} \tag{28}$$

wo L, M, l die obige Bedeutung haben, σ der Gleichung geni

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{d\sigma}{dr} + \frac{d^2\sigma}{dx^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2\sigma}{d\varphi^2} + l^2\sigma = 0 \tag{29}$$

und wo für u, v, w folgende Wertsysteme zu setzen sind:

$$\begin{cases} u_1 = \left(\frac{d^2F_1}{dx^2} + m^2F_1\right)\Phi, \\ v_1 = \frac{d^2F_1}{dr\,dx}\Phi, \\ w_1 = \frac{dF_1}{dx}\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases} \tag{30a}$$

$$\begin{cases} u_2 = 0 \\ v_2 = \frac{F_2}{r}\frac{d\Phi}{d\varphi} \\ w_2 = -r\frac{dF_2}{dr}\Phi \end{cases} \tag{30b}$$

$$\begin{cases} u_3 = \left\{ \frac{d}{dx}\left(\frac{dxF_3}{dx} + r\frac{dF_3}{dr}\right) + m^2 x F_3 \right\} \Phi, \\ v_3 = \left\{ \frac{d}{dr}\left(\frac{dxF_3}{dx} + r\frac{dF_3}{dr}\right) + m^2 r F_3 \right\} \Phi, \\ w_3 = \left(\frac{dxF_3}{dx} + r\frac{dF_3}{dr}\right)\frac{d\Phi}{d\varphi}; \end{cases}$$

$$\begin{cases} u_4 = F_4 \frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ v_4 = -\frac{x}{r} F_4 \frac{d\Phi}{d\varphi}, \\ w_4 = \left(rx\frac{dF_4}{dr} - r^2\frac{dF_4}{dx}\right)\Phi, \end{cases}$$

Funktionen F_i der Gleichung:

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dF}{dr} + \frac{d^2F}{dx^2} + \left(m^2 - \frac{\nu^2}{r^2}\right) F = 0$$

---

ber den optischen Einflufs sehr kleiner Stoffteilchen.

(Von Professor J. Kiefsling.)

dem Bericht, welchen die von der Königlichen Gesellschaft on ernannte Kommission über den Krakatau-Ausbruch ab- hat, enthält der auf die optischen Erscheinungen sich be- Abschnitt eine Reihe von Bemerkungen, welchen die An- ; zu Grunde zu liegen scheint, dafs die Färbung des von kleinen Stoffteilchen reflektierten Lichtes derartig von der lerselben abhängig sei, dafs die gröfseren Stoffteilchen die , roten Wellen, die kleinsten hingegen die kürzeren, blauen etten Wellen vorzugsweise zurückhalten.

den auf eine Arbeit von Stokes[1]) sich stützenden Be- gen von Strutt[2]) geht jedoch hervor, dafs die Gröfsen- lenheit sehr kleiner Stoffteilchen auf die Färbung des von flektierten Lichtes keinen Einflufs ausüben kann. Denn fällt sehr kleines Stoffteilchen, dessen Volumen V sein mag, eine kung $A \cos \frac{2\pi}{\lambda} bt$, so ergiebt sich aus den Bewegungs- gen elastischer Medien für die resultierende Intensität des usgehenden Lichtes an irgend einer von V um r entfernten ungsstelle der Ausdruck

---

dynamical theory of diffraction, Cambr. Trans. Bd. 9.
ilos. Mag. Ser. 4, Bd. 41. pag. 107.

$$J = \pi^2 A^2 \left[\frac{D_1 - D}{D}\right]^2 (1 + \cos^2\beta) \frac{V^2}{r^2 \lambda^4},$$

vorausgesetzt, daſs das einfallende Licht natürliches ist, und daſs der Winkel zwischen r und der Richtung des in V einfallenden ursprünglichen Lichtes und D_1 die Ätherdichtigkeit innerhalb V i Bezeichnet man daher die Wellenlänge des roten Lichtes mit λ_r, des violetten mit λ_v, so ist völlig unabhängig von der Gröſse von (nur vorausgesetzt, daſs V so klein ist, daſs die in der analytisch Entwicklung angewendeten Vereinfachungen zulässig sind) stets

$$J_r : J_v = \frac{1}{\lambda_r^4} : \frac{1}{\lambda_v^4} \quad \text{d. h. nahezu} = 1 : 16.$$

Es wird also unter allen Umständen bei hinreichend kleinen St teilchen in dem von denselben zerstreuten (scattered) Licht die Int sität der stärker brechbaren Strahlen kurzer Wellenlänge erhebl gegen die der weniger brechbaren hervortreten; der Gesamteindr des reflektierten Lichtes wird daher unter allen Umständen bläul sein, und daher wird das durch einen mit sehr kleinen Stoffteilch erfüllten Raum durchgehende Licht, soweit nur die Gröſse Stoffteilchen in Betracht kommt, stets rötlich erscheinen müss Eine Erklärung der grünen und blauen Sonnenfärbung kann aus nur von der Gröſse der wirksamen Stoffteilchen abhängigen optisch Wirkung nicht erbracht werden.

Über Räume zweiten Grades.

(Von Hermann Schubert.)

I. Einleitendes.

Im 26. Bande der Math. Ann. und in den Acta mathem. v Jahre 1886 habe ich die Grundlagen der abzählenden Geometrie einem linearen Raume von n Dimensionen entwickelt und zugle gezeigt, wie sich bei Zugrundelegung eines solchen Raumes die A zahlen berechnen lassen, welche angeben, wieviel lineare Räu $p$ter Dimension ($p < n$) gegebene Grundbedingungen erfüllen. Da wurden die Grundbedingungen, die einem p-dimensionalen linea Raume auferlegbar sind, in folgender Weise übersichtlich erklärt u bezeichnet. Es bedeute das Symbol $[q]$ immer einen q-dimensiona linearen Raum.[1]) Sind nun $p + 1$ lineare Räume $[a_0], [a_1], [a_2], \ldots$ derartig gegeben, daſs immer $[a_i]$ in $[a_{i+1}]$ liegt, so erhält man imn

1) Von dieser Bezeichnungsweise ist auch hier Gebrauch gemacht.

eine dem $[p]$ auferlegbare Grundbedingung, wenn man verlangt, dafs der $[p]$ mit $[a_0]$ einen Punkt, mit $[a_1]$ einen Strahl, und überhaupt mit $[a_i]$ einen $[i]$ gemeinsam haben soll. Eine solche Grundbedingung wurde mit

$$(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$$

bezeichnet, wo naturgemäfs $0 \leqq a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_p \leqq n$ sein mufs. So ergaben sich $\frac{(n+1)!}{(n-p)!\,(p+1)!}$ Grundbedingungen. Für die Dimension (Vielfachheit) der mit $(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p)$ bezeichneten Grundbedingung ergab sich:

$$(p+1)\,n - \tfrac{1}{2}\,p\,(p+1) - (a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_p),$$

so dafs jedem $[p]$ nur eine einzige Grundbedingung erster Dimension, nämlich $(n-p-1, n-p+1, n-p+2, \ldots, n-1, n)$ zugehört. Sind für den $[p]$ nun $(p+1)(n-p)$ solcher einfacher Grundbedingungen gegeben, so ist dadurch eine endliche Anzahl von p-dimensionalen linearen Räumen bestimmt, und diese endliche Anzahl war gleich:

$$\frac{\{(p+1)(n-p)\}!\;1!\;2!\;3!\cdots p!}{n!\,(n-1)!\,(n-2)!\cdots(n-p)!},$$

wie ich schon früher in den Mitteil. der Hamburger Math. Ges. vom Jahre 1884 mitgeteilt hatte.

Im folgenden sind nun solche Punkträume anzahl-geometrisch untersucht, welche nicht linear, sondern zweiten Grades sind, also Verallgemeinerungen des Kegelschnitts und der Fläche zweiten Grades sind, und zwar sind in II die Formeln und die Berechnungswege angegeben, welche für den Fall, dafs der Raum eine beliebig hohe Dimension hat, zu den Anzahlen führen, die sich auf einfache Lage-Bedingungen der Punkte, der Tangenten und überhaupt der berührenden linearen Räume beziehen. In den folgenden Abschnitten sind dann diese Anzahlen für den speziellen Fall $n = 4$ rechnerisch behandelt und tabellarisch zusammengestellt, und zwar in III für den im [4] liegenden Kegelschnitt, in IV für die im [4] liegende Fläche zweiten Grades, und in V für den im [4] liegenden dreidimensionalen Raum zweiten Grades.

II. Anzahlbestimmung für Räume zweiten Grades beliebiger Dimension im allgemeinen.

Ein in dem zu Grunde gelegten n-dimensionalen linearen Raume liegender $(n-1)$-dimensionaler Punktraum zweiten Grades R wird von jedem Strahle in zwei reellen oder imaginären Punkten, von jeder Ebene in einem Kegelschnitt, und überhaupt von jedem $[p]$ in einem

$(p-1)$-dimensionalen Punktraum zweiten Grades geschnitten. solcher R besteht aus ∞^{n-1} Punkten und wird von ∞^{2n-3} Tange ∞^{3n-7} Tangentialebenen und überhaupt von $\infty^{(q+1)(n-q)-1}$ q-di sionalen linearen Räumen berührt, so dafs in jedem Punkte ∞ Tangenten, $\infty^{2(n-3)}$ Tangentialebenen und überhaupt $\infty^{q(n-}$ q-dimensionale lineare Räume berühren. Indem der R einen sol $[q]$ berührt, erfüllt er immer eine Bedingung erster Dimension, grofs auch q sein mag, so dafs für den R n einfache Grundbedingu definiert werden können. Wir bezeichnen die letztern mit

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_{n-1},$$

wo μ_0 bedeutet, dafs der R durch einen gegebenen Punkt gehen wo μ_1 bedeutet, dafs er einen gegebenen Strahl berühren soll, wo allgemein μ_i bedeutet, dafs der R einen gegebenen $[i]$ berü soll. Dann bezeichnet nach den Grundlagen des Bedingungskalk jedes dieser n Symbole μ_i zugleich auch die endliche Anzahl jenigen R, welche, einem vorliegenden einstufigen Systeme so Räume R angehörig, die mit μ_i bezeichnete Bedingung erfü Zwischen den n Zahlen μ_i lassen sich vermittelst des auf bel hohe Dimension ausgedehnten Korrespondenzprinzips n Formeln stellen, in welche auch die Anzahlen eintreten, die angeben, wi in dieser oder jener Weise ausgeartete Räume R das einstufige Sy enthält. Zur Klarstellung der Beschaffenheit dieser ausgearteten Rä mufs folgendes vorausgeschickt werden. Wenn ein Raum zw Grades von niederer als der $(n-1)$ten Dimension, sagen wir der $(p-1)$ten Dimension, ist, so liegt er vollständig in e p-dimensionalen linearen Raume. Einen solchen $(p-1)$-dimensior Raum zweiten Grades wollen wir immer mit R_p bezeichnen, so beispielsweise R_3 eine Fläche zweiten Grades, R_2 einen Kegelsc und R_1 ein Punktepaar bedeuten. Ein solcher R_p wird natürlich $\infty^{(q+1)(p-q)-1}$ q-dimensionalen linearen Räumen berührt, wo q ist. Man kann jedoch auch jeden w-dimensionalen linearen R wo $w \gtreqless p$ ist, den R_p berührend nennen, wenn derselbe den [einem $[w+p-n]$ schneidet, der den R_p berührt, gerade so, man von einer Ebene sagt, dafs sie einen Kegelschnitt berührt, v sie dessen Ebene in einer Tangente schneidet. Bekanntlich gilt das Prinzip der Dualität innerhalb jedes linearen Raums. Wenn dieses Prinzip nun innerhalb eines $[p]$ auf einen in dem $[p]$ liege R_p anwenden, so erhalten wir natürlich wieder einen R_p. Wenn es jedoch auf einen R_p innerhalb des zu Grunde gelegten $[n]$ anwer

1) Kalkül der abzähl. Geom. (Leipzig 1879) § 5.

so erhalten wir ein neues Gebilde, das wir mit S_p bezeichnen wollen. S_p geht also aus R_p so hervor, wie in unserm Raume der Kegel aus dem Kegelschnitt durch duale Umwandlung entsteht. Während ein R_p ganz in einem $[p]$ liegt, geht ein S_p von einem $[n-1-p]$ aus, der ganz in dem S_p liegt, weil im $[n]$ dem $[p]$ ein $[n-1-p]$ dual entspricht. Hiernach können wir die sämtlichen Ausartungen beschreiben, welche in elementaren einstufigen Systemen von Räumen zweiten Grades vorkommen können. Es giebt n solcher Ausartungen, die wir mit

$$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{n-1}$$

bezeichnen wollen, und die sich so definieren lassen:

Die Ausartung φ_0 besteht aus einem R_{n-1}, der in einem doppelt zu denkenden $[n-1]$ liegt;

Die Ausartung φ_1 besteht aus zwei $[n-1]$, die sich in einem $[n-2]$ schneiden, in welchem ein R_{n-2} liegt;

Die Ausartung φ_2 besteht aus einem $[n-3]$, von welchem ein S_2 ausgeht, und in welchem ein R_{n-3} liegt;

Die Ausartung φ_i besteht aus einem $[n-i-1]$, von welchem ein S_i ausgeht, und in welchem ein R_{n-i-1} liegt.

Für ein in Rede stehendes einstufiges System von Räumen zweiten Grades bezeichnet jedes der eingeführten Symbole $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ zugleich auch die Anzahl derjenigen R des Systems, welche in der durch dieses Symbol ausgedrückten Art und Weise ausgeartet sind. Zwischen den n Zahlen φ und den n Zahlen μ bestehen nun für jedes einstufige System n Gleichungen, die sich sämtlich aus dem Korrespondenzprinzip ergeben, wenn man bestimmt, wie oft auf einem Strahle zwei demselben R des Systems angehörige Punkte koincidieren, oder wie oft in einem Strahlbüschel zwei demselben R des Systems angehörige Tangenten koincidieren, oder überhaupt wie oft in einem Büschel von i-dimensionalen linearen Räumen zwei denselben R des Systems berührende $[i]$ koincidieren, wo unter einem Büschel von i-dimensionalen linearen Räumen die Gesamtheit aller $[i]$ verstanden ist, die einen und denselben $[i-1]$ gemeinsam haben und dabei in einem und demselben $[i+1]$ liegen. Die sich so ergebenden Gleichungen lauten also:

$$(1)\qquad \begin{aligned}
\mu_0 + \mu_0 &= \mu_1 + \varphi_0,\\
\mu_1 + \mu_1 &= \mu_0 + \mu_2 + \varphi_1,\\
\mu_2 + \mu_2 &= \mu_1 + \mu_3 + \varphi_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mu_i + \mu_i &= \mu_{i-1} + \mu_{i+1} + \varphi_i,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\mu_{n-1} + \mu_{n-1} &= \mu_{n-2} + \varphi_{n-1}.
\end{aligned}$$

Durch Ausrechnung jeder der n Zahlen μ aus diesen n Gleichungen erhält man:

$$(n+1)\mu_k = (n-k)[\varphi_0 + 2\varphi_1 + 3\varphi_2 + \cdots + k\varphi_{k-1}]$$
$$+(n-k)(k+1)\varphi_k \tag{2}$$
$$+(k+1)[(n-k-1)\varphi_{k+1} + (n-k-2)\varphi_{k+2} + \cdots + \varphi_{n-1}].$$

Hiernach ist jede Zahl μ eines einstufigen Systems von Räumen zweiten Grades bestimmt, falls die Ausartungszahlen φ dieses Systems berechnet vorliegen. Betrachten wir nun als Ziel vorläufig die Berechnung aller elementaren Anzahlen eines $(n-1)$-dimensionalen Raumes zweiten Grades, d. h. aller Zahlen, welche angeben, wieviel solcher Räume durch m_0 Punkte gehen, m_1 Strahlen berühren, m_2 Ebenen berühren und überhaupt m_i i-dimensionale lineare Räume berühren. Dabei mufs $m_0 + m_1 + \cdots + m_{n-1}$ gleich der Konstantenzahl $\frac{1}{2}n(n+3)$ des R sein. Wir denken uns also ein einstufiges System von Räumen R durch Bedingungen definiert, die keine andern sind, als die eben angegebenen, oben mit μ bezeichneten Bedingungen, und zwar so, dafs die Dimensionssumme derselben $\frac{1}{2}n(n+3)-1$ beträgt. Es fragt sich dann, ob die φ eines solchen Systems bestimmbar sind. Dies zu entscheiden, ist zunächst erforderlich, zu untersuchen, wie jedes φ jede Bedingung μ erfüllt. Dies aber ergiebt sich aus der oben angegebenen Definition der Ausartungen φ, wie folgt:

1) Die Ausartung φ_k erfüllt die Bedingung μ_k, indem der $[n-k-1]$ des φ_k mit dem $[k]$ des μ_k einen Punkt gemein hat. Dabei ist jedoch zu beachten, dafs ein φ_k, indem es mit dem $[k]$ des μ_k einen Punkt gemein hat, doppelt zählt;

2) Die Ausartung φ_k erfüllt die Bedingung μ_p, wo $p > k$ ist, indem der auf φ_k liegende R_{n-k-1} den $[p]$ des μ_p berührt;

3) Die Ausartung φ_k erfüllt die Bedingung μ_p, wo $p < k$ ist, indem der φ_k angehörige S_k den $[p]$ des μ_p berührt.

Hieraus ist ersichtlich, dafs die Berechnung jeder Zahl φ eines nur durch elementare Bedingungen bestimmten Systems von Räumen zweiten Grades im wesentlichen von den elementaren Anzahlen der Räume zweiten Grades von niederer als der $(n-1)$ten Dimension abhängt, so dafs vermöge der Formel (2) jede elementare Anzahl eines R schliefslich nur von den Anzahlen abhängt, die sich auf das Gebilde beziehen, das aus einem Punkt, einem durch diesen Punkt gehenden Strahle, einer durch diesen Strahl gehenden Ebene u. s. w. besteht. Die Anzahlen für dieses Gebilde aber können durch meine auf lineare Räume bezüglichen Untersuchungen (Math. Ann. Bd. 26, Acta math.

386) als bestimmbar angesehen werden. Die eben genannte Reduktion t jedoch nur dann ausführbar, wenn die Formeln (1) noch dieselbe usdehnung erfahren, welche einst die beiden Kegelschnittformeln rfuhren, als man den Kegelschnitt als im Raume liegend ansah, um a berechnen, wieviel Kegelschnitte im Raume gegebene elementare edingungen, z. B. die, acht gegebene Grade zu schneiden, erfüllen. iese Ausdehnung läfst sich nun aber leicht bewerkstelligen. Wir lenken uns nämlich bei der Ableitung der Formeln (1) statt des R inen R_p und wenden dann das Korrespondenzprinzip, statt auf einen Büschel von i-dimensionalen linearen Räumen, auf einen Büschel von $(i+n-p)$-dimensionalen Räumen an, wobei wir dann unter μ_0 die Bedingung zu verstehen haben, dafs der R_p einen seiner Punkte auf einem gegebenen $[n-p]$ besitzt, und überhaupt unter μ_i die Bedingung zu verstehen haben, dafs der R_p einen der ihn berührenden $[i]$ in dem $[i+n-p+1]$ des Büschels besitzt und durch den $[i+n-p-1]$ des Büschels schickt. Dann bleiben die Formeln (1) unverändert, aufser dafs wir statt n Formeln nur p haben, und dafs zu der rechten Seite der ersten Formel das Symbol $2e$ als Addende hinzutritt, wo e die Bedingung erster Dimension bezeichnet, dafs der $[p]$, in welchem der R_p liegt, mit dem $[n-p-1]$ des der Formel zu Grunde liegenden Büschels einen Punkt gemein hat. Dann lautet also die an die Stelle von (2) tretende resultierende Formel:

$$
\begin{aligned}
(p+1)\,\mu_k &= 2(p-k)\,e + (p-k)(\varphi_0 + 2\varphi_1 + \cdots k\varphi_{k-1}) \\
&\quad + (p-k)(k+1)\,\varphi_k \\
&\quad + (k+1)[(p-k-1)\,\varphi_{k+1} + \cdots + \varphi_{p-1}].
\end{aligned} \tag{3}
$$

Mit Hilfe dieser Formel kann man die sämtlichen elementaren Anzahlen eines im $[n]$ liegenden R_p berechnen, wenn die Ausartungsanzahlen berechnet vorliegen, und wenn man systematisch von den Anzahlen, bei welchen der $[p]$ des R_p als gegeben vorausgesetzt ist, bis zu den Anzahlen aufsteigt, bei welchen der $[p]$ des R_p gar keine Bedingung mehr erfüllen soll, so dafs dann immer die Zahl e jedes Systems berechnet vorliegt. So ist nun erkannt, dafs bei einem systematischen Fortschreiten der Berechnung jede Zahl, welche angiebt, wieviel Räume zweiten Grades beliebiger Dimension gegebene elementare Bedingungen erfüllen, schliefslich nur von den Anzahlen derjenigen Gebilde abhängt, welche aus einem Punkte, einem durch ihn gehenden Strahle, einer durch diesen Strahl gehenden Ebene, einem durch diese Ebene gehenden [3] u. s. w. bestehen. Hier war unter elementarer Bedingung wieder jede Bedingung verstanden, welche verlangt, dafs der Raum zweiten Grades seine Punkte, Tangenten

und überhaupt seine ihn berührenden q-dimensionalen linearen Räume Bedingungen erster Dimension, die sich nur auf die Lage im $[n]$ beziehen, erfüllen läfst.

Man könnte nun den beschriebenen Berechnungsweg wirklich schrittweise verfolgen, zunächst also für den vierdimensionalen linearen Raum die Zahlen berechnen, die sich auf Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades und dreidimensionale Räume zweiten Grades beziehen, dann mit Benutzung dieser Anzahlen diejenigen berechnen, welche sich auf die analogen Gebilde des [5] beziehen u. s. w. Wenn man sich jedoch auf den Standpunkt stellt, dafs die Ausdehnung der abzählenden Geometrie auf n Dimensionen vornehmlich das algebraisch wichtige Ziel zu verfolgen hat, ihre Anzahlen allgemein als Funktionen der Raumdimension n darzustellen, so mufs man es auch als ein höheres Ziel betrachten, die Anzahlen für Räume zweiten Grades im $[n]$ möglichst direkt durch n auszudrücken. Bei vielen Anzahlen ist es mir gelungen, dieses Ziel wirklich zu erreichen. Doch möchte ich die darauf bezüglichen Untersuchungen noch nicht publizieren, sondern noch weiter fortsetzen, um dieselben dann der Festschrift einzuverleiben, die zum 200jährigen Stiftungsfeste der Hamburger Math. Gesellsch. im Anfang des Jahres 1890 erscheinen soll. Deshalb soll hier nur noch der beschriebene Berechnungsweg für $n = 4$ wirklich abgeschritten werden, d. h. es sollen im folgenden alle elementaren Anzahlen wirklich ausgerechnet werden, die sich auf Kegelschnitte, Flächen zweiten Grades und dreidimensionale Räume zweiten Grades beziehen, wenn vorausgesetzt wird, dafs diese Gebilde in einem festen vierdimensionalen linearen Raume liegen.

III. Kegelschnitt-Anzahlen im vierdimensionalen linearen Raume.

Für den Kegelschnitt ist in die Formel (3) $p = 2$ einzusetzen. Dann erhält man daraus für $k = 0$ und $k = 1$:

$$(4) \qquad \begin{cases} 3\mu_0 = 4e + 2\varphi_0 + \varphi_1, \\ 3\mu_1 = 2e + \varphi_0 + 2\varphi_1, \end{cases}$$

wo für ein im [4] liegendes einstufiges Kegelschnitt-System μ_0 angiebt, wieviel Kegelschnitte des Systems eine gegebene Ebene schneiden, μ_1 angiebt, wieviel Kegelschnitte einen gegebenen [3] berühren, d. h. eine Tangente in diesem [3] besitzen, e angiebt, wieviel Kegelschnitte ihre Ebene einen gegebenen Strahl schneiden lassen, φ_0 angiebt, wieviel Kegelschnitte in zwei Tangenten-Büschel ausgeartet sind, und endlich φ_1 angiebt, wieviel Kegelschnitte in zwei Gerade zerfallen *sind*. Ist die Ebene des Kegelschnitts gegeben, d. h. erfüllt sie die

Bedingung (0, 1, 2), so sind die zu berechnenden Anzahlen $\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}$, wo $m_0 + m_1 = 5$ ist, bekanntlich 1, 2, 4, 4, 2, 1. Diese Zahlen sind nun die Zahlen e der Systeme, bei denen die Kegelschnitt-Ebene die Bedingung (0, 1, 3) erfüllt, weil

$$(0, 1, 3)\, e = (0, 1, 3)\,(1, 3, 4) = (0, 1, 2)$$ [1] ist.

Ebenso ist dann weiter:[1]

$(0, 1, 4)\ e = (0, 1, 3)$; $(0, 2, 3)\ e = (0, 1, 3)$;
$(0, 2, 4)\ e = (0, 1, 4) + (0, 2, 3)$; $(1, 2, 3)\ e = (0, 2, 3)$;
$(0, 3, 4)\ e = (0, 2, 4)$; $(1, 2, 4)\ e = (0, 2, 4) + (1, 2, 3)$;
$(1, 3, 4)\ e = (0, 3, 4) + (1, 2, 4)$;
$(2, 3, 4)\ e = (1, 3, 4)$

Man hat also nacheinander die Elementarzahlgruppen zu berechnen, welche auf die Grundbedingungen (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 1, 4), (0, 2, 3), (0, 2, 4), (1, 2, 3), (0, 3, 4), (1, 2, 4), (1, 3, 4), (2, 3, 4) der Kegelschnittebene Bezug nehmen. Von diesen Anzahlgruppen sind die auf (0, 1, 2), (0, 1, 3), (0, 2, 3), (1, 2, 3) bezüglichen identisch mit den schon von Chasles 1867 (Comptes rendus) berechneten, in meinem Kalkül der abzähl. Geom. (Seite 92) angeführten Anzahlgruppen für Kegelschnitte in unserm Raume. Erst bei der auf (2, 3, 4) bezüglichen Gruppe erfüllt die Kegelschnittebene gar keine Bedingung mehr, weil die übrigen Bedingungen allein schon die Lage des Kegelschnitts feststellen. Da die auf diese zehn Gruppen bezüglichen Ausartungsanzahlen $\varphi_0\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}$ und $\varphi_1\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}$ sich mit Hilfe der von mir in den Math. Ann. Band 26, Seite 26 bis 51 angestellten Erörterungen leicht berechnen lassen, so wird es genügen, wenn ich hier lediglich die Kegelschnittanzahlen selbst zusammenstelle, ohne auf die Entstehung jeder einzelnen aus einem e, einem φ_0 und einem φ_1 näher einzugehen. Die meisten dieser Zahlen entstehen auf doppelte Weise, indem sie sowohl als ein μ_0 eines Systems wie auch als ein μ_1 eines anderen Systems sich ergeben. Die von der Kegelschnittebene zu erfüllende Bedingung ist jeder Gruppe übergeschrieben, die hinter (a, b) gesetzte Zahl giebt dann immer an, wieviel Kegelschnitte a gegebene Ebenen schneiden und b gegebene dreidimensionale lineare Räume berühren.

[1]) Vgl. Acta math., 1886, Seite 104.

(0, 1, 2)	
(5, 0)	= 1
(4, 1)	= 2
(3, 2)	= 4
(2, 3)	= 4
(1, 4)	= 2
(0, 5)	= 1

(0, 1, 3)	
(6, 0)	= 8
(5, 1)	= 14
(4, 2)	= 24
(3, 3)	= 24
(2, 4)	= 16
(1, 5)	= 8
(0, 6)	= 4

(0, 1, 4)	
(7, 0)	= 39
(6, 1)	= 62
(5, 2)	= 96
(4, 3)	= 96
(3, 4)	= 72
(2, 5)	= 44
(1, 6)	= 22
(0, 7)	= 11

(0, 2, 3)	
(7, 0)	= 34
(6, 1)	= 52
(5, 2)	= 76
(4, 3)	= 72
(3, 4)	= 48
(2, 5)	= 24
(1, 6)	= 12
(0, 7)	= 6

(0, 2, 4)	
(8, 0)	= 249
(7, 1)	= 352
(6, 2)	= 476
(5, 3)	= 448
(4, 4)	= 320
(3, 5)	= 184
(2, 6)	= 92
(1, 7)	= 46
(0, 8)	= 23

(1, 2, 3)	
(8, 0)	= 92
(7, 1)	= 116
(6, 2)	= 128
(5, 3)	= 104
(4, 4)	= 64
(3, 5)	= 32
(2, 6)	= 16
(1, 7)	= 8
(0, 8)	= 4

(0, 3, 4)	
(9, 0)	= 717
(8, 1)	= 936
(7, 2)	= 1168
(6, 3)	= 1064
(5, 4)	= 752
(4, 5)	= 432
(3, 6)	= 216
(2, 7)	= 108
(1, 8)	= 54
(0, 9)	= 27

(1, 2, 4)	
(9, 0)	= 82
(8, 1)	= 97
(7, 2)	= 101
(6, 3)	= 81
(5, 4)	= 52
(4, 5)	= 28
(3, 6)	= 14
(2, 7)	=
(1, 8)	=
(0, 9)	=

(1, 3, 4)	
(10, 0)	= 3390
(9, 1)	= 3690
(8, 2)	= 3560
(7, 3)	= 2760
(6, 4)	= 1760
(5, 5)	= 960
(4, 6)	= 480
(3, 7)	= 240
(2, 8)	= 120
(1, 9)	= 60
(0, 10)	= 30

(2, 3, 4)	
(11, 0)	= 6620
(10, 1)	= 6460
(9, 2)	= 5540
(8, 3)	= 3960
(7, 4)	= 2400
(6, 5)	= 1280
(5, 6)	= 640
(4, 7)	= 320
(3, 8)	= 160
(2, 9)	= 80
(1, 10)	= 40
(0, 11)	= 20

• Hier bedeutet also z. B. unter (1, 2, 4) die Zahl (8, 1) = 974, dafs es in einem vierdimensionalen linearen Raume 974 Kegelschnitte

giebt, von denen jeder seine Ebene eine gegebene Ebene in einem Strahle schneiden läfst und dabei selbst acht gegebene Ebenen schneidet sowie einen gegebenen dreidimensionalen linearen Raum berührt. Ferner bedeutet z. B. unter (2, 3, 4) die Zahl (11, 0) = 6620, dafs es in einem vierdimensionalen linearen Raume 6620 Kegelschnitte giebt, von denen jeder elf gegebene Ebenen zu schneiden vermag.

IV. Anzahlen für Flächen zweiten Grades, die in einem vierdimensionalen linearen Raume liegen.

Für die Fläche zweiten Grades in einem [4] ist in die Formel (3) $p = 3$ einzusetzen. Dann erhält man für $k = 0, 1, 2$ die drei Formeln:

$$(5) \qquad \begin{cases} 4\mu_0 = 6e + 3\varphi_0 + 2\varphi_1 + \varphi_2, \\ 4\mu_1 = 4e + 2\varphi_0 + 4\varphi_1 + 2\varphi_2, \\ 4\mu_2 = 2e + \varphi_0 + 2\varphi_1 + 3\varphi_2, \end{cases}$$

wo für ein in einem [4] liegendes einstufiges System von Flächen zweiten Grades:

μ_0 bedeutet, wieviel Flächen einen gegebenen Strahl schneiden;

μ_1 bedeutet, wieviel Flächen eine gegebene Ebene berühren;

μ_2 bedeutet, wieviel Flächen einen gegebenen [3] berühren;

e bedeutet, wieviel Flächen den [3], in dem sie liegen, durch einen gegebenen Punkt schicken;

φ_0 bedeutet, wieviel Flächen so ausgeartet sind, dafs ihre Punkte eine Doppelebene bilden, ihre Tangenten die sämtlichen Sekanten eines auf der Doppelebene liegenden Kegelschnitts sind und ihre Tangentialebenen die sämtlichen durch die Tangenten dieses Kegelschnitts gehenden Ebenen sind;

φ_1 bedeutet, wieviel Flächen so ausgeartet sind, dafs ihre Punkte zwei Ebenen bilden, ihre Tangenten die die Schnittlinie dieser Ebenen schneidenden Strahlen sind, und ihre Tangentialebenen die sämtlichen Ebenen zweier Ebenenbündel sind, deren Scheitel zwei auf jener Schnittlinie gelegene Punkte sind;

φ_2 bedeutet, wieviel Flächen so ausgeartet sind, dass die Ausartung aus der unter φ_0 erklärten Ausartung durch dreidimensionale Dualität hervorgeht.

Ist der [3], in dem die Fläche zweiten Grades liegt, gegeben, so sind die zu bestimmenden Anzahlen $\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}$ mit den von Zeuthen zuerst und dann auch von mir (Crelle's Journal, Band 71 oder Kalkül d. abz. Geometrie S. 105) berechneten Anzahlen identisch, die sich auf die in unserm Raume liegende Fläche zweiten Grades beziehen. Diese Anzahlen sind die Zahlen e für diejenigen Systeme, bei denen

der [3] durch eine gegebene Ebene geht. So kann man aufsteigen b zu denjenigen Systemen, bei denen der [3] keine besondere Lagebedingu zu erfüllen hat. So erhält man fünf Gruppen von Systemen, aus den die sämtlichen $\frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 10 + \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 11 + \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot 12 + \frac{1}{2} \cdot 14 \cdot$ $+ \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 14$ elementaren Anzahlen der im [4] liegenden Fläc zweiten Grades hervorgehen, falls die Ausartungszahlen dieser Syste berechnet vorliegen. Diese Ausartungszahlen setzen sich aber a den Anzahlen für lineare Räume, den in III zusammengestellten Keg schnittzahlen und den auf Kegel im [4] bezüglichen Anzahlen φ_2 z sammen. Da fast jede elementare Anzahl aus drei verschieden Systemen entstehen kann, so können die auf Kegel bezüglichen Au artungsanzahlen φ_2 fortgelassen werden, um so eher, als trotzdc noch zahlreiche Kontrolen der Berechnung möglich sind. In d folgenden auf die fünf Gruppen bezüglichen Tabellen A, B, C, D, bedeutet immer (a, b, c) die Zahl der Flächen zweiten Grade welche a gegebene Strahlen schneiden, b gegebene Eben und c gegebene dreidimensionale lineare Räume berühre

A) Anzahlen für Flächen zweiten Grades, die in eine gegebenen dreidimensionalen linearen Raum liegen:

(9, 0, 0) = 1	(4, 3, 2) = 72	(1, 8, 0) = 92
	(4, 2, 3) = 68	(1, 7, 1) = 104
(8, 1, 0) = 2	(4, 1, 4) = 42	(1, 6, 2) = 104
(8, 0, 1) = 3	(4, 0, 5) = 21	(1, 5, 3) = 80
		(1, 4, 4) = 48
(7, 2, 0) = 4	(3, 6, 0) = 56	(1, 3, 5) = 24
(7, 1, 1) = 6	(3, 5, 1) = 80	(1, 2, 6) = 12
(7, 0, 2) = 9	(3, 4, 2) = 112	(1, 1, 7) = 6
	(3, 3, 3) = 104	(1, 0, 8) = 3
(6, 3, 0) = 8	(3, 2, 4) = 68	
(6, 2, 1) = 12	(3, 1, 5) = 34	(0, 9, 0) = 92
(6, 1, 2) = 18	(3, 0, 6) = 17	(0, 8, 1) = 92
(6, 0, 3) = 17		(0, 7, 2) = 80
	(2, 7, 0) = 80	(0, 6, 3) = 56
(5, 4, 0) = 16	(2, 6, 1) = 104	(0, 5, 4) = 32
(5, 3, 1) = 24	(2, 5, 2) = 128	(0, 4, 5) = 16
(5, 2, 2) = 36	(2, 4, 3) = 112	(0, 3, 6) = 8
(5, 1, 3) = 34	(2, 3, 4) = 72	(0, 2, 7) = 4
(5, 0, 4) = 21	(2, 2, 5) = 36	(0, 1, 8) = 2
	(2, 1, 6) = 18	(0, 0, 9) = 1
(4, 5, 0) = 32	(2, 0, 7) = 9	
(4, 4, 1) = 48		

B) Anzahlen für Flächen zweiten Grades, die in einem festen [4] ihren dreidimensionalen linearen Raum durch eine gegebene Ebene schicken:

(10, 0, 0) = 15	(4, 6, 0) = 528	(2, 0, 8) = 45
	(4, 5, 1) = 736	
(9, 1, 0) = 28	(4, 4, 2) = 1008	(1, 9, 0) = 966
(9, 0, 1) = 41	(4, 3, 3) = 936	(1, 8, 1) = 1016
	(4, 2, 4) = 628	(1, 7, 2) = 952
(8, 2, 0) = 52	(4, 1, 5) = 330	(1, 6, 3) = 720
(8, 1, 1) = 76	(4, 0, 6) = 165	(1, 5, 4) = 448
(8, 0, 2) = 111		(1, 4, 5) = 240
	(3, 7, 0) = 752	(1, 3, 6) = 120
(7, 3, 0) = 96	(3, 6, 1) = 976	(1, 2, 7) = 60
(7, 2, 1) = 140	(3, 5, 2) = 1216	(1, 1, 8) = 30
(7, 1, 2) = 204	(3, 4, 3) = 1088	(1, 0, 9) = 15
(7, 0, 3) = 192	(3, 3, 4) = 736	
	(3, 2, 5) = 400	(0, 10, 0) = 920
(6, 4, 0) = 176	(3, 1, 6) = 200	(0, 9, 1) = 874
(6, 3, 1) = 256	(3, 0, 7) = 100	(0, 8, 2) = 732
(6, 2, 2) = 372		(0, 7, 3) = 512
(6, 1, 3) = 350	(2, 8, 0) = 916	(0, 6, 4) = 304
(6, 0, 4) = 223	(2, 7, 1) = 1080	(0, 5, 5) = 160
	(2, 6, 2) = 1184	(0, 4, 6) = 80
(5, 5, 0) = 320	(2, 5, 3) = 992	(0, 3, 7) = 40
(5, 4, 1) = 464	(2, 4, 4) = 656	(0, 2, 8) = 20
(5, 3, 2) = 672	(2, 3, 5) = 360	(0, 1, 9) = 10
(5, 2, 3) = 632	(2, 2, 6) = 180	(0, 0, 10) = 5
(5, 1, 4) = 404	(2, 1, 7) = 90	
(5, 0, 5) = 210		

C) Anzahlen für Flächen zweiten Grades, die in einem festen [4] ihren dreidimensionalen linearen Raum durch einen gegebenen Strahl schicken:

(11, 0, 0) = 120	(8, 1, 2) = 1250	(6, 3, 2) = 3440
	(8, 0, 3) = 1169	(6, 2, 3) = 3208
(10, 1, 0) = 210		(6, 1, 4) = 2092
(10, 0, 1) = 300	(7, 4, 0) = 1056	(6, 0, 5) = 1110
	(7, 3, 1) = 1488	
(9, 2, 0) = 364	(7, 2, 2) = 2092	(5, 6, 0) = 2720
(9, 1, 1) = 518	(7, 1, 3) = 1954	(5, 5, 1) = 3680
(9, 0, 2) = 736	(7, 0, 4) = 1269	(5, 4, 2) = 4896
		(5, 3, 3) = 4512
(8, 3, 0) = 624	(6, 5, 0) = 1760	(5, 2, 4) = 3056
(8, 2, 1) = 884	(6, 4, 1) = 2464	

(5, 1, 5) = 1640
(5, 0, 6) = 820

(4, 7, 0) = 3744
(4, 6, 1) = 4768
(4, 5, 2) = 5856
(4, 4, 3) = 5232
(4, 3, 4) = 3576
(4, 2, 5) = 1980
(4, 1, 6) = 990
(4, 0, 7) = 495

(3, 8, 0) = 4544
(3, 7, 1) = 5344
(3, 6, 2) = 5920
(3, 5, 3) = 5024
(3, 4, 4) = 3376
(3, 3, 5) = 1880
(3, 2, 6) = 940

(3, 1, 7) = 470
(3, 0, 8) = 235

(2, 9, 0) = 4896
(2, 8, 1) = 5248
(2, 7, 2) = 5152
(2, 6, 3) = 4064
(2, 5, 4) = 2624
(2, 4, 5) = 1440
(2, 3, 6) = 720
(2, 2, 7) = 360
(2, 1, 8) = 180
(2, 0, 9) = 90

(1, 10, 0) = 4770
(1, 9, 1) = 4644
(1, 8, 2) = 4040
(1, 7, 3) = 2928
(1, 6, 4) = 1792

(1, 5, 5) =
(1, 4, 6) =
(1, 3, 7) =
(1, 2, 8) =
(1, 1, 9) =
(1, 0, 10) =

(0, 11, 0) =
(0, 10, 1) =
(0, 9, 2) =
(0, 8, 3) =
(0, 7, 4) =
(0, 6, 5) =
(0, 5, 6) =
(0, 4, 7) =
(0, 3, 8) =
(0, 2, 9) =
(0, 1, 10) =
(0, 0, 11) =

D) Anzahlen für Flächen zweiten Grades, die i festen [4] ihren dreidimensionalen linearen Raun einen gegebenen Punkt schicken:

(12, 0, 0) = 670

(11, 1, 0) = 1100
(11, 0, 1) = 1530

(10, 2, 0) = 1780
(10, 1, 1) = 2460
(10, 0, 2) = 3390

(9, 3, 0) = 2832
(9, 2, 1) = 3884
(9, 1, 2) = 5308
(9, 0, 3) = 4916

(8, 4, 0) = 4416
(8, 3, 1) = 6000
(8, 2, 2) = 8116
(8, 1, 3) = 7494
(8, 0, 4) = 4927

(7, 5, 0) = 6720
(7, 4, 1) = 9024
(7, 3, 2) = 12048
(7, 2, 3) = 11080
(7, 1, 4) = 7316
(7, 0, 5) = 3930

(6, 6, 0) = 9600
(6, 5, 1) = 12480
(6, 4, 2) = 15936
(6, 3, 3) = 14464
(6, 2, 4) = 9808
(6, 1, 5) = 5320
(6, 0, 6) = 2660

(5, 7, 0) = 12480
(5, 6, 1) = 15360
(5, 5, 2) = 18240
(5, 4, 3) = 16064

(5, 3, 4) =
(5, 2, 5) =
(5, 1, 6) =
(5, 0, 7) =

(4, 8, 0) =
(4, 7, 1) =
(4, 6, 2) =
(4, 5, 3) =
(4, 4, 4) =
(4, 3, 5) =
(4, 2, 6) =
(4, 1, 7) =
(4, 0, 8) =

(3, 9, 0) =
(3, 8, 1) =
(3, 7, 2) =
(3, 6, 3) =

(3, 5, 4) = 7872	(2, 2, 8) = 360	(1, 0, 11) = 30
(3, 4, 5) = 4320	(2, 1, 9) = 180	(0, 12, 0) = 11240
(3, 3, 6) = 2160	(2, 0, 10) = 90	(0, 11, 1) = 9240
(3, 2, 7) = 1080	(1, 11, 0) = 13240	(0, 10, 2) = 6780
(3, 1, 8) = 540	(1, 10, 1) = 11700	(0, 9, 3) = 4344
(3, 0, 9) = 270	(1, 9, 2) = 9216	(0, 8, 4) = 2464
(2, 10, 0) = 14780	(1, 8, 3) = 6224	(0, 7, 5) = 1280
(2, 9, 1) = 14184	(1, 7, 4) = 3648	(0, 6, 6) = 640
(2, 8, 2) = 12208	(1, 6, 5) = 1920	(0, 5, 7) = 320
(2, 7, 3) = 8800	(1, 5, 6) = 960	(0, 4, 8) = 160
(2, 6, 4) = 5376	(1, 4, 7) = 480	(0, 3, 9) = 80
(2, 5, 5) = 2880	(1, 3, 8) = 240	(0, 2, 10) = 40
(2, 4, 6) = 1440	(1, 2, 9) = 120	(0, 1, 11) = 20
(2, 3, 7) = 720	(1, 1, 10) = 60	(0, 0, 12) = 10

E) Anzahlen für Flächen zweiten Grades, die in einem festen [4] liegen, und deren dreidimensionaler linearer Raum keine besondere Lagebedingung erfüllt:

(13, 0, 0) = 2865	(8, 1, 4) = 16968	(5, 5, 3) = 24640
(12, 1, 0) = 4390	(8, 0, 5) = 9220	(5, 4, 4) = 16096
(12, 0, 1) = 5915	(7, 6, 0) = 23040	(5, 3, 5) = 8880
(11, 2, 0) = 6580	(7, 5, 1) = 27840	(5, 2, 6) = 4440
(11, 1, 1) = 8770	(7, 4, 2) = 32736	(5, 1, 7) = 2220
(11, 0, 2) = 11625	(7, 3, 3) = 28656	(5, 0, 8) = 1110
(10, 3, 0) = 9600	(7, 2, 4) = 19304	(4, 9, 0) = 28416
(10, 2, 1) = 12620	(7, 1, 5) = 10580	(4, 8, 1) = 28032
(10, 1, 2) = 16470	(7, 0, 6) = 5290	(4, 7, 2) = 25344
(10, 0, 3) = 15015	(6, 7, 0) = 26880	(4, 6, 3) = 19008
(9, 4, 0) = 13536	(6, 6, 1) = 30720	(4, 5, 4) = 11936
(9, 3, 1) = 17472	(6, 5, 2) = 33600	(4, 4, 5) = 6480
(9, 2, 2) = 22324	(6, 4, 3) = 28384	(4, 3, 6) = 3240
(9, 1, 3) = 20198	(6, 3, 4) = 18992	(4, 2, 7) = 1620
(9, 0, 4) = 13411	(6, 2, 5) = 10520	(4, 1, 8) = 810
(8, 5, 0) = 18240	(6, 1, 6) = 5260	(4, 0, 9) = 405
(8, 4, 1) = 22944	(6, 0, 7) = 2630	(3, 10, 0) = 26080
(8, 3, 2) = 28416	(5, 8, 0) = 28800	(3, 9, 1) = 23744
(8, 2, 3) = 25408	(5, 7, 1) = 30720	(3, 8, 2) = 19456
	(5, 6, 2) = 30720	(3, 7, 3) = 13568
		(3, 6, 4) = 8128

(3, 5, 5) = 4320	(2, 2, 9) = 180	(1, 0, 12) = 15
(3, 4, 6) = 2160	(2, 1, 10) = 90	
(3, 3, 7) = 1080	(2, 0, 11) = 45	(0, 13, 0) = 14960
(3, 2, 8) = 540		(0, 12, 1) = 11200
(3, 1, 9) = 270	(1, 12, 0) = 18720	(0, 11, 2) = 7560
(3, 0, 10) = 135	(1, 11, 1) = 14840	(0, 10, 3) = 4560
	(1, 10, 2) = 10560	(0, 9, 4) = 2496
(2, 11, 0) = 22600	(1, 9, 3) = 6624	(0, 8, 5) = 1280
(2, 10, 1) = 19120	(1, 8, 4) = 3712	(0, 7, 6) = 640
(2, 9, 2) = 14496	(1, 7, 5) = 1920	(0, 6, 7) = 320
(2, 8, 3) = 9536	(1, 6, 6) = 960	(0, 5, 8) = 160
(2, 7, 4) = 5504	(1, 5, 7) = 480	(0, 4, 9) = 80
(2, 6, 5) = 2880	(1, 4, 8) = 240	(0, 3, 10) = 40
(2, 5, 6) = 1440	(1, 3, 9) = 120	(0, 2, 11) = 20
(2, 4, 7) = 720	(1, 2, 10) = 60	(0, 1, 12) = 10
(2, 3, 8) = 360	(1, 1, 11) = 30	(0, 0, 13) = 5

Es giebt also z. B. in einem vierdimensionalen linearen Raume 8128 Flächen zweiten Grades, welche drei gegebene Strahlen schneiden, sechs gegebene Ebenen und vier gegebene dreidimensionale lineare Räume berühren.

V. Anzahlen für dreidimensionale Räume zweiten Grades, die in einem vierdimensionalen linearen Raume liegen.

Für den R im [4] ist in die Formel (2) $n = 4$ zu setzen. Man erhält dann für $k = 0, 1, 2, 3$ die vier Formeln:

$$(6)\qquad \begin{cases} 5\mu_0 = 4\varphi_0 + 3\varphi_1 + 2\varphi_2 + \varphi_3 \\ 5\mu_1 = 3\varphi_0 + 6\varphi_1 + 4\varphi_2 + 2\varphi_3 \\ 5\mu_2 = 2\varphi_0 + 4\varphi_1 + 6\varphi_2 + 3\varphi_0 \\ 5\mu_3 = \varphi_0 + 2\varphi_1 + 3\varphi_2 + 4\varphi_3, \end{cases}$$

wo für ein gegebenes in einem [4] liegendes einstufiges System von dreidimensionalen Räumen zweiten Grades:

μ_0 bedeutet, wieviel Räume des Systems durch einen gegebenen Punkt gehen;

μ_1 bedeutet, wieviel einen gegebenen Strahl berühren;

μ_2 bedeutet, wieviel eine gegebene Ebene berühren (μ_2 ist dual zu μ_1);

μ_3 bedeutet, wieviel einen gegebenen [3] berühren (μ_3 ist dual zu μ_0);

φ_0 bedeutet, wieviel Räume des Systems so ausgeartet sind, dafs

die Punkte einen doppelt zu rechnenden [3] bilden, dafs die Tangenten die sämtlichen Sekanten einer in diesem [3] liegenden Fläche zweiten Grades bilden, dafs die Tangentialebenen sämtlichen Ebenen durch die Tangenten dieser Fläche bilden und dafs die berührenden [3] die sämtlichen [3] sind, die sich die Tangentialebenen dieser Fläche legen lassen;

wieviel Räume des Systems so ausgeartet sind, dafs zwei dreidimensionale lineare Räume bilden, dafs Tangenten, doppelt gerechnet, die sämtlichen Strahlen sind, welche die Schnittebene der beiden [3] treffen können, dafs die Tangentialebenen die sämtlichen Ebenen sind, welche einen auf dieser Ebene liegenden Kegelschnitt zu treffen vermögen, und dafs die berührenden [3] die sämtlichen [3] sind, die sich durch die Tangenten dieses Kegelschnitts legen lassen;

φ_2 die zu φ_1 vierdimensional-duale Bedeutung hat,

φ_3 die zu φ_0 vierdimensional-duale Bedeutung hat.

Die vier Formeln liefern mit vielen Bestätigungen die sämtlichen
680 dem R angehörigen elementaren Anzahlen $\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$, wo $m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 14$ ist, wenn die Ausartungsanzahlen berechnet vorliegen. Doch brauchen von diesen nur die auf φ_0 und φ_1 bezüglichen berechnet zu werden, weil φ_2 und φ_1, sowie φ_3 und φ_0 sich im [4] dual entsprechen, und deshalb z. B. $\varphi_2\mu_0^6\mu_1^1\mu_2^2\mu_3^4 = \varphi_1\mu_0^4\mu_1^2\mu_2^1\mu_3^6$ ist. Was die Zahlen φ_0 anbetrifft, so folgt aus der obigen Definition von φ_0, dafs jede Zahl $\varphi_0\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$, wo $m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 13$ ist, 2^{m_0}mal so grofs ist, als die in IV hinter (m_1, m_2, m_3) stehende Zahl. Was die Zahlen φ_1 anbetrifft, so ist jede der Zahlen $\varphi_1\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$ aus den 10 kleinen Tabellen in III zu entnehmen. Nur mufs die Bedingung $\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}$ vorher auf Bedingungen zurückgeführt werden, die sich auf die Kegelschnitt-Ebene der Ausartung φ_1 beziehen. Dies geschieht vermöge der Kombinationszahlen und der elementaren Anzahlen der Ebene in folgender Weise:

$$\mu_0^8 = \tfrac{1}{2}\cdot 8_4\cdot(0,1,2)$$

$$\mu_0^7 = 7_4\cdot(0,1,3)$$
$$\mu_0^7\mu_1 = 7_4\cdot 2^1\cdot(0,1,2)$$

$$\mu_0^6 = 6_4\cdot(0,2,3) + \tfrac{1}{2}\cdot 6_3\cdot[(0,2,3) + (0,1,4)]$$
$$\mu_0^6\mu_1 = 6_4\cdot 2^1\cdot(0,1,3) + \tfrac{1}{2}\cdot 6_3\cdot 2^1\cdot 2\cdot(0,1,3)$$

$$\mu_0^6\mu_1^2 = 6_4 \cdot 2^2 \cdot (0,1,2) + \tfrac{1}{2} \cdot 6_3 \cdot 2^2 \cdot 2 \cdot (0,1,2)$$

$$\mu_0^5 = 5_4 \cdot (1,2,3) + 5_3 \cdot [(1,2,3) + (0,2,4)]$$
$$\mu_0^5\mu_1 = 5_4 \cdot 2^1 \cdot (0,2,3) + 5_3 \cdot 2^1 \cdot [(0,1,4) + 2 \cdot (0,2,3)]$$
$$\mu_0^5\mu_1^2 = 5_4 \cdot 2^2 \cdot (0,1,3) + 5_3 \cdot 2^2 \cdot 3 \cdot (0,1,3)$$
$$\mu_0^5\mu_1^3 = 5_4 \cdot 2^3 \cdot (0,1,2) + 5_3 \cdot 2^3 \cdot 3 \cdot (0,1,2)$$

$$\mu_0^4 = 7 \cdot (1,2,4) + 3 \cdot (0,3,4)$$
$$\mu_0^4\mu_1 = 14 \cdot (1,2,3) + 20 \cdot (0,2,4)$$
$$\mu_0^4\mu_1^2 = 68 \cdot (0,2,3) + 40 \cdot (0,1,4)$$
$$\mu_0^4\mu_1^3 = 216 \cdot (0,1,3)$$
$$\mu_0^4\mu_1^4 = 432 \cdot (0,1,2)$$

$$\mu_0^3 = 3 \cdot (1,3,4)$$
$$\mu_0^3\mu_1 = 6 \cdot (1,2,4) + 6 \cdot (0,3,4)$$
$$\mu_0^3\mu_1^2 = 12 \cdot (1,2,3) + 24 \cdot (0,2,4)$$
$$\mu_0^3\mu_1^3 = 72 \cdot (0,2,3) + 48 \cdot (0,1,4)$$
$$\mu_0^3\mu_1^4 = 240 \cdot (0,1,3)$$
$$\mu_0^3\mu_1^5 = 480 \cdot (0,1,2)$$

$$\mu_0^2 = (2,3,4)$$
$$\mu_0^2\mu_1 = 2 \cdot (1,3,4)$$
$$\mu_0^2\mu_1^2 = 4 \cdot (1,2,4) + 4 \cdot (0,3,4)$$
$$\mu_0^2\mu_1^3 = 8 \cdot (1,2,3) + 16 \cdot (0,2,4)$$
$$\mu_0^2\mu_1^4 = 48 \cdot (0,2,3) + 32 \cdot (0,1,4)$$
$$\mu_0^2\mu_1^5 = 160 \cdot (0,1,3)$$
$$\mu_0^2\mu_1^6 = 320 \cdot (0,1,2)$$

Die unter diesen 28 Bedingungssymbolen nicht befindlichen, bei denen $\mu_0 < 2$ oder $\mu_0 + \mu_1 > 8$ ist, sind unerfüllbar, ergeben also Null. Ist nun $\varphi_1 \mu_0^{m_0} \mu_1^{m_1} \mu_2^{m_2} \mu_3^{m_3}$ zu bestimmen, so suchen wir zunächst unter den 28 Symbolen $\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}$ auf, und setzen in den dabei befindlichen Ausdruck für jedes (d, e, f) die in den 10 Tabellen von III unter (d, e, f) hinter (m_2, m_3) befindliche Zahl ein. Z. B. $\varphi_1\mu_0^5\mu_1\mu_2^4\mu_3^3 = 50\,(0,2,3)\mu_2^4\mu_3^3 + 20(0,1,4)\mu_2^4\mu_3^3 = 50 \cdot 72 + 20 \cdot 96 = 5520$. Hiernach sind die Ausartungsanzahlen φ_0, φ_1 und wegen der Dualität auch φ_2 und φ_3 für alle elementaren Systeme der Räume zweiten Grades leicht bestimmbar und dadurch auch vermöge der Formeln (6) die Zahlen $\mu_0^{m_0}\mu_1^{m_1}\mu_2^{m_2}\mu_3^{m_3}$, wo $m_0 + m_1 + m_2 + m_3 = 14$ ist, und zwar jede dieser Zahlen aus 1 bis 4 Systemen, also auf 1 bis 4fache Weise. So ergeben sich mit vielen Bestätigungen die Zahlen der folgenden Tabelle. Der Kürze wegen ist von zwei

:r Dualität gleichen Zahlen immer nur die eine geschrieben. eutet also immer $(m_0, m_1, m_2, m_3) = x$ sowohl, dafs 4] x Räume zweiten Grades giebt, von denen jeder m_0 gegebene Punkte geht, m_1 gegebene Strahlen, ebene Ebenen und m_3 gegebene [3] berührt, als afs es im [4] x Räume zweiten Grades giebt, von eder durch m_3 gegebene Punkte geht, m_2 gegebene n, m_1 gegebene Ebenen und m_0 gegebene [3] berührt. enthält die Tabelle 344 Anzahlen, die aber 680 Bedingungs- n entsprechen.

0, 0) = 1

0, 0) = 2
1, 0) = 3
0, 1) = 4

0, 0) = 4
1, 0) = 6
0, 1) = 8
2, 0) = 9
1, 1) = 12
0, 2) = 16

0, 0) = 8
1, 0) = 12
0, 1) = 16
2, 0) = 18
1, 1) = 24
0, 2) = 32
3, 0) = 27
2, 1) = 36
1, 2) = 48
0, 3) = 44

0, 0) = 16
1, 0) = 24
0, 1) = 32
2, 0) = 36
1, 1) = 48
0, 2) = 64
3, 0) = 54

(10, 1, 2, 1) = 72
(10, 1, 1, 2) = 96
(10, 1, 0, 3) = 88
(10, 0, 4, 0) = 81
(10, 0, 3, 1) = 108
(10, 0, 2, 2) = 144
(10, 0, 1, 3) = 132
(10, 0, 0, 4) = 86

(9, 5, 0, 0) = 32
(9, 4, 1, 0) = 48
(9, 4, 0, 1) = 64
(9, 3, 2, 0) = 72
(9, 3, 1, 1) = 96
(9, 3, 0, 2) = 128
(9, 2, 3, 0) = 108
(9, 2, 2, 1) = 144
(9, 2, 1, 2) = 192
(9, 2, 0, 3) = 176
(9, 1, 4, 0) = 162
(9, 1, 3, 1) = 216
(9, 1, 2, 2) = 288
(9, 1, 1, 3) = 264
(9, 1, 0, 4) = 172
(9, 0, 5, 0) = 243
(9, 0, 4, 1) = 324
(9, 0, 3, 2) = 432
(9, 0, 2, 3) = 396
(9, 0, 1, 4) = 258
(9, 0, 0, 5) = 137

(8, 6, 0, 0) = 64
(8, 5, 1, 0) = 96
(8, 5, 0, 1) = 128
(8, 4, 2, 0) = 144
(8, 4, 1, 1) = 192
(8, 4, 0, 2) = 256
(8, 3, 3, 0) = 216
(8, 3, 2, 1) = 288
(8, 3, 1, 2) = 384
(8, 3, 0, 3) = 352
(8, 2, 4, 0) = 324
(8, 2, 3, 1) = 432
(8, 2, 2, 2) = 576
(8, 2, 1, 3) = 528
(8, 2, 0, 4) = 344
(8, 1, 5, 0) = 486
(8, 1, 4, 1) = 648
(8, 1, 3, 2) = 864
(8, 1, 2, 3) = 792
(8, 1, 1, 4) = 516
(8, 1, 0, 5) = 274
(8, 0, 6, 0) = 694
(8, 0, 5, 1) = 902
(8, 0, 4, 2) = 1156
(8, 0, 3, 3) = 1048
(8, 0, 2, 4) = 704
(8, 0, 1, 5) = 376
(8, 0, 0, 6) = 188

(7, 7, 0, 0) = 128

(7, 6, 1, 0) = 192
(7, 6, 0, 1) = 256
(7, 5, 2, 0) = 288
(7, 5, 1, 1) = 384
(7, 5, 0, 2) = 512
(7, 4, 3, 0) = 432
(7, 4, 2, 1) = 576
(7, 4, 1, 2) = 768
(7, 4, 0, 3) = 704
(7, 3, 4, 0) = 648
(7, 3, 3, 1) = 864
(7, 3, 2, 2) = 1152
(7, 3, 1, 3) = 1056
(7, 3, 0, 4) = 688
(7, 2, 5, 0) = 972
(7, 2, 4, 1) = 1296
(7, 2, 3, 2) = 1728
(7, 2, 2, 3) = 1584
(7, 2, 1, 4) = 1032
(7, 2, 0, 5) = 548
(7, 1, 6, 0) = 1388
(7, 1, 5, 1) = 1804
(7, 1, 4, 2) = 2312
(7, 1, 3, 3) = 2096
(7, 1, 2, 4) = 1408
(7, 1, 1, 5) = 752
(7, 1, 0, 6) = 376
(7, 0, 7, 0) = 1802
(7, 0, 6, 1) = 2216
(7, 0, 5, 2) = 2628
(7, 0, 4, 3) = 2304
(7, 0, 3, 4) = 1552
(7, 0, 2, 5) = 848
(7, 0, 1, 6) = 424
(7, 0, 0, 7) = 212

(6, 8, 0, 0) = 256
(6, 7, 1, 0) = 384
(6, 7, 0, 1) = 512
(6, 6, 2, 0) = 576
(6, 6, 1, 1) = 768

(6, 6, 0, 2) = 1024
(6, 5, 3, 0) = 864
(6, 5, 2, 1) = 1152
(6, 5, 1, 2) = 1536
(6, 5, 0, 3) = 1408
(6, 4, 4, 0) = 1296
(6, 4, 3, 1) = 1728
(6, 4, 2, 2) = 2304
(6, 4, 1, 3) = 2112
(6, 4, 0, 4) = 1376
(6, 3, 5, 0) = 1944
(6, 3, 4, 1) = 2592
(6, 3, 3, 2) = 3456
(6, 3, 2, 3) = 3168
(6, 3, 1, 4) = 2064
(6, 3, 0, 5) = 1096
(6, 2, 6, 0) = 2776
(6, 2, 5, 1) = 3608
(6, 2, 4, 2) = 4624
(6, 2, 3, 3) = 4192
(6, 2, 2, 4) = 2816
(6, 2, 1, 5) = 1504
(6, 2, 0, 6) = 752
(6, 1, 7, 0) = 3604
(6, 1, 6, 1) = 4432
(6, 1, 5, 2) = 5256
(6, 1, 4, 3) = 4608
(6, 1, 3, 4) = 3104
(6, 1, 2, 5) = 1696
(6, 1, 1, 6) = 848
(6, 0, 8, 0) = 4166
(6, 0, 7, 1) = 4728
(6, 0, 6, 2) = 5024
(6, 0, 5, 3) = 4152
(6, 0, 4, 4) = 2736
(6, 0, 3, 5) = 1504

(5, 9, 0, 0) = 512
(5, 8, 1, 0) = 768
(5, 8, 0, 1) = 1024
(5, 7, 2, 0) = 1152

(5, 7, 1, 1) = 1536
(5, 7, 0, 2) = 2048
(5, 6, 3, 0) = 1728
(5, 6, 2, 1) = 2304
(5, 6, 1, 2) = 3072
(5, 6, 0, 3) = 2816
(5, 5, 4, 0) = 2592
(5, 5, 3, 1) = 3456
(5, 5, 2, 2) = 4608
(5, 5, 1, 3) = 4224
(5, 5, 0, 4) = 2752
(5, 4, 5, 0) = 3888
(5, 4, 4, 1) = 5184
(5, 4, 3, 2) = 6912
(5, 4, 2, 3) = 6336
(5, 4, 1, 4) = 4128
(5, 4, 0, 5) = 2192
(5, 3, 6, 0) = 5552
(5, 3, 5, 1) = 7216
(5, 3, 4, 2) = 9248
(5, 3, 3, 3) = 8384
(5, 3, 2, 4) = 5632
(5, 3, 1, 5) = 3008
(5, 2, 7, 0) = 7208
(5, 2, 6, 1) = 8864
(5, 2, 5, 2) = 10512
(5, 2, 4, 3) = 9216
(5, 2, 3, 4) = 6208
(5, 2, 2, 5) = 3392
(5, 1, 8, 0) = 8332
(5, 1, 7, 1) = 9456
(5, 1, 6, 2) = 10048
(5, 1, 5, 3) = 8304
(5, 1, 4, 4) = 5472
(5, 0, 9, 0) = 8628
(5, 0, 8, 1) = 8924
(5, 0, 7, 2) = 8392
(5, 0, 6, 3) = 6416
(5, 0, 5, 4) = 4048

(4, 10, 0, 0) = 1008

, 1, 0) = 1504
, 0, 1) = 2000
, 2, 0) = 2240
, 1, 1) = 2976
, 0, 2) = 3952
, 3, 0) = 3328
, 2, 1) = 4416
, 1, 2) = 5856
, 0, 3) = 5360
, 4, 0) = 4928
, 3, 1) = 6528
, 2, 2) = 8640
, 1, 3) = 7904
, 0, 4) = 5168
, 5, 0) = 7264
, 4, 1) = 9600
, 3, 2) = 12672
, 2, 3) = 11584
, 1, 4) = 7584
, 6, 0) = 10208
, 5, 1) = 13152
, 4, 2) = 16704
, 3, 3) = 15104
, 2, 4) = 10176
, 7, 0) = 13136
, 6, 1) = 16064
, 5, 2) = 18976
, 4, 3) = 16640
, 3, 4) = 11264
, 8, 0) = 15192
, 7, 1) = 17248
, 6, 2) = 18432
, 5, 3) = 15328
, 9, 0) = 15784
1, 8, 1) = 16376
1, 7, 2) = 15504
1, 6, 3) = 11936
0, 10, 0) = 14993
0, 9, 1) = 14202
0, 8, 2) = 12028

(4, 0, 7, 3) = 8552

(3, 11, 0, 0) = 1896
(3, 10, 1, 0) = 2784
(3, 10, 0, 1) = 3672
(3, 9, 2, 0) = 4064
(3, 9, 1, 1) = 5344
(3, 9, 0, 2) = 7016
(3, 8, 3, 0) = 5888
(3, 8, 2, 1) = 7712
(3, 8, 1, 2) = 10080
(3, 8, 0, 3) = 9184
(3, 7, 4, 0) = 8448
(3, 7, 3, 1) = 11008
(3, 7, 2, 2) = 14304
(3, 7, 1, 3) = 13008
(3, 6, 5, 0) = 11968
(3, 6, 4, 1) = 15488
(3, 6, 3, 2) = 19968
(3, 6, 2, 3) = 18112
(3, 5, 6, 0) = 16192
(3, 5, 5, 1) = 20416
(3, 5, 4, 2) = 25344
(3, 5, 3, 3) = 22720
(3, 4, 7, 0) = 20256
(3, 4, 6, 1) = 24320
(3, 4, 5, 2) = 28224
(3, 4, 4, 3) = 24576
(3, 3, 8, 0) = 23056
(3, 3, 7, 1) = 25856
(3, 3, 6, 2) = 27392
(3, 2, 9, 0) = 23840
(3, 2, 8, 1) = 24624
(3, 2, 7, 2) = 23392
(3, 1, 10, 0) = 22626
(3, 1, 9, 1) = 21412
(3, 1, 8, 2) = 18200
(3, 0, 11, 0) = 20089
(3, 0, 10, 1) = 17552
(3, 0, 9, 2) = 13692

(2, 12, 0, 0) = 3312
(2, 11, 1, 0) = 4728
(2, 11, 0, 1) = 6144
(2, 10, 2, 0) = 6672
(2, 10, 1, 1) = 8616
(2, 10, 0, 2) = 11088
(2, 9, 3, 0) = 9280
(2, 9, 2, 1) = 11888
(2, 9, 1, 2) = 15160
(2, 8, 4, 0) = 12672
(2, 8, 3, 1) = 16064
(2, 8, 2, 2) = 20240
(2, 7, 5, 0) = 16896
(2, 7, 4, 1) = 21120
(2, 7, 3, 2) = 26176
(2, 6, 6, 0) = 21504
(2, 6, 5, 1) = 26112
(2, 6, 4, 2) = 31104
(2, 5, 7, 0) = 25536
(2, 5, 6, 1) = 29568
(2, 5, 5, 2) = 33024
(2, 4, 8, 0) = 27936
(2, 4, 7, 1) = 30336
(2, 3, 9, 0) = 28096
(2, 3, 8, 1) = 28256
(2, 2, 10, 0) = 26172
(2, 2, 9, 1) = 24248
(2, 1, 11, 0) = 22938
(2, 1, 10, 1) = 19704
(2, 0, 12, 0) = 19167
(2, 0, 11, 1) = 15396

(1, 13, 0, 0) = 5284
(1, 12, 1, 0) = 7256
(1, 12, 0, 1) = 9228
(1, 11, 2, 0) = 9784
(1, 11, 1, 1) = 12312
(1, 10, 3, 0) = 12896
(1, 10, 2, 1) = 16008
(1, 9, 4, 0) = 16512
(1, 9, 3, 1) = 20128

(1, 8, 5, 0) = 20352	(1, 3, 10, 0) = 22784	(0, 11, 3, 0) = 16192
(1, 8, 4, 1) = 24192	(1, 2, 11, 0) = 19396	(0, 10, 4, 0) = 19488
(1, 7, 6, 0) = 23808	(1, 1, 12, 0) = 15854	(0, 9, 5, 0) = 22464
(1, 7, 5, 1) = 27264	(1, 0, 13, 0) = 12541	(0, 8, 6, 0) = 24576
(1, 6, 7, 0) = 26112		(0, 7, 7, 0) = 25344
(1, 6, 6, 1) = 28416	(0, 14, 0, 0) = 7703	
(1, 5, 8, 0) = 26688	(0, 13, 1, 0) = 10122	
(1, 4, 9, 0) = 25440	(0, 12, 2, 0) = 12988	

Wir bitten in Heft 8 S. 234 Zeile 2 von oben statt 20′ zu lesen 2[illegible].

Festschrift,

herausgegeben von der

Mathematischen Gesellschaft

in

Hamburg

anlässlich ihres

200jährigen Jubelfestes 1890.

Erster Teil:

Geschichte der Gesellschaft von 1690 bis 1890,

zugleich Anfang von Band II der „Mitteilungen".

Leipzig,

Commissionsverlag von B. G. Teubner.

1890.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Vorrede.

Als zu Fastnacht 1690 Heinrich Meifsner, um sich durch den Verkehr mit Fachgenossen mathematische Anregung zu verschaffen, in Hamburg einen Verein gründete, der die Pflege der Mathematik auf sein Banner schrieb, hat er gewifs nicht geahnt, dafs dieser Verein allen Stürmen der Zeit Trotz bieten und noch nach zwei Jahrhunderten der Sammelpunkt der in Hamburg vorhandenen mathematischen Interessen sein würde. Aber der Boden Hamburgs war für wissenschaftliches Leben gesund genug, um es zu ermöglichen, dafs wir jetzt in Hamburg ein Jubelfest feiern können, wie es auf dem ganzen Erdenrund noch nie gefeiert ist — das zweihundertjährige Jubelfest eines freien mathematischen Vereins. Auch wenn wir nicht unter den mathematischen allein, sondern unter allen wissenschaftlichen Vereinigungen der Welt Rundschau halten, so finden wir nur wenige, die auf eine Lebensdauer von zweihundert oder mehr Jahren zurückblicken können. Und diese sind überdies keine freien Vereine, sondern entweder Staats-Institute oder doch Akademien, die sich dauernd einer staatlichen Unterstützung erfreuen konnten. Zu den letzteren gehört auch die Leopoldinisch-Carolinische Akademie der Naturforscher und Ärzte, welche, im Jahre 1652 gegründet, die einzige wissenschaftliche Societät Deutschlands ist, die ein höheres Alter hat, als die mathematische Gesellschaft in Hamburg. Und dafs diese zweitälteste aller deutschen Gesellschaften, die wissenschaftliche Ziele verfolgen, gerade in der grossen Handelsstadt gegründet ist, gereicht der letztern zur hohen Ehre und ist eine Stütze für die Behauptung, dafs in Hamburg von jeher über den Erwerbs-Interessen die Pflege der wissenschaftlichen Interessen nicht vergessen wurde. So ist unser Jubelfest nicht nur ein Fest für die gesamte mathematische Welt Deutschlands, sondern auch für die gesamte wissenschaftliche Welt Hamburgs. Ja, wir möchten sagen, das Fest ist weniger ein mathematisches als ein hamburgisches. Denn unser Verein fördert weniger die Entwickelung der Mathematik im allgemeinen als das geistige Leben der durch ihren Beruf der Mathematik nahe stehenden

Hamburger. Obwohl nämlich die mathematische Gesellschaft in Hamburg im Laufe der beiden Jahrhunderte mehrere Mathematiker ersten Ranges zu ihren Mitgliedern zählte, so hat sie dennoch nie einen nennenswerten Einfluſs auf den gewaltigen Fortschritt ausgeübt, den die Mathematik in dieser Zeit gemacht hat. Und auch auf die heutige mathematische Forschung kann eine Gesellschaft, die ihren Sitz in einer Nicht-Universitätsstadt hat, keinen bestimmenden Einfluſs ausüben. Dagegen hat sie unzweifelhaft eine groſse Bedeutung durch die Anregung, die sie den in Hamburg und Umgegend ansässigen theoretischen und praktischen Mathematikern bietet. Wie viele Lehrer, die als Studenten zu den höchsten Hoffnungen berechtigten, verkümmern in wissenschaftlicher Vereinsamung und verlieren in der harten Berufsarbeit die Geistesschwingen, die für die Forschung unerläſslich sind! Auch die Mitglieder unserer Gesellschaft stehen ausnahmslos in praktischer Berufsthätigkeit, und da ist ihnen dann die allmonatlich stattfindende Sitzung mit ihren Vorträgen und Referaten nicht nur eine Quelle fruchtbarer Gedanken, durch die sie an dem Fortschritt der Mathematik Anteil nehmen können, sondern auch ein Antrieb, auf neue und immer bessere Weise die groſse Münze der Wissenschaft in das Kleingeld des täglichen Berufs umzusetzen.

Dem hamburgischen und dem mathematischen Charakter des Jubelfestes entsprechend, hat auch diese Festschrift einen doppelten Charakter. Durch ihren ersten Teil trägt sie der hamburgischen Seite des Jubelfestes Rechnung, durch ihren zweiten Teil der mathematischen Seite, und in ihrem dritten Teil ist sie sowohl hamburgisch wie mathematisch. Der erste Teil nämlich, der bei B. G. Teubner in Leipzig erscheint, behandelt die Geschichte der Gesellschaft und bildet dadurch einen kleinen Beitrag zur Kulturgeschichte Hamburgs; der zweite Teil, der gleichfalls von Teubner verlegt wird, enthält mathematische Abhandlungen von acht der bedeutendsten auswärtigen Mathematiker Deutschlands und von dreizehn Mitgliedern; der dritte Teil endlich, der in der Verlags-Anstalt A. G. (vorm. J. F. Richter) hierselbst erscheint, enthält einen Katalog aller auf den vielen Hamburger Bibliotheken zerstreuten Litteraturerscheinungen aus allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik und Physik mit Angabe derjenigen Bibliotheken, auf denen die betreffende Schrift zu haben ist. Der erste und der zweite Teil sollen zugleich eine Fortsetzung der von der Gesellschaft alljährlich herausgegebenen „Mitteilungen“ sein und den zweiten Band derselben bilden.

Wenn wir uns schon seit anderthalb Jahren gerüstet haben, um

eine so reichhaltige Festschrift herauszugeben, so trieb uns dazu weder Stolz noch Selbstzufriedenheit, sondern einzig und allein das pietätvolle und dankbare, aber auch anspornende Andenken an die Gründer der Gesellschaft und an deren Förderer in früheren Zeiten. Wie beim hundertjährigen Stiftungsfeste 1790 der Verein durch Annahme des Namens „Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Wissenschaften" es als seine Hauptaufgabe bezeichnete, andern die Pflege der Mathematik zu erleichtern, so wollten auch wir beim zweihundertjährigen Jubelfeste dazu beitragen, dafs jetzt und künftig für uns und andere die mathematische Forschung in Hamburg erleichtert werde. Aus dieser Absicht entsprang der Gedanke, als dritten Teil der Festschrift den „Katalog" zu verfassen, der es dem Liebhaber und Forscher in der Mathematik und Physik ermöglichen soll, sich schnell zu überzeugen, welche Schriften seines besonderen Fachs auf Hamburger Bibliotheken zu haben sind, und in welcher Bibliothek eine von ihm gesuchte Schrift vorhanden ist. In den beteiligten Kreisen Hamburgs war das Bedürfnis nach einem solchen möglichst vollständigen Kataloge schon seit vielen Jahren empfunden. Doch konnte dem Verlangen bis jetzt nicht abgeholfen werden, einerseits, weil sich niemand fand, der die Zeit für die Vorarbeiten und das Korrekturlesen opfern wollte, andrerseits auch, weil keine Geldmittel für diesen Zweck vorhanden waren. Aber die Munificenz Eines Hohen Senates, der mit Zustimmung des Bürgerausschusses anläfslich des seltenen Festes uns für die Herstellung eines derartigen Katalogs eine erhebliche Geldsumme zur Verfügung stellte, hat es uns nunmehr ermöglicht, die hohen Druckkosten bestreiten zu können. Wir sprechen Einem Hohen Senate und dem Bürgerausschufs bei diesem erneuten Beweise ihrer Fürsorge für wissenschaftliche Bestrebungen unsern ehrerbietigsten Dank aus und hoffen, dafs dieselben unsern Dank nicht allein in diesen Worten, sondern auch darin erkennen, dafs wir achtzehn Monate hindurch einen grofsen Teil unserer Kraft und Zeit willig opferten, um das mühevolle Werk zur Vollendung zu bringen. Der Katalog zerfällt in vier Hefte. Das erste Heft enthält die Schriften der Akademien, Institute, Vereine u. s. w., sowie die Zeitschriften; das zweite Heft umfafst die vor 1700 erschienene sonstige Litteratur; das dritte Heft enthält die von 1700 bis 1799 erschienenen Schriften; das vierte umfangreichste Heft umfafst die ganze von 1800 bis 1888 erschienene Litteratur, einschliefslich der Dissertationen und Sonder-Abzüge. Während das zweite und das dritte Heft nur nach den Autoren alphabetisch geordnet sind, zerfällt das für die wissenschaftliche Forschung unserer Tage wichtigere vierte Heft zunächst in

36 Fächer, deren jedes die Verfasser in alphabetischer Ordnung enthält. Bei der Drucklegung des ersten Heftes war der unterzeichnete Hoppe, bei der des zweiten und dritten Heftes Herr Dr. Järisch und bei der des vierten Heftes der unterzeichnete Schubert vorwiegend thätig. So ist denn ein Werk von fast vierhundert Druckseiten entstanden, das um so mehr eine dauernde Erinnerung an das Jubelfest bilden wird, als wir uns verpflichtet haben, etwa alle zwei Jahre Ergänzungs-Kataloge herauszugeben, welche die Neuanschaffungen sowie eventuelle Berichtigungen enthalten. Bei den Vorarbeiten und den Korrekturen haben uns aufser Mitgliedern der Gesellschaft auch mehrere Nichtmitglieder nach verschiedenen Richtungen hin dankenswerte Hilfe gewährt, namentlich Herr Professor Dr. Köppen, Abteilungs-Vorsteher der Deutschen Seewarte, sowie Herr Heinr. Strack. Allen diesen Herren sagen wir unsern verbindlichsten Dank, ebenso den Bibliotheks-Verwaltungen und -Beamten, die unsere Arbeit unterstützt haben. Auch dürfen wir nicht unterlassen, dem Kand. des höh. Schulamts Herrn Schneidemühl für die Sorgfalt zu danken, mit der er sich des Auftrags entledigte, aus den Kladden das für die Druckerei bestimmte Manuskript herzustellen.

Indem wir in dem Jubelfest des ältesten mathematischen Vereins der Welt auch ein Fest der deutschen Mathematik sahen, glaubten wir unter den bedeutendsten deutschen Mathematikern diejenigen, welche nähere Beziehungen zu uns hatten, um kleine Beiträge zum wissenschaftlichen Teile der Festschrift bitten zu dürfen. Da fast alle aufgeforderten Mathematiker diese Bitte zu unserer Freude bereitwilligst erfüllten, so enthält der zweite Teil der Festschrift nicht allein Arbeiten von Mitgliedern, sondern auch äufserst wertvolle Abhandlungen von acht auswärtigen deutschen Mathematikern, nämlich den Herren Prof. Bruns in Leipzig, Prof. M. Cantor in Heidelberg, Prof. Günther in München, Prof. Hurwitz in Königsberg, Prof. Kronecker in Berlin, Prof. Netto in Gieſsen, Prof. Reye in Strafsburg und Prof. Sturm in Münster. So giebt der zweite Teil der Festschrift nicht allein ein Bild des wissenschaftlichen Lebens in unserer Gesellschaft, sondern auch ein Bild von der heutigen mathematischen Forschung in Deutschland. Allen den auswärtigen Mathematikern, welche durch ihre Beiträge unserer Festschrift einen besonderen Glanz verliehen haben, unsern aufrichtigsten Dank! Von Mitgliedern haben folgende Herren kleine Abhandlungen geliefert: Ahlborn, Bock, Busche in Bergedorf, Eichler in Altona, Hoppe, Järisch, Keferstein, Kiefsling, Köpcke in Ottensen, Krüfs, Lazarus, Schröder, Schubert.

Der erste Teil der Festschrift enthält nach dieser Vorrede die von dem unterzeichneten Bubendey verfafste Geschichte der Gesellschaft, eine von unserm Ehrenmitgliede Professor Bierens de Haan in Leyden verfafste Abhandlung über die holländischen Mitglieder unserer Gesellschaft im vorigen Jahrhundert, dann das vollständige Mitglieder-Verzeichnis von 1690 bis 1890, die ersten Statuten (leges) und endlich einen Abdruck des der Gesellschaft im Jahre 1699 verliehenen kaiserlichen Privilegium impressorium. Da das Original des letztern beim grofsen Brande im Mai 1842 mit dem Archiv und der Bibliothek ein Opfer der Flammen geworden war und eine Abschrift des Privilegs sonst nicht vorhanden zu sein schien, so erbaten wir unter empfehlender Fürsprache Eines Hohen Senates die Hilfe des Auswärtigen Amtes, damit in Wien wegen dieses Privilegs angefragt werde. Schon nach einigen Wochen wurden uns abseiten des königl. Preufs. Gesandten Excellenz von Kusserow die den Wiener Archiven entnommenen Abschriften der der Gesellschaft von 1699 bis 1740 erteilten Privilegia impressoria überreicht. Wir verfehlen nicht, auch an dieser Stelle für das überaus gütige Entgegenkommen bei der Erfüllung unsrer Bitte unsern ehrerbietigsten Dank auszusprechen.

Für die Herstellung des ersten und zweiten Teils der Festschrift reichten die Mittel der Gesellschaftskasse um so weniger aus, als die Druckkosten des Katalogs sich höher beliefen, als wir ursprünglich angenommen hatten. Mit gröfster Bereitwilligkeit stellten uns jedoch die Averhof-Stiftung und die Kellinghusen-Stiftung die Geldmittel für den Druck der beiden ersten Teile, die Patriotische Gesellschaft die Geldmittel für die Mehrkosten des Katalogs zur Verfügung. Wir sagen diesen drei um hamburgische wissenschaftliche Unternehmungen so hochverdienten Gesellschaften unsern wärmsten Dank.

So wandre denn die Festschrift hinaus, um allerorts zu verkünden, dafs Mitte Februar 1890 in Hamburg ein seltenes Jubelfest begangen wird, das Hamburg zur Ehre, der deutschen Wissenschaft zur Freude, der Mathematik zum Ruhme und uns zum Glücke gereiche!

Hamburg, im Dezember 1889.

Der Vorstand
der mathematischen Gesellschaft in Hamburg:
Professor Dr. **Schubert**, Jahrverwalter;
Bauinspektor **Bubendey**, Mitjahrverwalter;
Oberlehrer Dr. **Hoppe**, Adjunkt.

Geschichte der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg 1690 bis 1890.

(Von J. F. Bubendey in Hamburg.)

Nicht an dem Sitze mit fürstlichen Mitteln ausgestatteter gelehrten Anstalten hat die älteste Mathematische Gesellschaft und die zweitälteste der noch bestehenden wissenschaftlichen Vereinigungen in deutschen Landen ihren Ursprung genommen, nicht aus dem Kreise der eigentlichen Fachgelehrten ist dieselbe hervorgegangen, sondern die grofse Handelsstadt war der Boden, dem die Gesellschaft entsprossen, und ihre Stifter waren einfache Schullehrer, welche die für den Handelsstand bestimmten Knaben in der Rechenkunst zu unterweisen hatten!

Diese Schullehrer hatten erkannt, dafs nicht durch mechanische Einübung von unverstandenen hergebrachten Regeln, sondern nur durch geordnetes Arbeiten nach wissenschaftlich begründetem Plane tüchtige Rechner erzogen werden konnten.

In rühmlicher Selbstzucht hatten sie sich deshalb aus dem Schatze der alten und neuen mathematischen Schriften unterrichtet und waren bis zu einem Grade des Wissens und Könnens auf dem Gebiete der Algebra und Geometrie, wie auch der angewandten Mathematik vorgedrungen, welcher das hohe Lob der Zeitgenossen errang.

Auch wir werden diesen Männern unsere höchste Anerkennung zollen, wenn wir ihre Leistungen im Lichte ihrer Zeit, also unter Berücksichtigung des damaligen Standes der mathematischen Wissenschaften und der denselben in Deutschland und besonders in Hamburg zu teil gewordenen Pflege, sowie ihr ernstes Streben, welches sich in der Gründung und Fortführung der „Mathematischen Gesellschaft“ kund that, einer eingehenden Untersuchung unterzogen haben.

Wir werden dann sehen, wie die Gesellschaft im Sinne und nach den Überlieferungen ihrer Stifter durch drei Geschlechter weitergeführt ist, bis nach Ablauf eines Jahrhunderts durchaus neue Elemente in den Kreis derselben gezogen wurden.

Ein Blick auf die mannigfaltige Entwickelung des Gesellschaftslebens im letztverflossenen Jahrhundert wird uns endlich zu der Hoff-

nung berechtigen, dafs auch kommende Geschlechter sich noch des Nutzens erfreuen werden, den das einmütige Zusammenwirken der verschiedenartigen Elemente bietet, welche in der „Mathematischen Gesellschaft“ beim Beginne des dritten Jahrhunderts ihrer Thätigkeit zu gemeinsamer Arbeit vereinigt sind.

Das Abendland hatte auf mathematischem Gebiete in jahrhundertelanger Arbeit die Errungenschaften der Griechen, Inder und Araber unter Benutzung lateinischer und arabischer Quellen der Hauptsache nach erworben, als infolge der Eroberung Konstantinopels und der dadurch herbeigeführten Übersiedelung vieler griechischen Gelehrten nach dem Westen reiche Schätze griechischer Litteratur Verbreitung fanden und die griechische Sprache in den Kreis der gelehrten Forschungen eingefügt wurde. Das Studium der griechischen Mathematiker in der Ursprache gab neue Anregungen, während die von dem Zwange überlieferter Vorurteile sich befreiende Naturforschung weitergehende Anforderungen an die Leistungen der Mathematik stellte. Die Erfindung der Buchdruckerkunst ermöglichte die leichtere Verbreitung der gewonnenen Kenntnisse.

Es war deshalb kein Wunder, dafs das 16. Jahrhundert fast überall entschiedene Fortschritte in der mathematischen Erkenntnis aufwies.

Während in Italien die Algebra und namentlich die Auflösung der höheren Gleichungen durch Tartaglia, Cardano, Ferrari u. a. wesentlich gefördert wurden, veröffentlichte in Deutschland Michael Stiefel (1544) seine Arithmetik und Algebra und führte in derselben als wichtige Neuerungen in der Darstellungsform den Gebrauch der Zeichen für die verschiedenen Rechnungsoperationen, sowie die Bezeichnung der unbekannten Gröfsen durch Buchstaben ein. Georg Joachim (Rhäticus) berechnete, den früheren Arbeiten von Purbach und Regiomontanus folgend, ausführliche Sinustafeln. In den Niederlanden bestimmten gegen Ende des Jahrhunderts zuerst Adrianus Romanus und dann Ludolph von Ceulen das Verhältnis vom Durchmesser zum Umfange des Kreises mit bisher nicht bekannter Genauigkeit. Der Franzose Vieta, welcher vorher dieses Verhältnis schon auf 10 Stellen genau berechnet hatte, suchte zuerst die Buchstaben als allgemeine Zahlzeichen in die Algebra einzuführen. Durch die weitere Ausbildung dieser Neuerung wurden die Ergebnisse der algebraischen Untersuchungen ihrer besonderen Form entkleidet und allgemein gültig.

Der niederländische Geometer Albert Girard zeigte den Zusammenhang der Wurzeln einer Gleichung mit ihren Koefficienten, während Harriot (1560 in Oxford geboren) als den Grund dieses Zusammenhanges erkannte, dafs jede Gleichung höheren Grades als ein Produkt von Faktoren ersten Grades anzusehen ist. Harriot war gleichwohl noch nicht zu einem Verständnis der negativen Wurzeln einer Gleichung durchgedrungen.

In der Astronomie, welche durch Kopernikus und Kepler in neue Bahnen gelenkt war, wurde zur Verarbeitung der Beobachtungen die Bewältigung umfangreicher trigonometrischer Rechnungen nötig. Der schottische Edelmann John Napier erfand hierzu das Hilfsmittel der logarithmischen Rechnung und gab 1614 seine ersten Tafeln heraus, denen in Deutschland die Tafeln von Kepler und Ursinus, sowie in England und den Niederlanden die nach den Anregungen Briggs' auf die Basis 10 berechneten Tafeln bald folgten.

Kepler (1571—1630) führte die Idee des Unendlichen ein und wies darauf hin, dafs eine veränderliche Gröfse in der Nähe ihrer gröfsten und kleinsten Werte nur verschwindend kleinen Veränderungen unterworfen sei, während Fermat (1590—1663) die von Kepler nur angedeutete Lehre vom Gröfsten und Kleinsten in einer Weise ausführte, die zusammen mit seiner Betrachtung der Tangenten bereits die Keime der Analysis des Unendlichen enthielt. Die freie Entwickelung der letztgenannten Wissenschaft erforderte indessen eine allgemeinere Auffassung der geometrischen Beziehungen, als die Mathematik des Altertums dieselbe bot. Descartes (1596—1650) schuf dieselbe in seiner analytischen Geometrie, indem er die algebraische Formelsprache in die Geometrie einführte und so auch hier methodisches Vorgehen an die Stelle der Einzelforschung setzte. Die analytische Geometrie wirkte wiederum fördernd auf die Algebra, indem sie zur Erkenntnis führte, dafs die positiven und negativen Werte Reihen angehören, welche von einem Punkte in entgegengesetztem Sinne verlaufen.

Während namentlich niederländische Mathematiker, von denen Schooten und Huyghens hervorzuheben sind, weitere Erfolge auf dem von Descartes beschrittenen Wege erzielten, zeigte der Engländer Wallis in seiner 1655 herausgegebenen Arithmetik des Unendlichen den Gebrauch unendlicher Reihen, und im Anschlufs hieran stellte Vic. Mercator 1668 in seiner Logarithmotechnia die Reihe für $\log(1+x)$ auf und eröffnete damit die Möglichkeit, einfachere Methoden zur Berechnung der Logarithmen zu finden, als die bis dahin gebräuch*liche* Methode des wiederholten Wurzelausziehens.

Wir sind mit den kurzen für unseren Zweck notwendigen Andeutungen über die Entwickelung der mathematischen Wissenschaften im 16. und 17. Jahrhundert bis an das Ende des letzteren gelangt, und finden zu dieser Zeit den Boden geebnet, auf dem Newton und Leibniz die für die Weiterarbeit aller Zeiten mafsgebende Analysis des Unendlichen aufbauten.

Newtons mathematische Arbeiten fanden indessen erst im folgenden Jahrhundert Verbreitung in Deutschland, und auch die Kenntnis der Differentialrechnung Leibniz' war im Jahre 1700 noch auf einen sehr kleinen Kreis beschränkt.

Um das zu verstehen, müssen wir uns vergegenwärtigen, dafs trotz der Buchdruckerkunst die Mittel zur raschen Verbreitung neu gewonnener Lehren noch fehlten.

Die ersten wissenschaftlichen Gesellschaften entstanden allerdings in dieser Zeit: die 1654 begründete Gesellschaft der Wissenschaften in London gab seit 1665 ihre „Philosophical transactions" heraus, in Frankreich wurde gleichzeitig durch Colbert die Académie royale des sciences gestiftet und das „Journal des savants" trat ins Leben; die neuentstandene wissenschaftliche Litteratur hatte aber noch keineswegs die aufstrebenden Gelehrten zu einer geistigen Gemeinschaft vereinigt, welche dieselben befähigte, im leichten Austausch der Gedanken sowohl die eigene Fortbildung als auch den weiteren Ausbau der Wissenschaften zu pflegen. Die hervorragenden Geister traten vielmehr in persönlichen und brieflichen Verkehr, und nur wer das Glück hatte, in den kleinen Kreis derselben eingeführt zu werden, konnte den Höhepunkt der Wissenschaft erreichen. Auf den Universitäten Deutschlands war, soweit die Mathematik in Frage kommt, dieser Kreis kaum vertreten, so dafs selbst Leibniz während seiner akademischen Studien in Leipzig und Jena keine Kenntnisse erwerben konnte, welche über die Mathematik der Alten hinausgingen. Erst seine politischen Sendungen nach Paris und London gaben ihm Gelegenheit, im persönlichen Verkehr mit den bedeutenden Mathematikern, namentlich Huyghens, und durch das Studium der reichen Bibliotheken den ihm gebührenden Platz zu erringen und seine schöpferischen Ideen zu verwirklichen.

1684 begann Leibniz in den seit zwei Jahren in Leipzig herausgegebenen „Acta eruditorum" die Grundsätze der Differentialrechnung darzulegen, doch war hierdurch die Kenntnis der neuen Rechnungsart noch keineswegs weiteren Kreisen eröffnet. Noch nach zehn Jahren beschränkte sich die Zahl der Gelehrten, welche in das Verständnis der Differentialrechnung eingedrungen waren, auf die Brüder Jakob und

Johann Bernouilli in Basel, welche in lebhaftem Briefwechsel mit Leibniz an der Ausbildung derselben teilgenommen hatten, auf den Marquis de l'Hospital in Paris und wenige andere, und erst die 1696 von l'Hospital herausgegebene Analysis des unendlich Kleinen ermöglichte den Mathematikern im allgemeinen die Bekanntschaft mit dieser Wissenschaft; 1710 lehrte Christian Wolff in seinen Anfangsgründen der Mathematik die Differential- und Integralrechnung in deutscher Sprache.

Hamburg wurde vor den Greueln des dreifsigjährigen Krieges in wunderbarer Weise bewahrt! Wie der Handel Hamburgs in derselben Zeit, in welcher ein grofser Teil des Vaterlandes der Verwüstung anheimfiel, durch stetiges Wachstum gesegnet wurde, so bot die Stadt in ihren gesicherten Mauern auch der Wissenschaft eine Stätte glänzender Entwickelung. Das im Jahre 1611 als ein Mittelglied zwischen der Gelehrtenschule des Johanneums und den Universitäten begründete akademische Gymnasium war unter Joachim Jungius' Leitung (1629—1657) zu einer Bedeutung erwachsen, mit welcher sich keine philosophische Fakultät Deutschlands messen konnte. Jungius, dessen Andenken sich die hervorragendsten Forscher unseres Jahrhunderts mit Vorliebe zugewandt haben und den Leibniz neben die ersten Geister seiner Zeit stellte[1]), war einer der ersten und mutigsten Kämpfer gegen die kritiklose Annahme der aristotelischen Naturlehre und für die freie Forschung auf dem Gebiete der Naturwissenschaften. Er wählte, obgleich sein eigentliches Lehramt am Gymnasium nicht die Mathematik, sondern die Physik und Logik umfafste, als Thema seiner Antrittsrede: Den Nutzen der reinen Mathematik als Grundlage der wissenschaftlichen Spekulation und wies darauf hin, wie nur durch den Mangel dieser Grundlage die philosophische Sektirerei des Mittelalters möglich geworden sei.

Jungius' Wirken fand die kräftigste Stütze an seinem Kollegen Tassius, welcher von 1629 bis 1654 die Professur der Mathematik am Gymnasium bekleidete. Tassius sowohl wie seine Nachfolger Kirsten (1655—1660), Müller (1660—1671) und Sievers (1675—1691) waren hochgebildete Mathematiker, welche verschiedene beachtenswerte Arbeiten hinterlassen haben. Wenn ihnen derjenige Kreis, welchem die Gründer der Mathematischen Gesellschaft angehörten, durchaus fern blieb, so mag dies in zweierlei Ursachen begründet sein.

1) Vgl. Festrede zur Feier des dreihundertsten Geburtstages von Joachim Jungius, am 22. Oktober 1887 gehalten in Hamburg von Dr. Emil Wohlwill.

Einmal waren die Rechenmeister der Knabenschulen durch die Arbeiten ihres anstrengenden und sorgenvollen Tagesberufes wohl zu sehr in Anspruch genommen, um neben der Pflege der Fachwissenschaft sich den weiten Blick und die freiere Lebensauffassung anzueignen, welche die Mathematiker des akademischen Gymnasiums auf den Hochschulen, durch Reisen und im gesellschaftlichen Verkehr mit den ersten Kreisen der Stadt gewonnen hatten. Wir finden wenigstens die Schriften der ersteren nicht immer frei von einer Schwerfälligkeit in der Form des Ausdruckes, über welche die in Jungius' Fufsstapfen wandelnden Gelehrten erhaben waren.

Andererseits aber hatten die Schullehrer den nicht zu unterschätzenden Vorteil, mit ihrer Hauptbeschäftigung dem praktischen Leben nahe zu stehen und berufen zu sein, ihre Schüler für den Dienst in demselben unmittelbar vorzubereiten, wodurch sie für ihre Studien stets neue Anregungen und Gelegenheit für die Verwertung der Ergebnisse derselben fanden. Die Mathematiker, welche am Ende des 17. Jahrhunderts am akademischen Gymnasium lehrten, mufsten dagegen dieser Vorteile entbehren. Die Blüte dieser Anstalt unter Joachim Jungius, welche begabte Schüler in gröfserer Zahl von auswärts herbeiführte, war vorüber, die aus der Gelehrtenschule des Johanneums zum akademischen Gymnasium Übertretenden kamen aber gänzlich unvorbereitet, so dafs der Unterricht am Gymnasium sich nicht über die ersten Anfangsgründe hinaus erstrecken konnte. Das Lehrziel des Johanneums war die Beherrschung der lateinischen Sprache. Sie war die alleinige Universitätssprache und mufste es auch sein in einer Zeit, in welcher das Studium noch ein internationales war und in der manche Hamburger Ratsherren ihren Doktorgrad in Padua oder Orleans erlangt hatten. Gegenüber diesem Lehrziel mufsten alle anderen Unterrichtszweige zurückstehen, wie denn z. B. der geographische Unterricht nach der Lehrordnung von 1634 sich darauf beschränkte, dafs im ersten Schulhauffen, der Prima, „die Grundlehre der Erdbeschreibung gegeben werden, wie auch die Kenntnis der Reisen des heiligen Pauli, Ulyssis, Aeneae und Alexandri magni, wie imgleichen anderer Oerter, deren in den Autoren, die in dieser Classe gelesen werden, gedacht wird".

Hinsichtlich der Mathematik aber heifst es in dieser Lehrordnung, dafs an einer Stunde des Sonnabends den Tertianern die lateinischen und indianischen Ziffern an die Tafel geschrieben werden, also dafs sie sowohl die Zahlen deutsch und lateinisch aussprechen lernen, als auch das Zählen üben, sowie das Addieren und Subtrahieren mit den indianischen Ziffern. In der Sekunda wurde in einer weiteren Stunde

den Schülern die Operation der Rechnung an der Tafel vorgemacht, welches die Schüler allmählich nachahmten. Damit das Gemüt der Schüler nicht zerrüttet würde durch gleichzeitige Beachtung der Grammatik und Arithmetik, wurde hierbei deutsch geredet. In der Prima wurde dann Mathesis nicht weiter getrieben.

Solchergestalt waren die Schüler des Gymnasiums für den mathematischen Unterricht vorbereitet. Wir wundern uns deshalb nicht, zu erfahren, dafs der 1691 zum Nachfolger des Magister Sievers erwählte Konrektor der Domschule in Bremen, Kaspar Büfsing, welcher ebenso phantastisch angelegt, als von seinem Lehramte begeistert war, sofort ankündigte, neben seinen offiziellen Vorlesungen die Mathematik publice in deutscher Sprache behandeln zu wollen. — Büfsing erliefs eine Ankündigung dieser Vorlesungen unter dem Titel:

„Discours von der Information, so des Verstandes als des Willens, wie zur Aufmunterung rühmlicher Begierde und Erweckung gröfseren Eifers die mathematischen Wissenschaften zu exerciren, nebst einem Vorschlage, dieselben öffentlich teutsch zu lesen."

In der Ausführung wünscht der Autor, „dafs man an einem öffentlichen Ort zur allgemeinen Erbauung ein eigen Gemach zurichten lasse, auf dessen Thür eine schöne Weibsperson könne gemalet werden, auf einem Bocke sitzend und in der rechten Hand haltend eine Waage, in der linken einen Zirkel und eine Mefsruthe, bekleidet mit einem Stoffe, der anstatt der Blumen lauter Sterne, Ziffern und geometrische Figuren hätte, auf einem Estrich, so eine regulirte Festung darstellete."

In dem Gemach, dessen Überschrift „Ludus mathematicus" heifsen solle, würde ein Schrank mit Glasthüren stehen, welcher 32 Fächer, entsprechend der Zahl der 32 vornehmsten mathematischen Wissenschaften und ebenso vieler Tugendübungen enthalte. Das vierte Fach beispielsweise sollte für den Verstand allerlei regelmäfsige und unregelmäfsige Körper, Cylinder und Kegel — letztere aus Glas mit farbigen Säften teilweis gefüllt, um die Kegelschnitte zu zeigen — enthalten. Der Wille aber solle bei den wohl proportionierten corporibus, fürnehmlich bei dem Tetraeder Anleitung empfahen, bei der Bescheidenheit zu bleiben und die Seiten nicht höher zu erheben, als die Basis tragen kann.

Büfsing hat zunächst etliche hundert Zuhörer gehabt, die sich indessen wohl bald verlaufen haben werden, denn 1694 hat er bereits seine Professur mit einem Pastorat an der St. Michaeliskirche vertauscht, ein Zeichen, dafs die rechte Art, die Wissenschaft zu popularisieren, von dem phantastischen Akademiker nicht getroffen war.

Der Versuch, die Pflege der mathematischen Wissenschaften zu fördern, mufste, um Erfolg zu haben, von anderen Kreisen ausgehen, welche im praktischen Leben erfahren hatten, wo der Hebel einzusetzen sei. Dafs diese Männer sich in dem Schulmeisterstande fanden, ist rühmlich anzuerkennen, denn eine regelmäfsige Ausbildung der Schullehrer auf Seminarien war damals noch unbekannt, und die Vorwärtsstrebenden mufsten sich nicht allein durch eigene Kraft aus dem Kreise ihrer Genossen emporheben, sondern hatten noch mit der Mifsgunst und dem Spott der letzteren zu rechnen, welche ihrem Streben nicht folgen konnten und nun, nach dem Beispiele des Fuchses gegenüber den Trauben, alles anstrengten, ihre mathematischen Arbeiten als nutzlose Tüfteleien lächerlich zu machen.

Über den Schullehrerstand Hamburgs in damaliger Zeit läfst sich ein bremer Schriftsteller aus dem Anfange unseres Jahrhunderts[1]) wie folgt aus:

„Alle Ursachen hatten zusammengewirkt, höchst elende Schulmeister hervorzubringen (denn solche Menschen dürfen ohne alle Menschenverachtung doch nicht Schullehrer genannt werden); das Schlimmste war, dafs sie fast alle wie Pilze aus der Erde ohne alle vorherige Geistespflege in das Schulamt kamen und oft nichts weiter gelernt hatten, als die Schuhe ihres Patrons zu bürsten, der sie eben darum tüchtig fand, im Weinberge des Herrn an Kinderseelen zu arbeiten und sich alle Erniedrigung gefallen zu lassen. Subjecte, die nach Salomons und Sirachs übel verstandenem Spruch ein Kind gut unter Stock und Ruthe zu halten wufsten, gab es ja immer genug und darin bestand damals fast alle pädagogische Weisheit."

Zur Begründung einer Privatschule war nichts weiter erforderlich, als die Einwilligung des Hauptpastoren des betreffenden Kirchspiels. Die Geistlichen waren aber zu jener Zeit von dogmatischen Streitigkeiten so in Anspruch genommen, dafs über die Zulassung zum Schulamt wohl nicht immer in sachgemäfser Weise entschieden wurde. Neben guten Privatschulen gab es deshalb manche, deren Leiter ihrem Amte nicht gewachsen waren. Um im Wettkampfe für den Broterwerb zu bestehen, hielten dieselben neben der Tagesschule noch eine Abendschule, nach Beendigung der Abendschule noch Privatstunden und fanden, obgleich mangelhaft für ihren Beruf vorbereitet, keine Zeit, an ihrer eigenen Ausbildung weiter zu arbeiten.

Eine etwas gesichertere, obgleich nicht immer sorgenfreie Stel-

1) Journal Hamburg-Altona 5. Jahrgang, 1. Band.

lung hatten die Vorstehrer der fünf Kirchenschulen, welche freie Wohnung und einige Emolumente von der Kirche erhielten, im übrigen aber auf die Einnahme durch das Schulgeld angewiesen waren. In den Kirchenschulen wurden hauptsächlich die dem Handelsstande sich widmenden Knaben unterrichtet. Schreiben und Rechnen waren neben der Religion ihre Hauptlehrgegenstände.

Unter den Leitern dieser Kirchenschulen traten nun zwei Männer besonders hervor, welche sich mit angeborener Kraft aus dem Sumpfe des Schlendrians herausarbeiteten und in einem Lichte glänzten, welches um so rühmlicher für sie war, weil sie im wesentlichen alles durch sich selbst wurden:

Heinrich Meifsner und Valentin Heins,

welchen als den Stiftern der Mathematischen Gesellschaft auch in der Festschrift zur zweihundertjährigen Wiederkehr des Stiftungstages ein besonderes Ehrenblatt gebührt.

Von Heinrich Meifsners äufseren Lebensumständen ist uns nicht viele Kunde erhalten geblieben. Er ist 1643 geboren und zeichnete sich schon als Schüler der Knackenrüggeschen Schule und der Kirchenschule zu St. Jakobi durch seine Neigung zur Mathematik aus. Nachdem er erwachsen war, trat er vermutlich sofort ins Lehramt ein. Wir finden ihn 1666, also mit 23 Jahren, zum zweitenmale verheiratet. Nachdem seine erste Ehe kinderlos geblieben war, wurden ihm in der zweiten fünf Kinder geboren, von denen nur zwei Töchter ihn überlebten. Im Jahre 1669 wurde Meifsner als Lehrer an der Knackenrüggeschen Schule angestellt und gleichzeitig seine Frau mit dem Näh- und Strickunterricht an dieser Schule betraut. Meifsner hat die Stellung bis 1688 innegehabt. Dann wurde ihm in dem Schulamt an der St. Jakobi-Kirchenschule ein angemesseneres Arbeitsfeld zu teil, welchem er bis zum Anfang des Jahres 1716 vorstand. Zu dieser Zeit teilte er der vorgesetzten Kirchenbehörde mit, dafs seine Kräfte Alters halber abgingen und er nicht mehr imstande sei, die Schularbeit, wie bisher gethan, zu verrichten. Er bat deshalb um einen Adjunkten und dafs ihm zur Verpflegung ein gewisses ad dies vitae zugelegt werde. Seinem Gesuche wurde entsprochen, doch genofs er den Ruhestand nicht lange. Sein Todestag ist der erste September 1716.

Dem einfachen Lebenslaufe Meifsners entspricht das schlichte Wesen desselben, welches uns aus seinen Schriften entgegentritt. Dabei finden wir ihn durchglüht von Begeisterung für die Wissenschaft, deren Dienste er sich gewidmet hatte, und für welche er mit so grofsem Erfolge wirkte, dafs er in seiner Zeit den Ruf eines berühmten

Algebraisten errang, dafs sein handschriftlicher Nachlafs ein Jahrhundert lang der Gegenstand emsigen Studiums in der von ihm begründeten Gesellschaft war, und dafs der vorhin erwähnte Gewährsmann aus dem Anfange unseres Jahrhunderts ihn als ein schöpferisches, von grofsen Ideen strömendes Genie bezeichnet, einen tief denkenden, alles umfassenden theoretischen und praktischen Mathematiker, einen der gröfsten Analytiker seiner Zeit, der einen Kommentar in 16 Foliobänden über den Euklid schrieb, in den er alle mathematische Weisheit seiner Zeit zusammenbrachte, und noch viele andere Werke, deren fein verschlungene Aufgaben noch jetzt manchem Professor der Mathematik sollten zu schaffen machen.

Für unsere eigene Beurteilung Meifsners liegen zahlreiche noch vorhandene und weiter unten zu besprechende Werke desselben vor.

Wir finden in denselben überall Klarheit, Bekanntschaft mit den Errungenschaften seiner Zeit auf mathematischem Gebiete und das Bestreben, in Bezug auf alle Verhältnisse des Lebens, soweit das Bedürfnis vorhanden ist, die Anwendung der Mathematik zu pflegen. Freilich finden wir Meifsners Form der Darstellung oft schwerfällig, seine Beweisführung umständlich; obgleich er die neue Formelsprache der Algebra kennt, wendet er dieselbe bei weitem nicht genügend an. Wir sehen ihn ferner bisweilen übertriebenen Wert auf Dinge legen, die uns untergeordnet erscheinen, wie die Auffindung der rationalen Wurzeln der Gleichungen oder die Lehre von den figurierten Zahlen. Wir müssen bei Beurteilung dieser Thatsachen indessen daran denken, dafs Meifsner in seinen Studien wesentlich auf seine eigenen Kräfte angewiesen war, und dafs ihm für dieselben nur die wenigen Stunden übrig blieben, die sein mühe- und sorgenvolles Amt frei liefs. Wenn es ihm wie seinen Zeitgenossen, den Bernoullis, vergönnt gewesen wäre, im Verkehre mit den ersten Geistern der Zeit ganz der Wissenschaft zu leben, so würden wir seinen Namen zweifelsohne ebenfalls in den Annalen der allgemeinen Geschichte der Mathematik verzeichnet sehen. Wir würden dann aber schwerlich von der Gründung der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg zu reden haben, denn eben seinem Sehnen nach freiem Meinungsaustausch und gegenseitiger Unterstützung in der Pflege der Wissenschaft verdankt die Gesellschaft ihre Entstehung.

Das Suchen nach Anregungen zum Studium und nach materieller Unterstützung bei der Herausgabe seiner Werke war es, welches Meifsner nach Genossen ausschauen liefs. Geldmittel waren nach dem dreifsigjährigen Kriege in Deutschland überhaupt nicht reichlich, am wenigsten in dem spärlich besoldeten Lehrerstande. Zur Heraus-

gabe von Büchern, zumal solchen abstrakten Inhaltes, waren aber Geldmittel notwendig; denn die Verleger waren mifstrauisch, und mancher sauer verdiente Schilling ist im Selbstverlag vergeudet worden, wenn das Publikum nicht in der gewünschten Weise kaufte.

Meifsner hat es nachmals erfahren müssen, dafs selbst die ihm zu Teil gewordene Hilfe nicht ausreichte, von seiner Bearbeitung des Euklid mehr als die ersten beiden Bücher zum Druck zu befördern, und dafs er die Handschrift der übrigen dreizehn Bücher sogar dringenden Forderungen seines Verlegers gegenüber hat verpfänden müssen. Wir haben es aufs lebhafteste zu bedauern, dafs uns dieser Schatz nicht erhalten ist, denn nach Mafsgabe der vor uns liegenden ersten beiden Bücher hat Meifsner in der That Gelegenheit genommen, im Anschlufs an die Sätze des Euklid Einblicke in alle Teile der neueren Mathematik zu eröffnen. Die von der Gesellschaft ausgelöste und von den Erben Meifsners erworbene Handschrift wurde im Gesellschaftsarchive aufbewahrt und ist mit demselben ein Opfer des grofsen Brandes vom Jahre 1842 geworden.

Einen wissenschaftlich tüchtigen Kollegen, dem es bezüglich der äufseren Lebensumstände aufserdem glücklicher als ihm selbst ging, fand Meifsner in Valentin Heins.

Valentin Heins ist am 15. Mai 1637 als Sohn eines Leinewebers in Hamburg geboren. In Bezug auf seine Schulbildung sagt er im Vorbericht zu seinem Gazophylacium Mercatorio-Arithmeticum: „Ich danke es meinen in Gott selig ruhenden Eltern, dafs, ob sie zwar nur vor der Welt gering, doch Christ-ehrliche Handwerksleute gewesen und mich nicht hier und dabei untauglichen Fuschern hingestecket, sondern solche Männer gesucht und gefunden, die durch ihren treuen Fleifs einige im Grunde liegende und sowohl ad Arithmeticam als nachmals auch ad studia theologica anscheinende Funken in mir wahrgenommen, selbige je mehr und mehr mittelst göttlichen Segens mit fundamentalem Unterrichte aufgelocket und soweit angeflammet haben, dafs (ich rede es zu Ehren meines Schöpfers) im vierzehnten Jahre meines Alters in der kaufmännischen Arithmetika andere anweisen und im benöthigten Falle mein Brod damit gewinnen können."

Heins brachte es auf diese Weise dazu, 1658 die Universität Leipzig zu beziehen, um Theologie zu studieren. Ob dabei die Absicht zu Grunde gelegen hat, das theologische Studium vollständig zu absolvieren und sich der geistlichen Laufbahn zuzuwenden, und später der Ausführung dieser Absicht hindernde Umstände entgegengetreten sind, läfst sich nicht mehr feststellen. Vielleicht hat Heins

auch nur weitere Ausbildung zum Lehrerberuf auf der Hochschule gesucht. Jedenfalls ist er im Jahre 1659 von Leipzig nach Jena übergesiedelt, noch im selben Jahre nach Hamburg zurückgekehrt und hat sich im folgenden Jahre verheiratet. Heins wird sich zunächst durch Privatunterricht ernährt haben. Daneben hat er auch die Buchhalterei betrieben. Wir wissen wenigstens, dafs er von 1661 bis 1672 auf Vincent Klingenbergs und Jakob Delebons Comptoir Buchhalter der guineisch-afrikanischen Kompagnie gewesen ist.

Im Jahre 1662 wurde Valentin Heins zum Vikarius am Hamburger Dom, am 20. Februar 1670 aber zum Rechenmeister an der St. Michaelis Kirchenschule erwählt. Während ihm am Dome, wie es scheint, hauptsächlich der Unterricht im Lateinischen übertragen war, machte er sich während seiner praktischen Thätigkeit als Buchhalter mit der kaufmännischen Arithmetik sehr vertraut, so dafs er ein in diesem Fache sehr gesuchter Lehrer wurde und seine Rechenbücher eine allgemeine Verbreitung fanden. Diese Bücher, welche nach seinem Tode vielfache Auflagen erlebten und noch im Anfang dieses Jahrhunderts in manchen Schulen benutzt wurden, haben den Namen ihres Verfassers durch mehrere Menschenalter zu einem so bekannten gemacht, dafs noch heute in Hamburg das geflügelte Wort „nach Valentin Heins!“ in demselben Sinne gebraucht wird, wie im gröfseren Vaterlande das Wort „nach Adam Riese!“ gilt. In den Werken Heins' tritt die Mathematik der praktischen Rechenkunst gegenüber in den Hintergrund, doch finden wir in denselben auch Aufgaben in kaufmännischem Gewande, welche nur mit tüchtigen algebraischen Kenntnissen zu lösen sind und welche uns den Einflufs Meifsners verraten. Den unmittelbaren Beziehungen seiner Schriften zu den praktischen Bedürfnissen des Handelsstandes verdankte Heins die Befreiung von den Verlagssorgen, welche Meifsner peinigten. Während dieser die Handschrift seines Hauptwerkes verpfänden mufste, finden wir jenen in verhältnismässigem Wohlstand lebend. Wir wissen, dafs Heins neben seiner Amtswohnung im Schulgebäude noch eine Gartenwohnung zur Verfügung hatte. Das am Dragonerstall von der Poolstrafse rechts zu Anfang belegene Gartenhaus, ein Ständerwerksbau mit nicht unbedeutendem Garten, ist später (bis vor etwa 25 Jahren) im Besitz der Familie Gensler gewesen. In den letzten Jahren hat dasselbe den grofsen Neubauten weichen müssen, welche am Holstenthorplatz den Eingang der zukünftigen Kaiser Wilhelmstrafse bezeichnen.

Ein weiteres Zeugnis des Wohlstandes, dessen sich Heins erfreute, aber auch ein Zeugnis sowohl der Freundschaft, welche ihn mit Meifsner verband, als auch der Liebe, welche er den mathema-

tischen Wissenschaften entgegenbrachte, finden wir in der Unterstützung, welche Heins der Herausgabe verschiedener wichtigen Schriften Meifsners aus vollem Herzen gewährte.

Die verständnisvolle Teilnahme an den eigenen wissenschaftlichen Bestrebungen, welche Meifsner bei seinem Freunde und Kollegen Heins fand, veranlafste denselben schon im Anfang der achtziger Jahre, den Versuch zu machen, durch Aneinanderschliefsen gleichgestimmter Elemente die mathematische Wissenschaft zu fördern.

Zum Zwecke der Unterstützung in Krankheits- und Sterbefällen war schon im Jahre 1662 unter dem Namen „Societät der Schul-, Schreib- und Rechenmeister" eine wirtschaftliche Vereinigung der Schulkollegen gegründet. Dieser noch heute bestehenden Vereinigung haben Meifsner und Heins indessen nicht angehört. Die Beziehungen zwischen diesen wissenschaftlich vorgeschrittenen Männern und einem grofsen Teile ihrer Kollegen, welche in Ermangelung eigener wissenschaftlichen Vorbildung die Bestrebungen jener als unnützen Grillenfang ausgaben, scheinen überhaupt nicht sehr freundschaftlicher Natur gewesen zu sein. Hierin wird auch der Grund liegen, dafs die im Jahre 1684 auf Meifsners Betreiben von einigen Rechenmeistern zu Hamburg gestiftete „Zunft der vereinigten und fleifsigen Rechenmeister" keinen Erfolg hatte. In der Aufzählung der Meifsnerschen Schriften wird eine kurze Ausschreibung über diese Stiftung erwähnt. Im übrigen haben wir keinerlei Kunde von dieser Gesellschaft und müssen daher annehmen, dafs dieselbe nur ein kurzes Leben gefristet hat, weil Meifsner nur wenige Genossen fand und der ganze übrige Trofs der Kollegen, die in dem Unternehmen nur eine gefährliche Neuerung sahen, durch welche sie gezwungen würden, ihren faulen Schlendrian durch eigene Anstrengung zu überwinden, der Sache jeden möglichen Widerstand entgegengesetzt haben wird.

Da war man bei der Hand zu behaupten, es gehe die Rechenkunst nicht weiter als auf die Haushaltung und die Kaufmannschaft, da wurden Meifsner und seine strebsamen Freunde der Überhebung über ihren Stand angeklagt von Leuten, welche lieber nach ihren überlieferten Zifferbüchern gedankenlos unterrichteten und die freie Zeit in der Zeche und beim Würfelspiel zubrachten, als den Anregungen jener zum Studium der Algebra zu folgen. In seinem deutschen Euklid sagt Meifsner: „Dafs aber zu diesen Kunst-eklen Zeiten die herrliche und nimmer genug belebte Algebra so wenig aestimiret wird, kommt hauptsächlich her aus dem groben Unverstand derjenigen, welche solche Kunst nicht kennen und nichts davon gelernt haben" und tröstet sich mit folgendem derben Verse:

Wer Gold veracht und Edelstein,
Muſs im Gehirn nicht richtig sein:
Doch läſst man immerhin den Langohr Spreu erwählen;
Zu Trebern finden sich auch allstets Treber-Kehlen.

Meiſsners Mut war indessen nicht gebrochen durch den Miſserfolg. Was er hier am Platze nicht erreichen konnte, das suchte er in weiterem Kreise zu verwirklichen. Der hanseatische Handel, welcher den hamburgischen Kaufmannsstand mit demjenigen der übrigen nordischen Städte aufs engste verband, lieferte auch den fleiſsigen Lehrern, welche vielfach neben ihrem sauren Berufe dem Geschäfte der kaufmännischen Buchführung oblagen, Verbindungen mit jenen Städten. In diesem grösseren Gebiete lieſs sich eher eine Anzahl gleichgestimmter tüchtiger Männer vereinigen, und wenn solche Gemeinschaft auch gegenüber der früher erstrebten den gewaltigen Vorteil der gegenseitigen Unterstützung durch das Wort entbehrte, so konnte sie dennoch segensreiche Früchte tragen. Denjenigen, welche von ihren Kollegen gar keine geistige Unterstützung zu erwarten hatten, muſste auch der briefliche Verkehr mit tüchtigen Freunden Förderung gewähren, und für die Verbreitung der mathematischen Werke ihrer Mitglieder konnte eine über weitere Kreise ausgedehnte Genossenschaft vielleicht nützlicher wirken als eine auf Hamburg beschränkte.

Jedenfalls war der neue Schritt Meiſsners vom Erfolge gekrönt, denn die im Jahre 1690 begründete Gesellschaft hat 2 Jahrhunderte überdauert und erfreut sich noch jetzt einer segensreichen Wirksamkeit.

Vier Perioden lassen sich im Leben dieser Gesellschaft deutlich voneinander unterscheiden, wenn auch die Übergänge von einer Periode zur nächsten nur allmählich erfolgt und die zeitlichen Grenzen derselben deshalb nur angenähert festzusetzen sind.

Diese vier Perioden, welche auch der folgenden geschichtlichen Darstellung zu Grunde gelegt werden sollen, sind:

1. Die Gründungsperiode 1690—1720.
2. Die Kunstrechnungsperiode 1720—1790.
3. Die technische Periode 1790—1860.
4. Die wissenschaftliche Periode von 1860 an.

Die Gründungsperiode
1690—1720.

Heinrich Meiſsner hat am 2. Januar 1690 Einladungen zur Gründung einer kunstrechnungsübenden Societät erlassen und dieselben hier am Platze und nach einer groſsen Reihe nordischer

Städte versandt. Da ein Abdruck dieser Einladung leider nicht erhalten ist und die älteren Akten der Gesellschaft 1842 beim grofsen Brande vernichtet sind, besitzen wir keine genaue Kunde über die Vorgänge bei Gründung der Gesellschaft.

Als Stiftungstag hat die Gesellschaft seit langer Zeit nicht einen bestimmten Monatstag, sondern den Fastnachtmontag gefeiert. Auch im Jahre 1840, als man auf eine 150jährige Dauer der Gesellschaft zurückblickte und noch im Besitz der alten Akten war, ist der Fastnachtmontag, welcher damals auf den 26. Februar fiel, festlich begangen. In den Jahrbriefen von 1732 und 1815 ist dagegen der 5. März als Stiftungstag angegeben, und das 100jährige Jubelfest ist am 6. März 1790 gefeiert.

Nun galt im Jahre 1690 in Hamburg noch der Julianische Kalender, nach welchem Fastnachtmontag auf den 3. März fiel. Wir dürfen deshalb und in weiterer Berücksichtigung, dafs in den Fastnachttagen die Schulen geschlossen blieben, mit einiger Wahrscheinlichkeit annehmen, dafs am 3. März 1690 die in Hamburg und Umgebung wohnenden Freunde des geplanten Unternehmens zusammenkamen, um dasselbe näher zu besprechen und gleichzeitig der Sitte der Zeit folgend ein frohes Fastnachtmahl einzunehmen.

Im Anschlufs hieran werden dann in den folgenden Tagen die vermutlich von Meifsner ausgearbeiteten Satzungen der Gesellschaft festgestellt und von den Anwesenden unterschrieben sein. Der vereinzelt als Stiftungstag angegebene 31. Juli dürfte keine andere Bedeutung haben, als dafs an diesem Tage die gedruckten Satzungen an die auswärtigen Mitglieder versandt sind.

Der ursprüngliche Name der Gesellschaft ist in Übereinstimmung mit den 1690 in der „Kunstkette“ Meifsners veröffentlichten Leges „Kunstrechnungsliebende Societät“ gewesen, während sich später manche Abweichungen hiervon finden.

In der 1695 herausgegebenen Algebra Tyronica lesen wir: Kunstrechnungsübende Societät, in dem 1699 herausgegebenen 1. Buche des Euklid: Kunstrechnungslieb- und übende Societät, und Paul Halcke nennt die Gesellschaft in seinem 1719 erschienenen Mathematischen Sinnenkonfekt: Societät der Kunstrechner.

Über das von der Gesellschaft gewählte und noch jetzt gebrauchte Sinnbild[1]) sagt die Vorrede zur Kunstkette:

„Die in gesundem Verstande genommene Deutung des (bei den verblendeten Heiden ertichteten) vorn und hinten sehenden Ab-

1) S. d. Titelblatt.

gottes Jani und dessen zweiseitigen Habits gehet in dem schon veralteten Gesicht auf die vergangene, in dem in seiner Jugendblüthe sich darstellenden Antlitz auf die gegenwärtige und folgende Zeit und will denen Kunst Rechnungs Liebenden alles Ernstes eindrücken, dafs ein Jeder seines Ortes mit allem Fleifs daran sein müsse, wie gute Wissenschaften von Zeit zu Zeit nicht allein wohlbeibehalten und theuer geachtet werden, sondern auch, gleichsam gegen den Naturlauf mit ihrem Alter je mehr und mehr Ansehen und Schönheit erlangen mögen."

Die Umschrift lautete zuerst:

Was gefunden, ich verwahr
Und noch finde immerdar.

1699 finden wir indessen schon die jetzige Fassung: Antiqua emendo, substituoque nova.

Aus den im Anhange zum Abdruck gebrachten ersten Satzungen der Gesellschaft, den Leges von 1690, geht hervor, dafs ein ausdrücklicher Unterschied zwischen einheimischen und auswärtigen Mitgliedern nicht gemacht wurde. Diese Trennung tritt erst nach mehr als einem Jahrhundert ein, denn noch das 1790 herausgegebene Mitglieder-Verzeichnis kennt dieselbe nicht. In dem der Festschrift angehängten, unter sorgfältiger Benutzung aller vorhandenen Quellen aufgestellten Mitglieder-Verzeichnisse ist diese Trennung gleichwohl von Anfang an durchgeführt, weil dieselbe thatsächlich doch sehr bald zur Geltung kam. Die in § 2 der Leges anempfohlenen Zusammenkünfte derjenigen Mitglieder, so am nähesten beisammen wohnen, werden auch wohl nur in Hamburg stattgefunden haben. Es scheint, dafs die Mitglieder von Anfang an regelmäfsig monatliche Zusammenkünfte gehalten haben, denn die Protokolle der Gesellschaft gehen nach einer Notiz im Jahrbriefe von 1732 bis in das Jahr 1692 zurück, und im Vorbericht zu Meifsners Algebra Tyronica ist mitgeteilt, dafs Valentin Heins im monatlichen Conventu an Meifsner das Ersuchen gestellt habe, diese für alle Anfänger hochnützliche Arbeit herauszugeben, auch sich bereit erklärt habe, den Verlag auf seine Kosten zu übernehmen.

Anfänglich zählte die Gesellschaft sechs einheimische und neun auswärtige Mitglieder, welche ihren Wohnsitz in Buxtehude, Ütersen, Zelle, Braunschweig, Lübeck, Kopenhagen und Gothenburg hatten. Bis zum Jahre 1697 vermehrte sich die Zahl der einheimischen Mitglieder auf zwölf und blieb dann eine Reihe von Jahren unverändert.

Die geringe Zahl der Mitglieder läfst es schon als unwahrscheinlich erscheinen, dafs die Versammlungen einen förmlichen

Charakter trugen. Es waren Vereinigungen im Hause des Jahrverwalters, in denen bei einer Tasse Thee und einer Pfeife Tabak die von auswärtigen Mitgliedern eingegangenen Briefe verlesen und die gemeinsamen wissenschaftlichen Interessen in zwangloser Weise besprochen, auch wohl manche verzwickten Aufgaben gelöst wurden. Anklänge an diese Form haben sich bis in die neueste, den älteren noch lebenden Mitgliedern der Gesellschaft wohlbekannte Zeit erhalten.

Dafs diese Zusammenkünfte gleichwohl lebendige Anregungen boten, beweisen die zahlreichen Veröffentlichungen, welche wir der Thätigkeit der Gesellschaft in ihrer ersten Periode verdanken und unter denen die Werke Meifsners einen hervorragenden Platz einnehmen. Die Mittel, welche die Gesellschaft durch die Beiträge ihrer Mitglieder besafs, und die besonderen Zuschüsse, welche Valentin Heins gewährte, haben die Herausgabe dieser Werke, welche wissenschaftlich höchst interessant, und durch die am Eingange oder zum Schlufs abgedruckten Leges und Mitgliederverzeichnisse auch für unsere Kenntnis von der Geschichte der Gesellschaft wertvoll sind, ermöglicht.

Übernahm die Gesellschaft dergestalt in unmittelbarer Weise einen Teil der Gefahren, welche der Selbstverlag bot, so wirkte sie ferner mittelbar günstig, indem sie Hilfe gegen den Nachdruck verschaffte.

Der geistige Diebstahl scheint damals in ganz hervorragender Weise getrieben zu sein. Falls ein Buch Abnehmer fand, erschienen sofort unberechtigte Ausgaben, wenn nicht ein Privilegium impressorium diesem Mifsbrauch schützend entgegentrat.

Ein Privilegium E. E. Rates war nun zwar unschwer zu erhalten, doch war dasselbe machtlos gegen Nachdruck in Altona, Stade oder Lüneburg. Hiergegen schützte nur ein vom Wiener Hofe ausgestelltes kaiserliches Privilegium, dessen Erlangung mit Weitläufigkeiten und Kosten verknüpft war. Der Gesellschaft glückte es indessen, die entgegenstehenden Schwierigkeiten zu überwinden.

Am 15. Juli 1699 wurde das Privilegium ausgestellt, und wir sind, dank der bereitwilligen Vermittlung des Auswärtigen Amtes des Deutschen Reiches, in der Lage, den Text desselben nach einer in den Wiener Archiven angefertigten Abschrift im Anhange mitteilen zu können. Das Privilegium ist später mehrfach, zuletzt im Jahre 1739 verlängert und sein hoher Wert ist u. a. in dem Jahrbriefe der Gesellschaft vom Jahre 1732 wie folgt hervorgehoben: „Der gröfseste Nutzen dieser Societät bestehet jawohl darinnen, dafs Ihre Röm. Kaiserl. Majestät die hohe Gnade für uns hegen, dafs jedes Mitglied seine Schriften und Bücher mag ausgeben unter Ihro

Röm. Kaiserl. Majestät allergnädigstem Privilegio-Impressario, welches wir mit der gröfsesten Veneration und allerunterthänigstem Danke anerkennen."

Heinrich Meifsner hat unter Beihilfe der Gesellschaft die folgenden Werke herausgegeben:

1. Arithmetische, Geom. und Algebraische Kunstkette. 1690.
2. Stern und Kern der Algebra. 1692.
3. Algebra Tyronica. 1695.
4. Geometria Tyronica. 1696.
5. Arithmetischer Rosenkranz.
6. Arithmetisches Blumengärtlein.
7. Arithmetika Tyronica 1701.
8. Des Teutschen Euclidis 1. und 2. Buch.
9. Kunstweckerlein. 1710.

Die in erster Linie erwähnte „Kunstkette" ist der Eingangswidmung zufolge

Gott dem Seligen und allein Gewaltigen zur Ehre
Allen Liebhabern freier Künste zu ergetzlicher Lust
Der Posterität zur schuldigen Aufmunterung

als Vortrabs-Opusculum der nunmehro hervortretenden sogenannten Kunstrechnungs liebenden Societät herausgegeben.

Es heifst in der Vorrede:

„Um das möglichste ihres Ortes daran zu strekken, die bei vielen schier dahin sinkende Kunst-Rechnung als den Kern und Zukker der Arithmetik nicht so unverantwortlich mit zu verachten, hat der Mehrende (Meifsner) als aus dessen Herzen die ersten Gedanken von dieser Zunft entsprungen, von seinen unterschiedlichen wohl ausgearbeiteten Werken beigehende 100 Problemata nebst anderen angefügten 360 Quästionibus gleichsam zum Vortrab auslassen und dadurch bei allen Kunst schätzenden Liebhabern zu anderweitigen mit Gott folgenden Sachen einen Appetit machen wollen, dabei andere Zunftverwandten mit der Zeit auch das ihrige thun und also junctis viribus et animis zeigen werden, dafs unsere Vorfahren ihr von Gott verliehenes Talent nicht auf undankbare Successores gebracht haben."

Gegen die Neider und Tadelsüchtigen, die Ignoranten und gewissenlosen Jugendverderber, die Lästerzungen, welche gegen die Ausschreibung vom 2. Januar ihren Giftangel geschärft haben, richtet sich der Vers:

„Neidhart, schäume nur, solang du kannst und willt,
Gott ist doch unser Schutz und wohlbewährter Schild,
Und du, wenn du so bleibst, des Satans Ebenbild."

Die gebundene Redeform wird überhaupt häufig herangezogen, und im Versmafs, wie in der Reimfindung erweisen Meifsner und Heins sich nicht ungeschickt. Zum Beweise, dafs nicht nur das Streitgedicht vorkommt, möge aus den Schlufsversen der Vorrede noch die frischen Mut atmende Strophe herangezogen werden:

Hier ist die Last nicht schwer, hier sind die vielen Hände,
Die frei gebunden sind zum Fleifs durch Liebesbande!
Hier ist ein einzigs Ziel, der Nutz ist allgemein,
Wem kann denn diese Zunft nicht wohlbehäglich sein?

Die Form, in welcher die 100 Glieder der Kunstkette sich darbieten, ist für uns kaum faſsbar, weil wir den Genufs nicht kennen, mit welchem unsere Vorfahren äufserliche Rechnungsschwierigkeiten durch Ausdauer überwanden. Es sind nämlich die gegebenen Gröfsen in jeder der hundert Aufgaben aus den gefundenen Gröfsen der vorhergehenden Aufgabe zusammengesetzt, so dafs der Rechner keine andere Wahl hat, als das Buch von Anfang bis zu Ende durchzurechnen. Dabei sind die teilweise in das Gewand kaufmännischer Rechnung eingekleideten Aufgaben in mannigfaltiger Auswahl allen Gebieten der Geometrie und Algebra in geschickter Weise entnommen. Einzelne Aufgaben sind einfacher Natur, bei vielen sind aber Zahlenschwierigkeiten gehäuft; Meifsner scheut sich selbst nicht vor Zahlen mit 41 Ziffern.

Der Stern und Kern der Algebra, welcher 1692 der Liberalität der gesamten Zunftgenossen sein Erscheinen zu verdanken hatte, ist das Hauptwerk Meifsners auf algebraischem Gebiete, welches uns ganz erhalten ist.

Der Verfasser erläutert in der Einleitung sowohl die alte Schreibweise, nach welcher jede Potenz der Unbekannten ein anderes Zeichen bekommt, aufserdem aber nur Ziffern gebraucht werden, als auch die neue Buchstabenbezeichnung. Für die alte Bezeichnung führt Meifsner an, dafs die Drucker sich mit derselben am besten abfänden und die neuen Zeichen eines oder des anderen Werkes halber nicht herbeischaffen wollten; auch müsse der Anfänger die alten Zeichen kennen lernen, um der Alten Schriften besser zu verstehen.

Meifsner wendet vorzugsweise die alte Schreibweise an und umschreibt z. B. die Cardanische Formel durch langatmige Sätze, welche eine ganze Seite einnehmen. Das Ergebnis der Cardanischen Formel wird übrigens noch nicht als die Schlufslösung der Gleichung dritten Grades angesehen, weil in der Form

$$x = \sqrt[3]{A + \sqrt{B}} + \sqrt[3]{A - \sqrt{B}}$$

die meist vorausgesetzte rationale Wurzel nicht erkennbar ist und die angenäherte Bestimmung der Wurzeln durch wirkliche Ausziehung nicht in Frage gebracht wird. Meifsner wendet deshalb alle Mühe an, den Ausdruck $\sqrt[3]{A + \sqrt{B}}$ in den anderen $a + \sqrt{b}$ überzuführen, kommt aber zum richtigen Schlufs, dafs das gleich wäre, als sollte ein unbeweglicher Stein sich selbst fortwälzen, weil diese Aufgabe wieder auf eine Gleichung 3. Grades führt. Bei dieser Sachlage wird ihm denn ganz übel zu Mute, weil er nicht allein die Kubik Coss, sondern auch die Zensi Zensi Coss (Gleichung 4. Grades), als welche doch auf jene gegründet ist, umfallen sieht, so dafs nicht mehr als das Gerippe der Quadrat Coss übrig bleibe.

Was ist nun aber, fährt Meifsner in seiner Betrachtung fort, mit der Behauptung angesehener Cossisten zu halten, sie könnten nicht allein die Zensi Zensi Coss, sondern sogar viel höhere Cossen lösen? Das seien lächerliche Possen, lautet die Antwort, und es wird nachgewiesen, dafs es sich in allen solchen Fällen um Gleichungen handele, welche vermittelst Division durch einen bekannten Faktor zuvor auf einen niederen Grad zurückgeführt würden. Wer Lust und Zeit habe, dergleichen geschminkte Äquationes mehr aufzusuchen, der möge nur dem nachbeschriebenen Generalweg mit Fleifs nachspüren und sich gleichsam durch den algebraischen Stern leiten lassen.

Wir kommen hier auf Meifsners Generalregel, wie nicht allein die gemeinen, sondern auch die binomischen und polynomischen Wurzeln aus den höheren Äquationen auf eine ganz neue und leichte Weise herauszuziehen.

Dieselbe beruht auf dem Satze, dafs die Wurzeln Teiler des unabhängigen Gliedes sind. Ist x die zu suchende Wurzel einer Gleichung, so bildet Meifsner neue Gleichungen, deren Wurzeln $x + 1$, $x + 2$ u. s. w. sind. Die unabhängigen Glieder der so entstandenen Gleichungen werden dann in ihre aliquoten Teile zerlegt und diese Teile reihenweise aufgeschrieben. Findet sich dann eine durch die verschiedenen Reihen laufende Aufeinanderfolge von Zahlen, so ist die auf die erste Reihe fallende Zahl dieser Folge eine Wurzel der ursprünglichen Gleichung.

Die Gleichung habe ferner eine Wurzel von der Form $a + \sqrt{b}$. Dann mufs, weil bei der ganzen Betrachtung vorausgesetzt ist, dafs die gegebene Gleichung nur ganzzahlige Koefficienten habe, auch $a - \sqrt{b}$ Wurzel der Gleichung, $a^2 - b$ also Teiler des unabhängigen

Gliedes sein. Der Ausdruck $a^2 - b$ wächst aber, wenn a um die Einheit zunimmt, nach einer arithmetischen Progression 2. Ordnung, deren 2. Differenz $= 2$ ist. Finden sich also keine arithmetischen Progressionen 1. Ordnung in dem System der aliquoten Teile der unabhängigen Glieder, so hat die gegebene Gleichung keine ganzzahligen Wurzeln. Man sucht dann nach Progressionen 2. Ordnung, um aus denselben gegebenen Falls die Wurzeln von der Form $a \pm \sqrt{b}$ zu bestimmen u. s. w.*)

Wie aus zahlreichen Äufserungen Meifsners und seiner Freunde hervorgeht, hat derselbe seiner Erfindung der oben skizzierten Generalregel eine sehr hohe Bedeutung beigelegt. Ihre Erfindung zeugt jedenfalls von seiner genauen Bekanntschaft mit dem Wesen der algebraischen Gleichungen. Wenn wir bedenken, dafs man sich damals weniger aus praktischem Bedürfnis, sondern aus rein wissenschaftlichem Interesse mit den Gleichungen beschäftigte, so scheint es auch erklärlich, dafs man sich durch die keineswegs unbekannten näherungsweisen Lösungen weniger befriedigt fühlte und lieber durch Versuche, wenn auch auf gewaltigen Umwegen, die genauen Werte der Wurzeln zu erforschen suchte.

Für die Praxis fügt Meifsner übrigens eine Tafel der Primzahlen von 1—10000 und Regeln zur Zerlegung einer Zahl in ihre aliquoten Teile bei.

Die zweite Hälfte des Stern und Kern der Algebra ist den figurierten Zahlen gewidmet. Meifsners Verzeichnis der Polygonalzahlen geht von den Trigonalzahlen bis zu den Dekakismyriagonalzahlen.

Das interessanteste Werk, welches Meifsner uns hinterlassen hat, ist unstreitig „Des Teutschen Euclidis 1. und 2. Buch". Dasselbe ist bereits unter dem Schutze des kaiserl. Privilegiums erschienen, das 1. Buch im Jahre 1700, das 2. wahrscheinlich bald darauf.

Meifsner giebt das griechische Original, die lateinische und deutsche Übersetzung, daneben aber auch eine grofse Anzahl Scholien, Erweiterungen und Nutzanwendungen. Die 34 Definitionen, welche bei Euklid kaum ebensoviel Zeilen einnehmen, bewältigt Meifsner in 14 Folioseiten. Er geht dabei mit einer Gründlichkeit zu Werke und stellt soviele Betrachtungen mit Bezug auf das praktische Leben an, dafs wir nur wiederholt bedauern können, dafs uns die 13 weiteren

*) Weiteres hierüber und über andere in den Werken Meifsners und seiner Freunde enthaltene Ausführungen ist der Abhandlung H. Ahlborns zum Programme des Realgymnasiums in Hamburg 1884 zu entnehmen.

Bücher des Teutschen Euklid nicht erhalten sind, sie würden uns eine vollständige Charakteristik ihres Verfassers ermöglicht haben.

Bei der 6. Definition: „Die Grenze einer Fläche ist eine Linie", wird beispielsweise auf den Unterschied einer mathematischen und einer wirklichen Fläche hingewiesen und werden die Geometer aufgefordert, vorzüglich in den Marschländereien vorsichtig zu sein und sich zu informieren, ob die Ackerfläche nur nach ihrem brauchbaren Teil, oder bis in die Mitte der Gräben zu messen sei. — Beim 3. Axiom: „Wann von gleichen Dingen gleiche Dinge abgenommen werden, bleiben gleiche Dinge übrig" schiebt sich eine gedrängte Darstellung des doppelt italienischen Buchhaltens ein — und auch auf andere Verhältnisse des Handelsstandes, der praktischen Mefskunst, der Architektur, ja selbst des Schönschreibens (bei Gelegenheit der Parallellinien) ist an gegebenem Orte Rücksicht genommen.

Bei den vielfachen Seitenblicken vom geometrischen Gebiete auf die Algebra bedient Meifsner sich nun ausschliefslich der neuen Buchstabenrechnung, welche als Algebra speciosa der früheren Algebra numerosa entgegengesetzt wird.

Die Logarithmen werden erwähnt, hinsichtlich ihres Gebrauches aber auf die Geometria Tyronica verwiesen, welche vollständige Anleitung zum logarithmischen Rechnen und eine Tafel der Logarithmen von 1 bis 1000 und der Sinus und Tangenten von 5 zu 5 Minuten auf 7 Stellen enthält. Dafs Meifsner aber diese Anleitung und die Tafeln nicht einfach nach seinen Vorgängern wiedergegeben hat, beweisen die in späteren Jahrbriefen der Gesellschaft enthaltenen Mitteilungen aus der ungedruckten Handschrift des Euklid. So heifst es 1740:

„Wir haben jetzo vor, des seel. Meifsners bequemere Methode, die Logarithmos zu berechnen und zwar blos durch die gemeine Species ohne alle Extraction allhier in aller Kürze vorstellen wollen."

Die genannte ältere Methode beruht auf der Formel

$$\log \text{nat}\, x = \underset{\text{Idm } n = \infty}{(x^{\frac{1}{n}} - 1)\, n}$$

während die von Meifsner angewandte Methode der Formel

$$\log \text{brigg}\, x = \text{Mod.} \times 2 \left(\frac{x-1}{x+1} + \frac{1}{3} \left[\frac{x-1}{x+1} \right]^3 + \cdots \right)$$

entspricht.

Wir wissen, dafs die Formel für $\log (1 + x)$, aus welcher die obige hervorgeht, von Mercator im Jahre 1668 zuerst aufgestellt ist.

Wir sehen also hier, wie bei der Lehre von den Gleichungen, daſs Meiſsner den Arbeiten der maſsgebenden Algebraiker seiner Zeit vollständig gefolgt ist. Wie weit derselbe sich mit der Methode und den Ergebnissen der Differential- und Integralrechnung vertraut gemacht hat, können wir leider nicht mehr ergründen. Wir dürfen aber mit Sicherheit voraussetzen, daſs in der Handschrift des Euklid auch auf diese neue Rechnungsart Bezug genommen ist, finden wir doch bei seinem Freunde Paul Halcke gute Bekanntschaft mit derselben.

Paul Halcke, Schreib- und Rechenmeister in Buxtehude, stand unter den Mitgliedern der Societät in wissenschaftlicher Beziehung Meiſsner am nächsten. Er gehörte mit zu den Gründern der Gesellschaft und gab 1694 die Auflösungen zu dem Kunstspiegel, einer vor 1690 von Meiſsner veröffentlichten Aufgabensammlung, heraus. In den Societätsschriften ist vielfach die Dreifache Schnur angekündigt, ein Werk, in welchem Arithmetik, Geometrie und Astronomie nach bester Möglichkeit sollten verknüpft werden. Dasselbe ist indessen nicht druckfertig geworden, weil Halcke sich die traurigen Erfahrungen Meiſsners bei den Versuchen, seinen Euklid zum Verlag zu bringen, zu Nutze machte. Von 1697 an verlegte Halcke sich auf das Kalenderschreiben, und erst 1719 entschloſs er sich, unterstützt von der Gesellschaft, ein selbständiges Werk „Mathematisches Sinnenconfect“ herauszugeben. Dieses Buch ist von allen in der Societät veröffentlichten Schriften am bekanntesten geworden, es erreichte bei den Zeitgenossen einen durchschlagenden Erfolg, wie die vielen dem Werke vorgedruckten Gedichte zu Ehren des Verfassers beweisen, es ist 1767 ins Holländische übersetzt, und noch 1835 ist in der Gesellschaft über Veranstaltung einer neuen Auflage desselben verhandelt worden. Paul Halcke hatte vor allen Dingen den Vorteil, bei Abfassung dieses Werkes auf den Schultern Meiſsners zu stehen. In der Vorrede schreibt er: Die Regeln von der Quadrat- und Kubikcoſs habe ich nach bestem Vermögen eingerichtet, daſs sie ein jeder im Sinne behalten kann, welches man bisher vor unmöglich gehalten hatte. Die Anwendung der algebraischen Formelsprache war hier zum Durchbruch gekommen und zeigte ihren Segen.

Bei der Gleichung 3. Grades erkennt Halcke den casus irreducibilis. Er sucht durch ein Probierverfahren den Ausdruck $\sqrt[3]{A \pm \sqrt{-B}}$ in die Form $a \pm \sqrt{-b}$ zu überführen und so die imaginären Werte fortzuschaffen, von denen es heiſst, der surdische Teil $\sqrt{-B}$ erzeige sich als ganz ungeschickt und absurd, weswegen

die Zahlkünstler mit demselben nicht gerne wollen zu schaffen haben, gleichwie der Zimmermann ein unartig knastrig Stück Holz vermeidet. Halcke geht übrigens auch auf die trigonometrische Lösung dieses Falles ein, findet die Wurzeln der kubischen Gleichung durch Schnitte eines Kreises und einer Parabel und behandelt in Anlehnung an die Ideen der Meifsnerschen Generalregel die Zerlegung der Cossen in ihre Partes. In der Arithmetica infinitorum entwickelt Halcke sehr gesunde Anschauungen über das Unendlichgrofse und Unendlichkleine und zeigt sich bei der näherungsweisen Lösung der Gleichungen als bekannt mit den Ergebnissen der Differentialrechnung, ohne allerdings hier oder in dem Kapitel vom Gröfsesten und Kleinsten ihre Formen anzuwenden. Die volle Bekanntschaft Halckes mit der Differentialrechnung verrät dagegen sein Kapitel über die Quadratur des Kreises. Dasselbe beginnt mit einer klaren und vollständigen geschichtlichen Darstellung, aus welcher wir erfahren, dafs nach Ludolf von Ceulen sich auch der Hamburger Glockengiefser und geübte Mathematiker Hermann Benning mit derselben abgegeben und π auf 45 Ziffern berechnet habe.

Dann wird die 1682 von Leibniz in den Acta eruditorum gegebene Reihe für den Inhalt eines dem Quadrat mit der Seite 1 eingeschriebenen Kreises und eine von Dethlev Clüver in seinem Curieusen Welt Mercurio veröffentlichte Reihe für π mitgeteilt. Von letzterer heifst es, dafs sie sehr langsam konvergiere, und wenn dies die beste von Clüvers Erfindungen sei, so könne er wenig mit denselben ausrichten, es sei denn, er thue es den Krämern gleich, welche den Käufern die schlechtesten Waren zuerst vorlegen.

Halcke wendet sich dann zu der Rektifikation des Kreises mit Hilfe der Differential- und Integralrechnung, indem er sich bezüglich des Algorithmus derselben auf Chr. Wolffs 1710 herausgegebene Anfangsgründe aller mathematischen Wissenschaften bezieht.

Halcke entwickelt die Ausdrücke für das Differential des arcus sinus und des arcus tangens, verwandelt dieselben in Reihen und integriert die letzteren. Die durchaus klare Durchführung dieser Entwicklung führt den Beweis für Halckes Vertrautheit mit der Methode des Differentiierens und Integrierens.

Das ganze Buch bezeugt den hohen wissenschaftlichen Standpunkt des Schullehrers zu Buxtehude. Es hätte den Namen „Sinnen-Confect“ durch die knappe und klare Anordnung des allen Gebieten der reinen und angewandten Mathematik entnommenen Stoffes auch ohne die Einstreuung der anmutigen zum Teil gereimten Aufgaben verdient. Die Reimaufgaben, deren manche von Halckes ehemaligem

getreuen Lehrer Hinrich to Aspern herrühren, haben dem Buche jedenfalls auch manche Freunde verschafft, eine Probe derselben wird deshalb willkommen sein:

Simson schlug mit einem Backen
Eines Esels auf den Nacken
Die Philister unverzagt,
Daſs sie lagen, wie er sagt:
Da mit Haufen und so müssen
Unverhofft die Erde küssen.
Will man eigentlich die Zahl
Wissen, wieviel dazumal
Simson todt geklopft von ihnen,
Kann zur Nachricht folgends dienen:
Wann man 8 dazu addirt
Drei mal; oder subtrahirt
Hundert, wird der Rest hier eben
Auch die Summ Quadraten geben,
Derer beiden Wurzeln ihr
Unterschied ist, wann mit vier
Selben man multipliciret,
Kommendes Product addiret
Zu der Differenz Quadrat,
Giebt es zwölfe, wer nun hat
Etwas in den Jungen Jahren
Von der Rechenkunst erfahren,
Saget leichtlich wieviel Mann
Der Philister muſsten dran. (Facit 1000.)

$$[4(\sqrt{x+24}-\sqrt{x-100})+(\sqrt{x+24}-\sqrt{x-100})^2=12]$$

Wir müssen es uns versagen, Valentin Heins' auf einem anderen Gebiete liegende Schriften mit derselben Ausführlichkeit zu besprechen, wie diejenigen Meiſsners und Halckes. Die hauptsächlichen Werke sind:

1) Gazophylacium Mercatorio-Arithmeticum, d. i. Schatzkammer der kaufmännischen Rechnung,
2) Abyssus Mercatorio-Arithmeticum, eine ganz neue Informationsart in der kaufmännischen Rechnung.

Beide sind 1698 zuerst erschienen. Sie haben, obgleich tüchtige algebraische Kenntnisse verratend, ihren Erfolg in erster Linie dem unmittelbaren Nutzen zu verdanken, den sie für die gründliche Erlernung der kaufmännischen Rechnung boten. Das zuletzt genannte Werk ist bestimmt, dem Lehrer ein Mittel in die Hand zu geben, die in der Schule zu stellenden Aufgaben derart zu verändern, daſs alle Schüler mit verschiedenen Ansätzen rechnen und gleichwohl dasselbe Facit bek[redacted].

Das hohe Ansehen, welches Heins in kaufmännischen Kreisen genofs, erhellt wohl am besten daraus, dafs er es sich gestatten konnte, dieses Werk Denen Magnificis, Hoch- und Wohledlen, Vesten, Hochgelahrten, Hoch Ehrenvesten, Hoch- und Wohlweisen Herren Bürgermeistern, Syndicis und gesamten Ratsherren zu widmen und in der Vorrede mit Lob und Dank auszusprechen: „Dafs ich von Denen, die vormahls mir allen lobwürdigen Gehorsam, Liebe und Ehre in aller Freudigkeit bei ihrer Information erwiesen, auch unterschiedliche in amplissimo nostro senatu als patris patriae sehen kann."

Nächst Meifsner und Heins ist unter den in Hamburg wohnhaften Mitgliedern Johann Jakob Zimmermann in besonderer Weise zu erwähnen. Derselbe, in Würtemberg geboren, war bis 1685 Pfarrer in Bietigheim und dabei ein tüchtiger Astronom. In seinen Werken erweist er sich als ein eifriger Verteidiger der kopernikanischen Lehre und begabter Schüler Galileis. Er versucht nicht allein, die Widersprüche zwischen der Bibel und der kopernikanischen Weltanschauung zu heben, sondern auch die Richtigkeit dieser Anschauung durch seine Auslegung der Bibelstellen zu beweisen. Gegenüber dem starren Dogmatismus der damaligen Orthodoxie neigte Zimmermann der durch Jakob Böhme und Spener vertretenen mystischen Richtung zu, wodurch er sich viele Feinde und schliefslich seine Absetzung und Landesverweisung zuzog, als er Böhmes Bildnis in seiner Kirche aufhängen liefs und ihn den Aposteln gleichstellte.

Nach manchen Irrfahrten kam Zimmermann 1689 nach Hamburg, welches ihm zunächst duldsam seine Thore öffnete. Er ernährte sich hier durch Privatstunden und war nach allen gehabten Erfahrungen vorurteilsfrei genug, sich innig an Meifsner und Heins, bei denen er das gleiche wissenschaftliche Streben bemerkte, anzuschliefsen. Seine gelehrten Freunde haben ihm den Eintritt in die Societät verdacht, und er verteidigt sich hiergegen in der Vorrede zu seinen 1691 veröffentlichten auf alle Hypotheses applicabeln Fundamental-Aufgaben von denen Sonnen- und Mondfinsternissen, indem er anführt, er sei darum ersucht und habe ohne sein Bewufstsein den in der Kunstkette ihm beigelegten Societätsnamen erhalten. Er habe es dann dabei bewenden lassen, zumal er mit diesem seinem Exempel andere habe stimulieren wollen, dafs sie diese gute Intention betreffend die Aufnahme der Arithmetischen, Geometrischen und Algebraischen Kunstrechnung durch ihre Nachfolge unterstützen möchten; gestalten man hierin nicht die Absicht auf Staat und Grad, sondern blofs und allein auf die Beförderung dieser Künste, deren

sich in den alten Zeiten, wie aus den Historien bekannt, Kaiser und Könige nicht geschämet haben, richten solle.

Wir sehen hieraus, dafs Meifsner und Heins wohl die Absicht gehabt haben, auch akademisch gebildete Mathematiker in ihren Kreis zu ziehen. Das ist ihnen aber mit der einzigen Ausnahme Zimmermanns nicht geglückt.

Die Akademiker stiefsen sich eben an Aufserlichkeiten, an den auch in den Leges hervortretenden mitunter schwülstigen Formen; für sie war es schon genügend, dafs die Gesellschaft sich selbst eine Zunft nannte und manche überlebte Sitten beibehalten hatte, um sich von derselben fern zu halten.

Wir finden dies bestätigt durch eine Notiz im Jahrgang 1693 von Tenzels monatlichen Unterredungen, wo es gelegentlich einer anerkennenden Erwähnung der neuen Gesellschaft heifst, dafs Wappen, Ring und Namen manchen abhalten, sich in einen solchen neuen Orden zu begeben, ob ihm gleich der Vorsatz wohl behaget, und dafs wir wohl die Italiener in Aufrichtung solcher Collegiorum imitieren möchten, sei aber nicht nötig, dafs wir dem Orden und seinen Gliedern absonderliche hieroglyphische Namen geben.

Die letzte Bemerkung zielt auf die Sitte ab, jedem Mitgliede einen eigenen Societätsnamen beizulegen, welcher von dem Zunamen desselben abgeleitet wurde; so hiefs Meifsner der „Mehrende", Heins der „Hoffende", Zimmermann der „Zierende" u. s. w., wie aus dem Mitgliederverzeichnis zu ersehen ist. Wäre Zimmermann, wie früher mehrfach (u. a. auch bei Tenzel) angenommen ist, der vornehmste Stifter der Gesellschaft gewesen, so würde ihm mit Recht aus der Wahl seines Beinamens der Vorwurf unangemessenen Selbstlobes gemacht sein. Wir wissen aber, dafs wir nur Meifsner und Heins als Stifter der Gesellschaft ansehen können, welche sehr froh waren, in Zimmermann ein besonders würdiges Mitglied zu gewinnen. Die ohne sein Wissen vollzogene Wahl seines Beinamens ist also nur als ein Akt der Höflichkeit anzusehen.

Zimmermann nahm in dem damaligen grofsen Kirchenstreite zwischen dem ebenso intriguanten wie einflufsreichen Hauptpastoren Joh. Friedrich Mayer der St. Jacobikirche und dem Pastoren Horbius der St. Nicolaikirche jedenfalls die Partei des letzteren, der Spenerschen Richtung angehörigen Geistlichen, vereitelte dadurch seine Hoffnung, eine Professur am akademischen Gymnasium zu erlangen, und entschlofs sich 1692, nach Amerika auszuwandern. Er starb aber schon 1693 in Rotterdam, wohin er sich zunächst wandte. Wenn wir bedenken, dafs Meifsner in dem die ganze Bürgerschaft aufs tiefste

erregenden Streite äufserlich wenigstens auf der Seite seines mächtigen Patrones Mayer gestanden haben wird, so ist anzunehmen, dafs die kunstrechnungsübende Societät durch die Mitgliedschaft Zimmermanns wohl in allerlei peinliche Lagen gekommen ist, und dafs manche Anfeindung, welche sie zu erdulden hatte, durch Zimmermanns Parteistellung veranlafst war.

Andererseits ist es für die Entwicklung der Gesellschaft nachteilig gewesen, dafs Zimmermann, welcher nicht nur ein guter Mathematiker, sondern auch im allgemeinen Sinne ein tüchtiger Gelehrter war und mit den besten gelehrten Kreisen in Verbindung stand, nur so kurze Zeit der Gesellschaft angehörte. Bei der hohen Auffassung, welche Meifsner von seiner Wissenschaft hatte, können wir annehmen, dafs es Zimmermann bei längerer Wirksamkeit wohl gelungen sein würde, dessen unermüdliche Thätigkeit einem erweiterten Gebiete zuzuwenden.

Ein besonderer Anlafs hierzu lag vor infolge der lebhaften Teilnahme, welche der Vornehmste der Zeitgenossen der Nachricht von der Gründung unserer Gesellschaft entgegenbrachte. In dem Briefwechsel zwischen Leibniz und Placcius, welcher Gelehrte von 1675—1699 die Professur für Philosophie am akademischen Gymnasium in Hamburg bekleidete, findet sich unter dem Datum des 8. September 1690 eine Äufserung Leibniz', welche in deutscher Übersetzung wie folgt lautet:

„Neulich habe ich ein Buch gesehen, welches in deutscher Sprache von den Zahlenproblemen handelte, aus welchem ich ersehe, dafs in Hamburg einige hervorragendere Rechenkünstler zu einer Gesellschaft zusammengetreten sind und andere aus der Nachbarschaft zu demselben Vorhaben sich beigesellt haben, und dafs Meifsner, einer Eurer Landsleute, Rechenmeister an der St. Jacobi-Schule, der Anreger dieser Einrichtung ist. Mir hat dieser Gedanke sehr gefallen, und ich verspreche mir von demselben etwas Vortreffliches, wenn sie sich entschliefsen wollten, ihre Mühe auf solche Dinge zu verwenden, durch welche die Grenzlinien der Wissenschaft weitergerückt werden. Denn dafs die Zeit mit Einzelproblemen hingebracht werde, ist eines solchen Vorhabens nicht recht würdig, es sei denn, dafs dieselben entweder von eigenartiger Eleganz und Nützlichkeit sind, oder dazu beitragen, das Gebiet der allgemeinen Methode selbst zu erweitern. Nichts ist leichter, als Aufgaben zusammenzustellen, welche uns, die wir den Ausgangspunkt kennen, geläufig sind, anderen jedoch mehr Mühe, als notwendig ist, verursachen. Man mufs also darauf bedacht sein,

die Analysis selbst zu vervollkommnen, und ich glaube nicht, dafs es in Deutschland irgend einen giebt, welcher mit gröfserem Eifer als ich, um nicht zu sagen mit gröfserem Erfolge — denn der hängt teilweise vom Glücke ab — auf diesem Gebiete sich bewegt hat. Wir sind seit lange im Besitze einer allgemeinen Methode zur Lösung der kubischen Gleichungen: denn um die Schwierigkeit, welche entsteht, wenn die Quadratwurzel aus dem negativen Ausdrucke ausgezogen werden mufs, kümmere ich mich nicht und sehe sie nicht als Hindernis an. Auch haben wir eine allgemeine Methode zur Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Es bleibt jetzt noch übrig, dafs ähnliche Methoden für die höheren Grade aufgefunden werden. Denn soweit bekannt ist, sind diese nicht im Besitze der Rechenkünstler. Hierfür nun könnte ich einige Erfindungen von grofser Tragweite darbieten, wenn ich Zeit hätte, die ganze Ausrechnung durchzuführen. Ich bin auch im Besitze einer Erfindung, gewisse algebraische Tafeln anzulegen, welche, wenn sie einmal dargeboten würden, die Rechnung wunderbar erleichtern und in der Analysis fast soviel Nutzen gewähren würden, wie die Sinus- und Logarithmentafeln im gewöhnlichen Rechnen. Wenn nun die Gesellschaft auf die Ausarbeitung dieser Dinge zum allgemeinen Nutzen etwas beitragen würde, so würden die Mitglieder davon zuerst, vor anderen, Vorteil haben können. Wenn also jene Männer wirklich von Liebe zur Erweiterung der Wissenschaft geleitet werden, so möchte ich hoffen, dafs durch den Hinzutritt ihrer Arbeit in Deutschland etwas geleistet werden könne, was über alles bisher in der Algebra Aufgefundene weit hinausgehen würde. Du aber mufst bestimmen, ob Du Zeit hast, mit jenem Meifsner Dich zu bereden und seinen Eifer, und durch ihn den seiner Genossen, anzuregen, aber vor der Hand ohne Nennung meines Namens."

Das ist ein schönes Programm, und es war wohl geeignet, Meifsners wissenschaftlichen Ehrgeiz zu entflammen, wenn es ihm von befreundeter Seite gebracht wäre!

Placcius antwortete am 3. Januar 1691:

„Obgleich ich die Gelegenheit, Meifsner anzureden, bis jetzt vergebens gesucht und noch nicht gefunden habe, so habe ich doch dem Dr. Zimmermann, welcher vielleicht das vornehmste Mitglied jenes Kollegiums ist, sowohl über andere ihn betreffende Dinge, als auch über das, was Du über die Rechengesellschaft schreibst, in einer Weise Mitteilung gemacht, dafs ich glaube, es ist nicht erfolglos geschehen. Wenigstens schien er mir Freude zu em-

pfinden über eine Gelegenheit, über diese und ähnliche Gegenstände mit Dir in einen wissenschaftlichen Verkehr einzutreten."

Leider scheint sich das letztere wegen Zimmermanns Abreise aus Hamburg nicht verwirklicht zu haben. Leibniz kommt später noch einmal auf den Gegenstand zurück, indem er schreibt, es scheine der Rechengesellschaft das, was sie schon habe, gut genug zu sein.

Freilich konnte der vom Glück begünstigte Gelehrte sich wohl nicht in die Lage derer versetzen, welche nur die kargen, der schweren Berufsarbeit abgerungenen Stunden der hohen Wissenschaft weihen konnten und sich begnügen mufsten, für die Ausbreitung des vorhandenen Wissensschatzes zu sorgen und so mittelbar dem weiteren Ausbau der Mathematik zu dienen.

Dafs Meifsner und Genossen in diesem beschränkteren Sinne wesentliche Erfolge aufzuweisen hatten, das ist uns nicht allein durch ihre noch erhaltenen Schriften, sondern auch durch das Urteil der Zeitgenossen bezeugt. So schreibt Dethlev Clüver im Jahre 1700 in seiner Nova Crisis temporum bei Gelegenheit der Besprechung von Valentin Heins' Abyssus Mercatorio-Arithmeticum.

„Die vor 10 Jahren allhier errichtete Societas Arithmetica, so bis auf 30 Personen angewachsen und wovon dieser Herr Heins und der berühmte Algebraist Herr Meifsner die Capita und löbliche Urheber sind, hat bereits in kurzer Zeit dergleichen Specimina herausgegeben, dafs Hamburg, was die Rechenkunst betrifft, billig den Vorzug nicht allein vor allen Städten in Deutschland, sondern in ganz Europa bereits erworben hat, da es im Uebrigen an nichts fehlet, als wenn nur einige vornehme und reiche Patroni und Beförderer der Wissenschaft etwas herbeitragen möchten, damit ihre übrigen Scripta auch möchten bald zum Vorschein kommen. Wenn nach dem Vorgange dieses Collegii Arithmetici in andern Particulier Szienzen der Mathematik dergleichen wohl intentionirte Societäten gestiftet würden, könnte man in Kurzem sonderliche Augmenta aller Wissenschaften zu erwarten haben."

Ähnlich spricht sich dieselbe Kritik bei Besprechung des Meifsnerschen Euklid aus. —

Heinrich Meifsner, welcher im Jahre 1690 das Amt eines Jahrverwalters bekleidete, wurde in der Gesellschaft durch Beilegung des Titels Senior geehrt. Valentin Heins war 1691 der Nachfolger im Amte und erhielt den Titel Konsenior. Heins starb am 17. November 1704, Meifsner am 1. September 1716. Es gelang ihnen zwar, das Interesse an der Gesellschaft auswärts zu steigern, so dafs die Zahl der nicht in Hamburg wohnenden Mitglieder 1705 einen

gröfsten Wert von 28 erreichte und bis zum Ende der zunächst in Betracht kommenden Periode sich über 20 erhielt. In Hamburg selbst fanden sie aber weniger neue Genossen, und nach Meifsners Tode blieben nur drei einheimische Mitglieder.

Wie es scheint, ist auch der in § 12 der Leges gemachte Vorbehalt in dieser Zeit angewandt; der am Strohhause wohnende Schreib- und Rechenmeister Johann Gude ist der einzige, dessen Name in allen späteren Mitgliederverzeichnissen getilgt ist. Die Gründe einer erfolgten Ausschliefsung sind freilich nicht mehr bekannt.

Bei dem starken Einschrumpfen der Zahl der einheimischen Mitglieder ist der am Schlusse des § 7 erwähnte Fall, dafs nämlich die Verwaltung der Gesellschaft nach auswärts verlegt werden könne, ernstlich ins Auge gefafst. In den 1718 zum Beschlufs erhobenen revidierten Leges ist deshalb bestimmt, dafs die Societätslade, Schriften und Bücher, wenn solche beim Mangel hiesiger Mitglieder schon nach einem anderen Ort gebracht worden sein sollten, doch wieder nach Hamburg als dem Ort der Gründung zurückgebracht werden sollen, sobald die Zahl der hiesigen Zunftverwandten wieder angewachsen ist. —

Die Leges sind sonst im wesentlichen unverändert geblieben und haben nur einen neuen Paragraphen (zwischen 10 und 11) bekommen, in welchem bestimmt ist, dafs die auswärtigen Zunftglieder zwischen Ostern und Pfingsten von ihrem Leben und Verrichten an den Jahrverwalter schreiben und dabei 16 β als eine kleine Zulage wegen der Societät unumgänglichen Unkosten einsenden. Dagegen wird der Jahrverwalter auf Johannis einen Jahrbrief senden.

Von den Jahrbriefen dieser Zeit ist indessen keiner erhalten geblieben.

Die Kunstrechnungsperiode.

1720—1790.

Das Jahr 1719, welches Halckes Sinnenkonfekt brachte, gehörte jedenfalls in vollem Mafse noch zur Gründungsperiode. Dieses Werk, dessen Erscheinen wohl nicht ohne Einfluſs auf die in den folgenden Jahren eingetretene Zunahme der Mitgliederzahl gewesen ist, bildete indessen das letzte Glied in der Reihe der gröfseren mit Beihilfe der Societät ins Leben gerufenen selbständigen Arbeiten ihrer Mitglieder.

Bis zum Jahre 1725 stieg die Zahl der einheimischen Mitglieder wieder auf 10, diejenige der auswärtigen Mitglieder auf 32; hierdurch waren neue Elemente zum Einfluſs gekommen, welche zwar das An-

denken der Gründer in hohen Ehren hielten und emsig für die Förderung der mathematischen Wissenschaften in ihrem kleinen Kreise wirkten, welche aber nicht imstande waren, auf dem von Meifsner geebneten Grunde in gleicher Kraft wie ihre Vorgänger schöpferisch weiterzubauen.

Bezeichnend hierfür ist die Thatsache, dafs 1740 der Stern und Kern der Algebra in fast unveränderter Weise zur Neuausgabe kam, während damals doch nach mancher Richtung die Mittel vorlagen, Veraltetes fallen zu lassen und die gegebenen Anfänge neuer Entwickelung weiter zu verfolgen.

Über die Verhandlungen der Gesellschaft in dieser zweiten Periode besitzen wir etwas bessere Kenntnis als bezüglich der Gründungszeit, indem sich auf der hiesigen Stadtbibliothek noch verschiedene der, wie es scheint, regelmäfsig in jedem Jahre ausgegebenen Jahrbriefe vorfinden. Wir wissen aus diesen Quellen, dafs die Gesellschaft ihre Thätigkeit ohne Unterbrechung fortgesetzt hat, und dafs auch die auswärts wohnenden Mitglieder, welche an den regelmäfsigen Zusammenkünften nicht teilnehmen konnten, auf schriftlichem Wege ihre Verbindung mit der Gesellschaft aufrecht zu erhalten suchten.

Während hier am Platze in den 70 Jahren der Periode nur 16 Mitglieder neu hinzutraten, wurden an auswärts lebenden Mathematikern 57 aufgenommen. Es erhellt daraus, dafs die auswärtigen Mitglieder bedeutend überwogen, und dafs ein grofser Teil der Gesellschaftsthätigkeit in der Erledigung des Briefwechsels mit denselben bestand. Um eine gewisse Stetigkeit in diesem Schriftenaustausch herzustellen, wurde im Laufe der Zeit ein ständiger Korrespondent erwählt, welcher auch die Bibliothek zu verwalten hatte, während die Leitung der Gesellschaft nach wie vor in den Händen des Jahrverwalters, beziehungsweise des Mitjahrverwalters oder des Adjunkten ruhte. (Vergl. §. 6 der Leges.) In den Zusammenkünften wurden vor allen Dingen die eingegangenen Briefe besprochen, welche oft die Lösungen gestellter Aufgaben oder auch wohl neue Probleme enthielten.

Vielfach wurde hierbei auch auf die Werke der Gründer zurückgegriffen.

Nicht alle auswärtigen Mitglieder waren in der erwünschten Weise für die Zwecke der Gesellschaft thätig, denn mancher wird seinen Beitritt nur gesucht haben, um sich auf seinen Schriften als Mitglied dieser alten und angesehenen Societät bezeichnen zu können. So schreibt der Jahrverwalter Joachim Franck im Jahre 1738, nach-

dem er den Tod der Mitglieder Carsten Dose in Crempe und Georg Ressler in Breslau gemeldet hat:

„Man zieht sich den Verlust dieser so werthen Männer um desto mehr zu Gemüthe, je mehr man derselben untadelhaftes Betragen gegen die Gesellschaft durch Anderer gegentheiliges Verhalten mit Empfindlichkeit überführet worden, indem man zu wünschen Ursache hat, dafs Mancher nach dem löblichen Beispiel des seligen Herrn Dose, welcher noch kurz vor seinem Ende seinen Freunden empfohlen, mit unserer löblichen Gesellschaft alles in Richtigkeit zu bringen, sich entschliefsen möchte, seinem Versprechen und dem Wohlstande in Zukunft genauer nachzukommen. Wir würden alsdann nicht nöthig haben, einigen unserer Herren Mitglieder ihre noch fortwährende Negligence vorzurücken, denn es sind einige von unseren Herren Collegen so commode, dafs sie unsere Briefe bei sich niederlegen, ohne zu melden, ob sie solche empfangen haben, andere aber so träge, dafs sie sogar die selbst beliebte jährliche kleine Zulage zurückhalten."

Unter den Mitgliedern dieser Periode finden wir einige Kaufleute, die ganz überwiegende Mehrzahl gehört aber dem Stande der Schullehrer an, und in eigentlich gelehrten Berufsarten finden wir keinen einzigen, wie denn auch die Vorrede zu den Leges von 1774 ausdrücklich ausspricht, dafs der Zweck der Gesellschaft ein desto gemeinnützigerer sei, weil sie sich vornehmlich auf diejenigen Lehrer erstrecke, welche nicht etwa künftighin gelehrte Mathematiker, sondern solche zu Schülern haben, die in ihrem künftigen bürgerlichen Leben, im Handel und Gewerbe, diese Kunst ausüben sollen.

Wir sehen hieraus, dafs die Gesellschaft hinsichtlich ihres Zieles keineswegs Fortschritte gegenüber der Meifsnerschen Zeit gemacht hatte, und finden es deshalb erklärlich, dafs sich die Arbeiten der grofsen Mathematiker des achtzehnten Jahrhunderts in ihren Schriften nicht widerspiegeln. Die gelegentlichen Mitteilungen aus der Handschrift des Meifsnerschen Euklid bilden den wertvollsten Inhalt dieser Schriften, daneben finden wir manche Bedürfnisse des praktischen Lebens, z. B. auf dem Gebiete der nautischen Astronomie, berücksichtigt, aber mit besonderer Vorliebe wandte man sich den künstlichen Aufgaben aus der niederen Algebra zu.

Die erste und zugleich umfangreichste Veröffentlichung dieser Periode sind die im Jahre 1723 herausgegebenen Kunstfrüchte der hamburgischen Kunst-Rechnungs lieb- und übenden Societät, ein Quartband von 172 Seiten, welcher 16 verschiedene Arbeiten der Mitglieder enthält. Das einzige Mitglied, welches hierbei nur unter

seinem Societätsnamen (der Meditierende) erscheint, ist der Kaufmann Klaus Magens; vielleicht hat derselbe einen Teil der gewifs nicht unbedeutenden Verlagskosten getragen und sich aus Bescheidenheit nicht genannt. Wenigstens ist die in der Vorrede zu den Kunstfrüchten angekündigte Absicht „mit diesen so vermischten Differenten Mathematischen Nutz- und Ergötzlichkeiten jährlich fortzufahren" nach Magens Übersiedelung nach London, welche in das Jahr 1724 fällt, unterblieben.

Magens selbst hat auch den umfangreichsten Beitrag geliefert, dessen erster Teil „Die lebendige Handlung" betitelt ist und alle Seiten der Kaufmannsrechnung berührt. Daran knüpft sich eine ausführliche Erörterurg des Nutzens der Algebra und der Astronomie für die Kaufmannschaft.

Auch andere Mitglieder beschäftigen sich in ihren Beiträgen mit astronomischen, die meisten aber mit algebraischen Aufgaben. Vielfach werden die Auflösungen zu Aufgaben aus der „Kunstkette" und dem „Sinnenkonfekt" gegeben.

Unter dem Namen eines Labyrinthes werden solche Aufgaben verstanden, bei denen Ansatz und Facit aus denselben Ziffern bestehen, z. B. es wird gefragt, wie oft zu 12345 die Zahl 6789 addiert werden müsse, bis schliefslich 54321 erscheint, vorausgesetzt, dafs allemal 56789 subtrahiert wird, sobald die Summe diese Zahl übersteigt.

Die Zerlegung der Zahlen in ihre Faktoren und Aufsuchung von Primzahlen bildet den Inhalt mehrerer Arbeiten.

Der „Wohlmeinende" (Berend Andreas Wodarch, Schreib- und Rechenmeister zu St. Katharinen) knüpft hieran eine Betrachtung über Befreundete Zahlen, welche die Eigenschaft haben, dafs die Summe der Teiler der einen Zahl gleich der anderen ist. Es wird hierbei der Kanon des Cartesius zu Grunde gelegt: Wenn a eine Potenz von 2 ist und $3a - 1$, $6a - 1$ und $18a^2 - 1$ Primzahlen sind, so finden sich die Zahlen $(18a^2 - 1)\,2a$ und $(3a - 1)(6a - 1)\,2a$ als befreundet. Halcke hatte gefunden, dafs für

$a = 2$ das erste Paar 220 und 284,
$a = 8$ „ zweite „ 17296 und 18416

komme. Wodarch findet für $a = 64$ das dritte Paar

9363584 und 9437056.

Weitere Untersuchung ergab bis 2^{45} keine Lösung. Bei 2^{46} ist die Fortsetzung der Arbeit aufgegeben, weil die Zahl

89 131 682 828 547 879 792 736 944 127

auf ihre Eigenschaft als zusammengesetzte Zahl oder Primzahl zu

untersuchen war. Hieran ist auch die Geduld unseres Rechenmeisters gescheitert.

In dem Jahrbrief von 1760 wird nach Meifsners Euklid ein anderer Kanon mitgeteilt, welcher dem obigen vorzuziehen sei. (Vergl. Mitteilungen Band I, Seite 14.) Man hat sich also nachhaltig mit dieser Frage beschäftigt, ist aber auch nicht weiter gekommen, denn es heifst:

„Hie kostets grofse Müh bis an das viert und fünfte Paar,
So sind in der lieblosen Zeit auch wahre Freunde rar!"

Die in den Kunstfrüchten von 1723 enthaltene Arbeit von G. H. Paricius ist als ein beredtes Zeugnis der Mafsverwirrung früherer Zeiten noch erwähnenswert. Heinrich Meifsner hatte schon am Ende des zweiten Buches seines Euklid sich resigniert geäufsert, dafs nicht zu hoffen sei, so mancher Königreiche, Fürstentümer und Länder uralte Gewohnheit in Einteilung ihrer Mafse, Münzen und Gewichte zu ändern, obgleich man in Orten, die nur eine halbe Meile voneinander entfernt sind, eine grofse Ungleichheit finde. Paricius beginnt nun seine Arbeit, in der ein Verzeichnis von 83 verschiedenen in Geltung stehenden Ellenmafsen gegeben und eine Vergleichung derselben durch Zurückführung ihrer Länge auf die in 1000 Teile eingeteilte Regensburger Elle empfohlen wird, mit dem Verse:

„Wann der Menschen Wankelmuth allen Leuten wird erlauben,
Dafs den einig wahren Gott man verehrt mit einem Glauben,
Dafs man braucht nur einerlei Münz, Ell, Maafs, Gewicht und Geld,
Dann wirds, glaub' es sicherlich, besser stehen in der Welt."

Die versprochene Fortsetzung der Kunstfrüchte ist nie erschienen. 1757 wird zwar gemeldet, dafs man hoffe, die zweite Sammlung der Societätsfrüchte mit Hilfe des „Critisierenden" (Banquier Joseph Crümmel in Aachen), welcher die Mühe der Besorgung des Druckes übernommen, ehestens hervortreten zu lassen; im folgenden Jahre aber wird mitgeteilt, dafs Herr Crümmel am 27. Juli geschrieben habe, in Bonn, Köln, Frankfurt und Aachen sei kein Drucker zu finden, weil sich alle vor den x^2, y^3, a^4 etc. fürchteten.

Dafs die Stadtbibliothek so manche Jahrbriefe aus dieser Zeit besitzt, haben wir wohl zumeist dem trefflichen Gerlof Hiddinga zu verdanken, welcher Lehrer der Mathematik und des Zeichnens war, und in letzterer Eigenschaft seit 1724 trotz seines reformierten Glaubensbekenntnisses am Johanneum angestellt war. Hiddinga finden wir 1723 zuerst und bis 1758 im ganzen fünfmal als Jahrverwalter; wir besitzen vier von ihm erstattete Jahrbriefe.

Die Jahrbriefe dieser Zeit, welche in der Regel einen halben

oder einen ganzen Bogen in Quartformat umfassen, beginnen mit der Anrede „Kunsterfahrener Hochgeehrter Herr und Werthgeschätzter Gesellschafter“ oder einer ähnlichen Wendung. Der Jahrverwalter erstattet zunächst Bericht über die äufseren Verhältnisse der Gesellschaft, Zuwachs an Mitgliedern, eingetretene Todesfälle u. dergl. In der Regel schliefsen sich hieran Lösungen früher gestellter Aufgaben oder neue Aufgaben; mitunter sind auch Mitteilungen über astronomische Dinge, namentlich über bevorstehende Sonnen- und Mondfinsternisse aufgenommen. Der Jahrbrief von 1760 enthält z. B. eine Tafel der Venusdurchgänge und eine Besprechung dieses Ereignisses anläfslich der im kommenden Jahre bevorstehenden Wiederkehr desselben.

Hiddinga berichtet 1732 über den Nutzen der Societät, verbindet hiermit einen historischen Rückblick auf die Entwicklung derselben, bei welcher Gelegenheit Meifsner, Heins und Paul Halcke besonders hervorgehoben werden, und fährt dann fort: „In der Gegenwart bestehet der Nutzen darin, dafs man durch seine Freunde und Correspondenten vielmals aufgemuntert wird, bald dieses, bald jenes Problem, sowohl in algebraischen als astronomischen Wissenschaften, zu untersuchen, wie ich denn für meinen Theil bekenne, dafs mir dann und wann Sachen vorgekommen, die über meinen Horizont gegangen und mich genöthigt, von Anderen deswegen Rath einzuholen, weil es mir bekannt, was für ein Talent der eine vor dem anderen besitzet.“

1748 berichtet Hiddinga die Aufnahme der ersten Mitglieder aus Böhmen und wünscht, dafs möglichst viele ihrem löblichen Beispiele folgen möchten. Es heifst dann weiter: „Und warum sollte das auch nicht geschehen können? Denn obgleich unserer Societät der Name einer Zunft von Alters her beigelegt worden, welcher Vielen etwas unanständig erscheinet, so kann doch dieses Wort das gute Vorhaben derselben nicht hemmen und man kann es inskünftige weglassen.“

1758 teilte Hiddinga, welcher nunmehr im 76. Lebensjahre stand, mit, dafs er seine Kunstgedanken schon eine geraume Zeit habe fahren lassen müssen, weil ihm von der Admiralität aufgetragen sei, 24 junge Leute in der Steuermannskunst zu unterrichten, und fügt hinzu, dafs er gottlob! zu solchem Alter gestiegen sei, welches ihm notwendig ernsthafte Gedanken einflöfsen müsse und ihm nicht gestatte, sich zu sehr mit Nebendingen zu beschäftigen, er hätte es deshalb lieber gesehen, wenn er mit Ausfertigung dieses Jahrbriefes verschont worden wäre.

Wir sehen hieraus, dafs bei der geringen Zahl der einheimischen Mitglieder die Leitung der Gesellschaft wiederholt auch dann noch den früher bewährten Männern übertragen werden mufste, wenn dieselben nicht mehr imstande waren, mit der alten Frische ihrem Amte vorzustehen. Die Gesellschaft nahm dadurch allmählich einen etwas alternden Charakter an und fand auch in den Kreisen, für welche sie eigentlich bestimmt war, nicht mehr die Teilnahme wie in früheren Jahren. Von 1725—1764 sind nur drei einheimische Mitglieder neu eingetreten, und wir vermissen in dieser Zeit manchen in der Lehrerwelt gut klingenden Namen in der Mitgliederliste, namentlich den Jürgen Elert Kruses, welcher von 1733—1775 an der Nikolai-Kirchenschule thätig war und als Lehrer sowohl wie als Schriftsteller sich in der kaufmännischen Welt, ähnlich wie Valentin Heins, eines sehr ehrenvollen Rufes erfreute.

Neben Hiddinga ist aus dieser Zeit Johann Jürgen Ressing, Lehrer an der Pafsmannschen Schule, besonders zu erwähnen, welcher nachweislich in den Jahren 1740, 45, 60, 65, 74, 78, 83, 88, zuletzt im Alter von 82 Jahren, der Gesellschaft vorgestanden hat. Er war der Hauptvertreter der diese Periode im ganzen charakterisierenden Kunstrechnung, wie schon die Titel der von ihm unter seinem Societätsnamen, der „Ruhende", herausgegebenen Werke darthun:

Arithmetischer und Algebraischer Zeitvertreiber,
Zahlenverwechslungslust,
Kaballistischer Löseschlüssel,
Arithmetische Ruhestunden u. s. w.

In denselben ist „das Nützliche mit lustigen Dingen untermischet". Unter den umfangreicheren Zahlenaufgaben finden wir die Lösung von Heinrich Meifsners Arithmetischem Neujahrsgeschenk von 1705, welches auf fünf Gleichungen ersten Grades mit fünf Unbekannten führt. Meifsner soll diese Aufgabe den sich häufig ihm vorstellenden Rechenmeistern als Probe vorgelegt und dabei sechs Wochen Zeit gewährt haben, was auf die Qualität dieser angeblichen Rechenmeister schliefsen läfst.

Daneben finden sich allerlei Vexieraufgaben. Nach Art des von Ressing gepflegten Kabbalistischen Paragrammas enthält der Jahrbrief von 1765 eine Beglückwünschung des Predigers in St. Georg, Dr. Hoeck, zu dessen 40jährigem Amtsjubiläum. Die Buchstaben gelten dabei nach ihrer Stellung im Alphabet, die Summe ihrer Stellenzahl steht neben jeder Zeile:

Es lebe	46	Der	26
Herr	47	bezeuget	88
Doctor	71	hat	28
Henrich	63	das	23
Hoeck	40	Wort	72
Pastor	84	Gottes	82
an	14	und	37
der	26	das	23
heiligen	67	Zeugnis	97
Drey	50	von	48
Einigkeits	104	Jesu	52
Kirche	52	Christo	88
	664		664

Eine ähnliche Spielerei ist das Chronostichon, ein lateinischer Sinnspruch, in welchem alle M, D, C, X, V und I als römische Zahlzeichen genommen werden und zusammen eine zum Spruche passende Jahreszahl darstellen.

So heifst es 1740:

InsIgnIs soCIetas arIthMetICa DVraVIt IoVa faVente annos qVInqVagInta,

und 1736 wird ein ähnliches Chronostichon mitgeteilt, nachdem der Jahrverwalter den im verflossenen Jahre erfolgten Tod dreier Mitglieder gemeldet und sich mit dem solamen miseris, socios habuisse malorum getröstet hatte: „Denn unser Hamburg bedauert schmerzlich den Tod des Herrn Dr. Fabricii, ja auch der Kaiserl. Hof ist nicht wenig durch das Absterben des grofsen Helden Eugenii gerühret worden."

Nach Hiddingas Tode, im Jahre 1766, zählte die Gesellschaft nur noch 5 einheimische Mitglieder. Die Bemühungen, geschickte Männer in öffentlichen Schulbedienungen zum Eintritt heranzuziehen, waren fehlgeschlagen, und es mochte sich hierbei wohl herausgestellt haben, dafs die Gesellschaft zu sehr unter dem Eindrucke der aus der Gründerzeit überkommenen, nunmehr ganz veralteten, äufseren Formen stehe.

Unter den Mitgliedern dieser Zeit sind Fedder Karstens und Johann Reimer I. besonders hervorzuheben. Der erstere, 1738 auf der schleswigschen Insel Pellworm geboren, war 1760—64 als Assistent des Schreib- und Rechenmeisters der Stadtschule zu Husum auswärtiges Mitglied, kam dann nach Hamburg, wo er verschiedene Handelsgeschäfte versuchte und endlich ein General-Lotteriecomptoir nebst Geldwechsel- und Bankgeschäft errichtete, und durch dasselbe

zu einem bedeutenden Wohlstande gelangte. Karstens war ein sehr thätiges Mitglied der im Jahre 1765 begründeten Patriotischen Gesellschaft und führte die Kassenverwaltung der aus dem Kreise der letzteren Gesellschaft hervorgegangenen Allgemeinen Versorgungsanstalt bis zu seinem Tode im Jahre 1802. Johann Reimer sen. (1731—1803) war Lehrer der Mathematik, der Navigation und des Buchhaltens und trat 1751 der Kunstrechnungs-Societät als Mitglied bei. 1767—69 gab Reimer eine Wochenschrift „Der Mathematische Liebhaber" heraus, welche namentlich für praktische Anwendungen der Mathematik Interesse zu erwecken suchte.

Reimers Beiname war „der Recreirende". Er hat denselben durch seine Thätigkeit für die Gesellschaft später im vollen Mafse verdient, denn ihm und Karstens ist vor allem die Neuordnung der Gesellschaft zu danken, welche 1767 zuerst ins Auge gefafst wurde und 1774 durch die Veröffentlichung der Revidierten Leges oder Gesetze, nach welchen künftighin Mitglieder in die 1690 zu Hamburg errichtete Kunst- und Rechnungs-Societät aufgenommen werden, ins Leben trat.

In den neuen Satzungen ist die Gesellschaft nicht mehr als Zunft bezeichnet, und gleichzeitig ist die etwas umständliche und veraltete Ausdrucksform der ursprünglichen, 1718 nur wenig veränderten Leges wesentlich vereinfacht. Bezüglich der Aufnahme ist bestimmt, dafs jedes ordentliche Mitglied Arithmetik, Geometrie, Trigonometrie, Algebra und die nötigen Fundamenta Euclidea verstehen solle, und dafs der Nachweis hierüber durch eine Probearbeit (Specimen) zu erbringen sei.

Neben den ordentlichen Mitgliedern kennen die neuen Leges auch Ehrenmitglieder. Als Ehrenmitglieder können diejenigen aufgenommen werden, welche, sie mögen von der Mathematik Gebrauch machen oder nicht Gebrauch machen, dieser Gesellschaft durch ihren Beitritt Ansehen geben und ihr Vorhaben befördern können. Es wird dabei erwähnt, dafs schon bisher solche angesehene Männer in der Gesellschaft gewesen, welche in dem Verzeichnisse der Mitglieder den ersten Platz eingenommen haben. Es sind dies die in dem der Festschrift angehängten Verzeichnisse der Ehrenmitglieder zuerst aufgeführten Wiener Herren, welche wohl bei der Verleihung des Kaiserl. Privilegiums von wesentlichem Einflufs waren.

Von den regelmäfsigen Versammlungen der in Hamburg wohnenden Mitglieder ist nur insofern die Rede, als bezüglich der Ehrenmitglieder erwähnt ist, dafs diese bei den Zusammenkünften der ordentlichen Mitglieder nicht zu erscheinen brauchen.

Dafs die Gesellschaft unter Beibehaltung der alten Grundlagen den vielfach ihren Formen anhaftenden Zopf beseitigte, gereichte ihr zum Vorteil. Solches wurde auch öffentlich anerkannt, wie eine Notiz in der Nummer des Hamburgischen Unpartheiischen Correspondenten vom 27. Juli 1774 zeigt:

„Die Mitglieder der Societät haben wohl gethan, dafs sie die Gesetze der Gesellschaft von Neuem übersehen und den Eintritt auf gewisse Weise erleichtert haben. Wenn sie künftig bei der Ausgabe neuer Schriften besonders mehr auf das Gemeinnützige als auf das blofs Künstliche sehen und allenfalls auch die Titel derselben simpler machen wollen, so könnte sich das Publicum und besonders der commercierende Teil desselben einen wesentlichen Nutzen von dieser Gesellschaft versprechen."

Der in dem zweiten Satze ausgesprochene Wunsch ist sehr bezeichnend für die Beurteilung der ganzen hier in Betracht kommenden Periode im Leben der Gesellschaft.

In der Gründerzeit finden wir in Meifsner das Streben nach planmäfsig wissenschaftlicher Behandlung der Mathematik, in Heins die auf praktische Verwendung der wissenschaftlichen Ergebnisse gerichteten Bemühungen verkörpert. Fühlte sich das nachfolgende Geschlecht nicht stark genug, auf dem von Meifsner angedeuteten Wege fortzuschreiten, so erforderte die gesunde Entwicklung der Gesellschaft, den anderen Weg zu verfolgen, also das Arbeitsziel derselben auf dem Gebiete der angewandten Mathematik zu suchen.

Der Grund, dafs diese Richtung in der Kunstrechnungs-Periode nicht allgemein eingeschlagen wurde, lag wohl darin, dafs den derzeitigen Mitgliedern die Bedürfnisse des Handels und Gewerbestandes nicht in genügendem Mafse bekannt waren.

Ausnahmen sind natürlich auch bei dieser Regel zu erwähnen, so dafs Bestrebungen, dem praktischen Leben zu dienen, nicht ganz fehlen. Johann Reimer gab aufser dem Gemeinnützigen Mathematischen Liebhaber im Jahre 1782 Holztafeln heraus, welchen eine Abhandlung von der Art das Holz zu messen beigefügt ist. Dieselben zeigen eine gründliche Behandlung des Stoffes, unter anderem ist die Frage nach den Abmessungen des Balkens von gröfster Tragfähigkeit, welcher aus einem Stamme von bestimmtem Durchmesser geschnitten werden kann, richtig beantwortet.

Zur Beurteilung der Thätigkeit der auswärtigen Mitglieder, welche in dieser Periode der Zahl nach so wesentlich überwogen, dafs 1760 neben 5 einheimischen Mitgliedern 20 auswärtige Mitglieder zu verzeichnen sind, stehen uns im allgemeinen nur dürftige Quellen zur

Verfügung. Wir müssen nach manchen Äufserungen in den uns erhaltenen Jahrbriefen indessen annehmen, dafs die kleine Schar der am Sitze der Gesellschaft wohnenden Mitglieder eine lebhafte Unterstützung ihrer Bemühungen durch die auswärtigen Freunde erfahren hat und, dafs es ohne diesen Einflufs vielleicht nicht möglich gewesen wäre, auch in den Zeiten der schwächsten Mitgliederzahl die Thätigkeit der Gesellschaft den Satzungen entsprechend fortzuführen.

In den ersten Jahrzehnten finden wir die auswärtigen Mitglieder über die verschiedensten Wohnsitze, von Regensburg bis Stockholm und von Prag bis Amsterdam, zerstreut. Der bedeutende Zuwachs, den die Zahl derselben am Schlusse der Periode, wohl mit veranlafst durch das Bekanntwerden der neuen Leges von 1774, erfuhr, erfolgte dagegen fast ausschliefslich durch den Beitritt holländischer Mathematiker. Von den 32 auswärtigen Mitgliedern, welche 1790 der Gesellschaft angehörten, hatten 23 ihren Wohnsitz in den Niederlanden.

Herr Professor Bierens de Haan in Leyden hat in den 1878 herausgegebenen Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en Natuurkundige Wetenschapen in de Nederlanden bei Gelegenheit der Besprechung der Logarithmen von Adolph Frederik Marci bereits in ausführlicher Weise der Beziehungen unserer Gesellschaft zu den niederländischen Mathematikern gedacht.

Die Gesellschaft ist ihrem Ehrenmitgliede Herrn Professor Bierens de Haan zu besonderem Danke dafür verpflichtet, dafs derselbe ihrer Bitte entsprochen und nach den in Holland vorhandenen Quellen dasjenige zusammengestellt hat, was über die niederländischen Mitglieder am Ende des 18. Jahrhunderts sich auffinden liefs. Aus diesen in die vorliegende Festschrift aufgenommenen Mitteilungen erhellt das lebendige Interesse, welches man namentlich in Amsterdam der Hamburger Mathematischen Gesellschaft entgegenbrachte. Wir müssen annehmen, dafs zeitweise gewissermafsen ein zweiter Brennpunkt für das Gesellschaftsleben in Amsterdam bestanden hat, denn sonst wäre es kaum möglich gewesen, dafs für verschiedene Mitglieder der Societätsname nicht der deutschen, sondern der holländischen Sprache entnommen wurde. Die Lösung dieser Beziehungen, welche nach 1790 ziemlich schnell erfolgte, ist wohl einerseits den gewaltigen Kriegsunruhen, welche den Übergang vom 18. zum 19. Jahrhundert begleiteten, andererseits der 1778 erstrebten Gründung der Mathematischen Gesellschaft in Amsterdam zuzuschreiben. Dafs in den ersten Jahren manche Wechselbeziehungen zwischen beiden Ge-

sellschaften bestanden, läfst sich vermuten, da wir von einzelnen Hamburger Mathematikern wissen, dafs sie aufser der hamburgischen auch der Amsterdamer Gesellschaft angehörten.

3. Die technische Periode.

1790—1860.

Das Revolutionsjahr 1789 hat auch in der Mathematischen Gesellschaft einen Rest alten Zopfes beseitigt, insofern die Sitte, jedem Mitgliede einen besonderen Societätsnamen beizulegen, aufgehoben wurde.

Dem Jahre 1790, welches der Gesellschaft das 100jährige Jubelfest brachte, ging man frischen Mutes entgegen, und die am 6. März jenes Jahres begangene Feier lieferte den Beweis, dafs das Ansehen der Gesellschaft und das Interesse für die Ziele derselben noch keineswegs geschwunden waren. Einen ausführlichen Bericht über diese Feier besitzen wir nicht, wir dürfen aber nicht daran zweifeln, dafs das Andenken Heinrich Meifsners und Valentin Heins' bei dieser Gelegenheit in den Vordergrund gerückt wurde, sehen wir doch als Folge jener Feier den Kreis, dem jene Männer angehörten, sich der Gesellschaft wieder zuwenden: die Hauptlehrer der 5 Kirchenschulen erklärten ihren Eintritt in dieselbe.

So wertvoll der Anschlufs dieser Männer, voran des würdigen Christoph Diedrich Westphalen, für das Gesellschaftsleben war, so konnte hierdurch allein doch nicht die so wünschenswerte Wiederbelebung der Gesellschaft herbeigeführt werden. Der Stand der Lehrer an den Bürger- und Volksschulen hatte sich im Laufe eines Jahrhunderts bedeutend verändert, an die Stelle der mehr oder weniger dem Zufall überlassenen Schulung des Einzelnen war eine regelmäfsige Ausbildung sämtlicher Lehrer getreten, und die Leistungen derselben, vom Standpunkte der allgemeinen Wissenschaften betrachtet, waren wesentlich gesteigert. Damit waren diese Lehrer aber keineswegs bessere Mathematiker als diejenigen ihrer Vorgänger, welche durch eigene Kraft die Methoden des in den Vordergrund des Unterrichts gestellten Rechnens entwickelt hatten. Der Lehrstoff der kaufmännischen Rechnung war am Ende des 18. Jahrhunderts fertig ausgebildet und über dieses Gebiet hinauszugehen, lag kein zwingender Grund vor. So sagt Büsch in seiner 1775 herausgegebenen Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften bei Erläuterung der Irrationalzahlen:

„Aus unserer Anweisung zur bürgerlichen Rechenkunst ist die Lehre vom Ausziehen der Quadratwurzel fast ganz verbannt,

man hört in derselben also nicht mehr viel von tauben (surdischen) Zahlen. Die deutschen Rechenmeister des vorigen Jahrhunderts beschäftigten sich viel damit."

Im Gegensatze hierzu war in anderen Kreisen das Bedürfnis, die mathematischen Wissenschaften zu pflegen, wesentlich vermehrt.

Die wachsende Bedeutung der Handelsflotte lenkte die Aufmerksamkeit auf die Verbesserung des Unterrichtes in der Steuermannskunst, und die von dem handwerksmäfsigen Betriebe des Bauwesens sich loslösende Kunst der Ingenieure wurde namentlich im Wasserbaufache vor Aufgaben gestellt, welche nur auf mathematischer Grundlage zu erledigen waren.

Für die Entwicklung der Mathematischen Gesellschaft ist es von segensreichen Folgen gewesen, dafs die Vertreter dieser Richtungen ihre Aufmerksamkeit der in hundertjähriger Wirksamkeit erprobten Vereinigung zuwandten und als thätige Glieder derselben beitraten.

Die seit der Gründerzeit ohne nennenswerte Erweiterung ihrer Ziele betriebene und deshalb unfruchtbar gewordene Pflege der Kunstrechnung wurde nunmehr durch das Streben ergänzt, mit Fleifs und Anstrengung in allen Verhältnissen des bürgerlichen Lebens die Anwendungen der Mathematik zu fördern.

Um auch äufserlich den Zweck zu bezeichnen, dessen Erreichung die Gesellschaft sich vornahm, wurde bei der Jubelfeier beschlossen, den Namen:

„Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen Wissenschaften in Hamburg"

anzunehmen.

Das Fest gab gleichzeitig die Gelegenheit, mit der Ernennung von Ehrenmitgliedern den Anfang zu machen, und zwar fiel die Wahl auf den Professor Johann Georg Büsch und auf den Verordneten des Admiralitäts-Dispache-Bureaus Matthias von Drateln.

Büsch war 1728 im Lüneburgischen geboren, wurde in Hamburg, wo sein Vater eine Predigerstelle erhielt, erzogen und studierte in Göttingen Theologie. Schon hier widmete Büsch seinen Privatfleifs den mathematischen Wissenschaften und erreichte in denselben eine solche Bedeutung, dafs ihm, nachdem er 1755 unter die Hamburger Predigtamtskandidaten aufgenommen war, schon im folgenden Jahre die erledigte Professur der Mathematik am akademischen Gymnasium übertragen wurde. Büsch hat dieselbe 44 Jahre lang bis zu seinem am 5. August 1800 erfolgten Tode mit grofsem Eifer verwaltet und daneben nach den verschiedensten Richtungen eine sehr segensreiche Thätigkeit entwickelt.

Die 1767 von ihm errichtete Handlungsakademie wurde von Kaufmannssöhnen aus allen Teilen Europas besucht, er gab den hauptsächlichen Anstofs zu der im Jahre 1765 erfolgten Gründung der Patriotischen Gesellschaft, war erster Vorsteher derselben und hatte grofsen Anteil an den von dieser Gesellschaft ins Leben gerufenen Lehranstalten für Steuerleute und Handwerker.

Die von Büsch bewirkte Ordnung des hamburgischen Armenwesens ist mustergültig gewesen, und seine Verdienste um die Förderung der verschiedensten Wohlfahrtseinrichtungen, von welchen seine zahlreich hinterlassenen Schriften ein beredtes Zeugnis ablegen, zogen ihm eine so allgemeine Verehrung zu, dafs seine Mitbürger nach seinem Tode sich entschlossen, sein Andenken durch Errichtung eines Denkmals zu ehren. Auch die Mathematische Gesellschaft hat seinen Namen dankbar in ihren Annalen zu verzeichnen. Seinem auf weiten Reisen und in vielfachen Beobachtungen geübten Geiste war es gelungen, was sein Vorgänger Kaspar Büssing 100 Jahre früher vergeblich versucht hatte: die Ergebnisse der mathematischen Studien in gemeinfafslicher Weise darzustellen. Die 7 Bände umfassende „Mathematik zum Nutzen und Vergnügen des bürgerlichen Lebens“ liefert den Beweis. Seinem Einflusse ist es auch in erster Linie zuzuschreiben, dafs die Mathematische Gesellschaft den einzigen in jener Zeit möglichen Weg zur Neubelebung ihrer Thätigkeit beschritt und ihr Augenmerk vor allem den Anwendungen der Wissenschaft zuwandte. Büsch wird diesen Einflufs schon vor dem Jubeljahre 1790 geltend gemacht haben, da er mit Joh. Reimer I. und mit Fedder Karstens in engen Beziehungen stand. Nach seiner Ernennung zum Ehrenmitgliede hat er an den Verhandlungen der Gesellschaft mit lebhaftem Interesse teilgenommen, und die Gesellschaft betrauerte ihn nach seinem Tode als einen Freund und vortrefflichen Lehrer.

Das Lehrertalent Büschs äufserte sich in besonderer Weise auch dahin, dafs er begabte und für die Mathematik begeisterte Jünglinge aus der Dunkelheit hervorzuziehen und ihre Studien in die rechten Bahnen zu lenken wufste.

Die Gesellschaft zählte zwei dieser Schüler zu ihren Mitgliedern, den Astronomen Johann Elert Bode und den Professor Peter Heinrich Christoph Brodhagen.

Brodhagen, 1753 zu Hamburg von armen Eltern geboren, studierte mit der Absicht, Seemann zu werden, unter drückenden Verhältnissen die mathematischen Wissenschaften, wurde 1777 durch Berechnung einer Mondfinsternis mit Büsch bekannt und konnte dann mit dessen Hilfe am Gymnasium und später in Göttingen, wo er hauptsächlich

Kästner hörte, seine Studien erweitern und vollenden. Nach Hamburg zurückgekehrt, unterrichtete Brodhagen zunächst an der Handelsakademie, übernahm im Auftrage der Patriotischen Gesellschaft den Navigationsunterricht und wurde 1797 auf Büschs Antrag demselben als Gehilfe in seinem Lehramt am Gymnasium beigeordnet. Trotz seiner Unbekanntschaft mit den alten Sprachen wurde Brodhagen wegen seiner ausgebreiteten mathematischen Kenntnisse nach Büschs Tode dessen Nachfolger, auch wurde ihm der mathematische Unterricht am Johanneum übertragen.

Brodhagen ist am Tage des 100jährigen Stiftungsfestes der Mathematischen Gesellschaft beigetreten und hat in derselben bis zu seinem nach längerer Krankheit am 25. Mai 1805 leider viel zu früh erfolgten Tode eine ungemein rege Thätigkeit ausgeübt.

Am 19. Juni 1790 legte Brodhagen der Gesellschaft eine Arbeit über die bisher bekannten Mittel, die geographische Länge und Breite zu finden, vor, und es wurde beschlossen, dieselbe als das erste Stück der Abhandlungen der neugestalteten Gesellschaft durch den Druck zu veröffentlichen.

In den Jahrbriefen von 1796, 1797, 1798, 1799, 1800 und 1803 lieferte er ferner eine Reihe von Aufsätzen aus den Gebieten der Trigonometrie, der Kegelschnitte und der Reihen. Er hatte eingesehen, dafs bei der mannigfaltigen Zusammensetzung der Gesellschaft das mathematische Können ihrer Mitglieder sehr verschieden geartet sei, und wollte deshalb in seinen Beiträgen denjenigen unter seinen Freunden, welche in diesen Dingen noch nicht geübt seien, die wichtigsten und nützlichsten Lehren der reinen Mathematik in übersichtlicher Weise mitteilen. Leider ist diese Absicht durch die hoffnungslose Erkrankung Brodhagens nur teilweise verwirklicht. Die im Jahre 1803 unvollendet gelassene Arbeit ist 1804 von Nuppnau zu Ende geführt, eine weitere Fortsetzung dieser planmäfsigen Mitteilungen hat aber nicht stattgefunden.

Von technischer Seite sind vor allem Sonnin, Reinke und Woltman als diejenigen Mitglieder hervorzuheben, welche den bedeutendsten Einflufs auf die Neugestaltung der Gesellschaft ausgeübt haben.

Sonnin ist 1709 zu Perleberg als Sohn eines Predigers geboren und wurde in Altona erzogen. Durch die Unterstützung des Oberpräsidenten Rantzau wurde es ihm möglich, in Halle und Jena zuerst Theologie, später aber auch Philosophie und Mathematik zu studieren. — Nach Hamburg zurückgekehrt, errichtete er, um seine mathematischen Kenntnisse zu verwerten, eine mechanische Werkstätte. Nebenher unterrichtete er in den mathematischen Wissenschaften und beschäf-

tigte sich mit Vermessungsarbeiten. Bereits im vierzigsten Lebensjahre stehend, entschloſs sich Sonnin, seinen Lebensplan zu ändern und seine Thätigkeit dem praktischen Baufache zuzuwenden. Sein mathematisches Wissen gab ihm hierzu eine gediegene Unterlage, und es gelang ihm, seinen ersten Bau, ein Brauhaus in Altona, zur Zufriedenheit seines Bauherrn auszuführen. Als am 10. März 1750 die groſse Michaeliskirche ein Raub der Flammen geworden war und es galt, unverzüglich einen Neubau auszuführen, wandte sich die Aufmerksamkeit des Kirchenkollegiums auf Sonnin. Die Geschichte dieses Baues,[1]) welchen Sonnin zunächst in Gemeinschaft mit dem Baumeister Prey, dann allein geleitet hat, ist ein unverwelkliches Ruhmesblatt für den groſsen Baumeister. Zahlreiche Bauwerke und mit feinem Verständnis berechnete gewerbliche Anlagen, welche hier am Platze und in der Nachbarschaft ausgeführt sind, legen weiteres Zeugnis für seinen Fleiſs und seinen Scharfblick ab.

Sonnin, welcher 1792, als er das 82. Lebensjahr bereits überschritten hatte, zum Ehrenmitgliede der Gesellschaft erwählt wurde, starb am 8. Juli 1794.

Er nahm während der kurzen Zeit seiner Mitgliedschaft lebendigen Anteil an dem Leben der Gesellschaft und hat durch sein hohes Ansehen die Neuordnung derselben kräftigend beeinfluſst. — Unmittelbarer und in seinen Erfolgen klarer zu Tage liegend ist indessen der Einfluſs seines Schülers und Pflegesohnes Johann Theodor Reinke gewesen.

Reinke, am 13. April 1749 geboren, war der Sohn eines Lohgerbers und schon in frühesten Jahren auf seine eigenen Kräfte angewiesen. Mit elf Jahren kam er zu Sonnin ins Haus, welcher ihn in der Mathematik und im Lateinischen mit solchem Erfolge unterrichtete, daſs Reinke bereits mit dreizehn Jahren durch mechanische Arbeiten und mathematischen Unterricht ein Ansehnliches verdienen und seine Mutter unterstützen konnte. Später mit Vermessungsarbeiten beschäftigt, leistete Reinke hierin so Tüchtiges, daſs er 1787 zum Grenzaufseher, 1796 aber zum Strom- und Kanalbaudirektor ernannt wurde. Als die Franzosen 1811 von Hamburg Besitz nahmen, erhielt Reinke den Titel eines Ingenieur ordinaire des ponts et chaussées. Nach Befreiung der Stadt wurde er seines Alters wegen von manchen Geschäften entlastet, bei wichtigen Fragen aber noch fortgesetzt zu Rate gezogen. Reinke, welcher zusammen mit Brodhagen am 6. März 1790 der Mathematischen Gesellschaft beitrat, gebührt vor allen der

---

1) Vergl.: Die Michaeliskirche zu Hamburg, von Juls. Faulwasser. Hamburg 1886.

Ruhm, durch seinen unermüdlichen Eifer die Thätigkeit derselben gehoben zu haben. Viermal, in den Jahren 1793, 1802, 1813 und 1818 war er Jahrverwalter, und in den 35 Jahren seiner Mitgliedschaft hat er nicht weniger als 16mal die wissenschaftlichen Abhandlungen für den Jahrbrief ganz oder zum Teil geliefert. Schon 1791 machte er Mitteilungen über die von ihm ausgeführte Bestimmung der geographischen Länge und Breite Hamburgs, und später wurden mannigfaltige Gegenstände aus dem Gebiete der Astronomie, des Vermessungswesens und der reinen Geometrie von ihm behandelt. Eine im Jahre 1801 anläfslich der von ihm ausgeführten Vermessung der Insel Helgoland sich bietende trigonometrische Aufgabe vermochte Reinke nur auf mechanischem Wege zu lösen, weil sie auf eine transscendente Gleichung führte. 1810 teilte derselbe, auf den Gegenstand zurückkommend, mit, dafs ihm von einem sehr geschätzten auswärtigen Mathematiker, mit dem bekannt zu werden er unlängst das Glück gehabt habe, eine Lösung des Problems mitgeteilt sei.

Die beigefügte ebenso einfache wie elegante Lösung rührte augenscheinlich von dem Astronomen H. C. Schumacher her, mit dem Reinke inzwischen durch seine Vermessungsarbeiten bekannt geworden war, und welchem die Gesellschaft später so viele Anregungen zu danken hatte.

Reinhard Woltman, 1757 in einem hannöverschen Dorfe geboren, mufste bei einem ihm von der Natur gegebenen unbezwinglichen Lerntriebe alle Vorteile einer geregelten wissenschaftlichen Ausbildung entbehren. Auf mühsamen Wegen erwarb er hinreichende Befähigung, um in seinem Geburtsorte als Schullehrer angestellt zu werden, eine zufällige Verkettung von Umständen führte ihn bald darauf in das hamburgische Amt Ritzebüttel, wo ihm eine Stelle als Schreiber beim Wasserbau gegeben wurde. Sein Fleifs und seine Fähigkeiten erwarben ihm hier in solchem Grade das Wohlwollen seiner Vorgesetzten, dafs seine sehnliche Neigung zum akademischen Studium bei ihnen thätige Unterstützung fand. Mit gründlichen mathematischen Kenntnissen ausgerüstet, kehrte er von der Hochschule ins praktische Leben zurück und ward sofort als Kondukteur bei den Wasserbauten im Amte Ritzebüttel angestellt. Mit grofser Energie erfafste er hier seine Aufgabe, die bedrohten Elbmarschen gegen den andrängenden Strom zu verteidigen, suchte die Natur der Kräfte, welche er zu bekämpfen hatte, zu ergründen, indem er regelmäfsige Beobachtungen der Flutbewegung einführte und Geschwindigkeitsmessungen im Strome anstellte. Eine Untersuchung aller bisher zu diesem Zwecke benutzten

Instrumente liefs ihn dieselben als ungenügend erkennen und führte ihn zur Erfindung des Flügelapparates, welcher seinen Namen unvergefslich gemacht hat. In seinen selbständigen Werken, von denen die 1791—99 in vier Bänden erschienenen Beiträge zur hydraulischen Architektur besonders hervorzuheben sind, bereicherte er die deutsche Litteratur in wesentlicher Weise auf einem Gebiete, auf dem die Engländer und Franzosen uns weit vorangeeilt waren. Woltman wurde 1792 zum Direktor der Strom- und Uferbauten im Amte Ritzebüttel ernannt und erfreute sich auch zur Zeit der französischen Besetzung des höchsten Ansehens bei den Machthabern, welche ihn mit den auf das Elbgebiet fallenden Vorarbeiten für den Canal de la Seine à la Baltique betrauten. Nach der Einverleibung Hamburgs in das Kaiserreich mufste Woltman als Ingénieur des ponts et chaussées seinen Wohnsitz in Hamburg nehmen. Er behielt später den ihm lieb gewordenen Posten eines hamburgischen Wasserbau-Direktors unter Ablehnung des ehrenvollen Antrages, als Oberdirektor sämtlicher Seehäfen in den preufsischen Staatsdienst zu treten, bei. Woltman hat der Mathematischen Gesellschaft von 1790—1811 als auswärtiges Mitglied angehört und schon in dieser Zeit mancherlei Beiträge für die Jahrbriefe geliefert. Nachdem er einheimisches Mitglied geworden war, hat er die Arbeiten der Gesellschaft in aufserordentlicher Weise unterstützt. Das von derselben herausgegebene Handbuch der Schiffahrtskunde entstammt in seinen wesentlichen Teilen der Feder Woltmans. —

Die vorstehende Schilderung zeigt uns, dafs in den Jahren nach 1790 ebenso wie ein Jahrhundert zuvor, das Schicksal der Gesellschaft in der Hand einer Reihe jener seltenen Männer gelegen hat, welche alles, was sie geworden sind, innerem Berufe und eigener Anstrengung verdanken. Eine Unterscheidung zwischen Theoretikern und Praktikern ist zwischen ihnen nicht zu machen, denn auch Büsch und Brodhagen, die ersten Gymnasiallehrer, welche der Gesellschaft beitraten, entnahmen die Anregung zur Pflege ihrer Wissenschaft nicht in erster Linie ihrem Hauptberufe, sondern ihrer vielseitigen öffentlichen Thätigkeit. Die Verhältnisse der Gelehrtenschule hatten sich seit dem 17. Jahrhundert wohl verbessert, noch immer aber war die Mathematik im Lehrplane derselben den alten Sprachen gegenüber durchaus stiefmütterlich behandelt. Als Beweis dafür, dafs hierin auch in der Folgezeit nur sehr allmählich eine Änderung eingetreten ist, mag die Thatsache dienen, dafs noch im Jahre 1823, als es sich um die Verbreitung der Lalandeschen Logarithmentafeln handelte, der damalige Professor Hipp äufserte: Es sei nicht daran zu denken,

selbige am Johanneum einzuführen, weil daselbst gar kein Sinn für Mathematik vorhanden sei. —

Die Jahrbriefe von 1790—1819 sind in einem vollständigen Exemplare auf der Kommerzbibliothek erhalten; von diesem Jahre an besitzt die Gesellschaft in ihrem eigenen Archive sowohl die herausgegebenen Drucksachen, als auch die Protokolle über die Verhandlungen in den Sitzungen. Die Vorgänge in der Gesellschaft sind für die hier in Betracht kommende Zeit also weit vollständiger zu verfolgen als in den früheren Perioden.

Die mit der Anrede „Hochzuverehrende Herren" beginnenden Jahrbriefe sind in ihrem berichtenden, wie auch im wissenschaftlichen Teile ausführlicher als früher. Wir ersehen aus denselben, dafs die monatlichen Zusammenkünfte der einheimischen Mitglieder regelmäfsig abgehalten wurden, dafs dagegen der Verkehr mit den auswärtigen Mitgliedern stetig abnahm. Die Spuren der holländischen Mitglieder verlieren sich in der Mitte der neunziger Jahre, und 1810 heifst es, dafs wenige Kunde von den auswärtigen Mitgliedern zur Kenntnis der Jahrverwalter komme, weil der Druck der Zeiten so manchem Mut und Kraft, aufser sich zu wirken, lähme. In der Folgezeit hat der Einflufs der auswärtigen Mitglieder auf das Gesellschaftsleben fast ganz aufgehört, wenn auch einzelne neu hinzutraten und namentlich früher einheimische Mitglieder bei eintretender Veränderung des Wohnsitzes fortfuhren, der Gesellschaft anzugehören.

Die Aufnahmebedingungen für einheimische Mitglieder wurden 1792 dadurch vereinfacht, dafs fortan von Lieferung einer Probearbeit abgesehen werden konnte, wenn zwei Mitglieder bezeugen, dafs der Aufzunehmende die erforderlichen Qualitäten besitze.

Im Jahre 1814 blieb der Jahrbrief aus. Es heifst diesbezüglich 1815:

> „Wegen Unterbleibung des vorjährigen Jahrbriefes wird uns wohl ein Jeder entschuldigen, der den Druck fühlte, unter dem Hamburg im Winter 1813/14 seufzte. Unsere Unterdrücker und Peiniger hatten alle Zusammenkünfte durchaus verboten; einige unserer Mitglieder waren selbst in das unablässige Joch dieser Tirannen gespannt, andere sahen die Kirchen, an welche sich ihre Wohnungen lehnen, in militärische Pferdeställe verwandelt und sich mit immerwährenden Unruhen umgeben; unter solchen traurigen Umständen war an Verbreitung der mathematischen Wissenschaften wahrlich nicht zu denken!"

Um so mehr atmete man 1815 auf. Es wurde beschlossen in dankbarer Erinnerung an die Männer, welche am 5. März 1690 den

Grund zur Gesellschaft legten, in dem Jahre der 125. Wiederkehr dieses Tages ein Gedächtnisfest zu feiern. Man wünschte hiermit eine Feier des zu erwartenden allgemeinen Friedens, durch welchen allein Künste und Wissenschaften blühen können, zu verbinden. Da aber das für die Gesellschaft so merkwürdige Jahr den Friedensschluſs nicht brachte, so entschloſs man sich, am 29. Dezember die geplante Feier im Hause des Jahrverwalters, des Schullehrers Peter Heinrich Lönse, abzuhalten. Über dieselbe findet sich in der Nummer des hamburgischen Korrespondenten vom 2. Januar 1816 eine Mitteilung, der wir das Folgende entnehmen:

„Heute feierten die hiesigen Mitglieder der Gesellschaft zur Verbreitung der Mathematischen Wissenschaften die 125jährige Stiftung dieses Vereins. Der Jahrverwalter verlas eine kurze Geschichtserzählung von den ursprünglichen Stiftern der Gesellschaft Meiſsner und Heins bis auf unsere Zeiten, worin er die bleibenden Verdienste mancher verstorbenen Mitglieder um die Arithmetik und Algebra und in neuerer Zeit auch um die Geometrie und angewandte Mathematik kürzlich berührte. Dabei konnte er nicht umhin, manche wackeren Männer zu nennen, die leider nicht mehr sind, Männer, deren Verlust die Gesellschaft schmerzt, deren Andenken ihr aber ein unverwelklicher Schmuck bleibt. Herr Direktor Reinke unterhielt hierauf die Versammlung über die Absicht und den Nutzen der von ihm angefangenen trigonometrischen Messung, und Herr Direktor Woltman erörterte die Frage, ob es vorteilhafter sei, ein zur Schleifung bestimmtes Festungswerk mit Schieſspulver zu sprengen oder mit dem Spaten abzutragen."

„Den Beschluſs dieser Feier machte ein frohes Mahl, wobei man sich dankbarlichst gegen die göttliche Vorsehung der wiedererlangten Freiheit erinnerte, auch für die Erhaltung unserer stadtväterlichen Obrigkeit und für Hamburgs Wohl herzliche Wünsche aussprach."

Der Ruhm dieses Festmahles, bei welchem die schönen und liebenswürdigen Töchter des Herrn Lönse die Sorgen der Aufwartung übernommen haben, ist durch mündliche Überlieferung bis zur Gegenwart kund geblieben.

In der folgenden Versammlung, am 7. Januar 1816, wurde eine Durchsicht der bestehenden Leges von 1774 in Aussicht genommen, welche den Geist der Vorfahren nicht auſser Achtung lassen, zugleich aber ein gemeinsames reges Fortschreiten aller Mitglieder in den mathematischen Wissenschaften, wie es den Zeitbedürfnissen angemessen ist, begünstigen sollte, damit aus den Arbeiten der Gesell-

schaft eine ersprieſsliche Ausbeute zum Heile der Wissenschaft und zu wohlthätiger Anwendung derselben gewonnen werde.

Die neue Verfassungsurkunde vom Jahre 1816, welcher eine kurze geschichtliche Darstellung der Gründung und bisherigen Entwicklung der Gesellschaft vorangestellt ist, bezeichnet als den Zweck derselben die Beförderung und Belebung des Studiums der mathematischen Wissenschaften in ihrem ganzen Umfange, mit besonderer Beziehung auf die Anwendung derselben im thätigen Leben.

Zur Aufnahme eines ordentlichen Mitgliedes ist erforderlich, daſs der Aufzunehmende durch gedruckte mathematische Schriften, oder durch in die Mathematik gehörige Entdeckungen und Erfindungen, welche den Beifall der Kenner erhalten haben, beziehentlich als anerkannter Lehrer der mathematischen Wissenschaften seine Kenntnisse und Erfahrungen bethätigt habe. Der Nachweis der Befähigung durch eine Probearbeit ist als eine Ergänzung dieser Bestimmung beibehalten. Die Bestimmungen über die Verwaltung der Gesellschaft sind zeitgemäſs überarbeitet, in der Grundlage aber unverändert geblieben.

Diese Verfassungsurkunde ist abgesehen von ganz unwesentlichen Abänderungen bei dem in den Jahren 1834 und 1847 erfolgten Neudruck derselben bis zum Jahre 1877 in Kraft geblieben.

Ehe wir zu einer kurzen Schilderung des Gesellschaftslebens unter der Geltung der neuen Satzungen übergehen, müssen wir rückgreifend eines Mitgliedes erwähnen, welches 1805 der Gesellschaft beitrat und für deren Erfolge in gleicher Weise bestimmend war, wie die in Anlaſs der 100jährigen Jubelfeier derselben beigetretenen Mitglieder.

Johann Georg Repsold wurde am 19. September 1770 in Wremen an der Weser als ältester Sohn des dortigen Predigers geboren. Er war vom Vater zum Theologen bestimmt, doch fehlte ihm jeder Beruf hierzu, während er groſses Geschick für mechanische Konstruktionen zeigte. Repsold ging beim Wasserbaudirektor Woltman in Cuxhaven in die Lehre, welcher ihm eine bescheidene Stellung im hamburgischen Strombaudienste verschaffte. Auf den Rat Reinkes bewarb Repsold sich später um die Stelle eines Sprützenmeisters, welche ihm zunächst in der Eigenschaft als Gehilfe seines Vorgängers und 1799 endgültig übertragen wurde. Ungeachtet seines anstrengenden Dienstes fand er Muſse, um seiner Liebhaberei für mechanische Arbeiten nachzugehen. Dieselben wurden wesentlich gefördert und in ihrer Richtung auf astronomische Instrumente bestimmt durch Dr. Kaspar Horner aus

Zürich, welcher von 1799—1801 mit Vermessungsarbeiten an der Elbmündung beschäftigt war. 1802 erlangte Repsold von der städtischen Behörde die Einräumung eines auf dem Walle unbenutzt stehenden Artilleriegebäudes zur Einrichtung einer Sternwarte. Diese rüstete er mit einer Pendeluhr eigener Arbeit und einem Meridiankreis mit 8füfsigem Fernrohr aus und machte 1804 seine ersten Deklinationsbeobachtungen. Die Versuche mit selbstgeschliffenen Objektivgläsern zeigten, dafs Mangel in der Form der Objektive an ihrer ungenügenden Wirkung Schuld wären; Repsold wandte sich deshalb an Gaufs, welcher vielleicht hierdurch zuerst zu seinen epochemachenden Versuchen über die Anordnung von Linsensystemen angeregt wurde. Es entwickelten sich in der Folge sehr freundschaftliche Beziehungen zwischen Repsold und Gaufs, welche sich später auf Schumacher ausdehnten. Die kriegerischen Zustände von 1812—1814 lähmten indessen auch die Thätigkeit Repsolds, die Sternwarte mufste den französischerseits ausgeführten Befestigungswerken weichen, und an wissenschaftliche Arbeiten war um jene Zeit nicht zu denken. 1815 begann Repsold seinen Meridiankreis, den Gaufs für die Göttinger Sternwarte ankaufte, wieder in Stand zu setzen. Die Arbeiten für seine $4\frac{1}{2}$füfsige Kreisteilmaschine, für den im Auftrage Bessels ausgeführten Pendelapparat und mannigfache wichtige Arbeiten schlossen sich daran. In Gemeinschaft mit Reinke und anderen gelang es Repsold, den Bau einer städtischen Sternwarte durchzusetzen; 1825 war dieselbe vollendet. Die Freunde wünschten die Berufung Gaufs' als Direktor der Sternwarte zu ermöglichen. Aus dem Briefwechsel zwischen Gaufs und Schumacher geht hervor, dafs der erstere es nicht ungern gesehen haben würde, von allen Verpflichtungen, Vorlesungen zu halten, befreit, ganz seinen wissenschaftlichen Arbeiten leben zu können, doch hinderten die damals noch zu kleinen Verhältnisse der wissenschaftlichen Anstalten Hamburgs die Verwirklichung dieses schönen Planes.

Am 14. Januar 1830 setzte ein jäher Tod dem unermüdlichen Schaffen Repsolds ein Ende, indem er bei einem Brande, dessen Bekämpfung er persönlich leitete, von der stürzenden Giebelmauer erschlagen wurde. Dem in treuer Pflichterfüllung erlegenen Meister wurde von den dankbaren Mitbürgern ein Denkmal vor der Sternwarte errichtet. — Die Verdienste desselben können nicht besser zusammengefafst werden als durch die Worte, welche Olbers in Anlafs des Unglücksfalles an Bessel schrieb: „Der Verlust ist unersetzlich! Ich war recht stolz auf Repsolds Freundschaft und ehrte in dem Verewigten nicht blofs den genialen einzigen Künstler, sondern auch

den trefflichen Mann. Er war gleichsam der personifizierte gesunde Menschenverstand, offen und kraftvoll, ohne Furcht und ohne Tadel."

Die Söhne des Verstorbenen, Adolph und Georg Repsold, welche die zu hohem Ansehen gelangte Werkstätte im Sinne des Vaters fortführten, haben auch der Mathematischen Gesellschaft als eifrige Mitglieder angehört, welche gegenwärtig auch den Enkel, Dr. Joh. Adolph Repsold, zu den ihrigen zählen darf.

Zu den wertvollen Anregungen, welche die Mathematische Gesellschaft der Thätigkeit Repsolds und Reinkes verdankte, gehört es auch, dafs unmittelbare Beziehungen derselben zu Gaufs und Schumacher angebahnt wurden.

Der grofse Göttinger Meister ehrte die ordentliche Versammlung des Oktobermonats 1818 durch seine Gegenwart und kam dem bei dieser Gelegenheit allseitig ausgesprochenen Wunsche mit Wohlwollen entgegen, indem er der Gesellschaft als Ehrenmitglied beitrat.

Schumacher lieferte schon 1812, während er sich noch als Professor der Astronomie in Kopenhagen aufhielt, einen Beitrag zum Jahrbrief, welcher die analytische Lösung einer Aufgabe der synthetischen Geometrie behandelte. 1821 siedelte Schumacher in Anlafs der ihm übertragenen Vermessung der cimbrischen Halbinsel nach Altona über, wo er in seinem Garten eine Sternwarte gründete. Er hat in der Folgezeit die Gesellschaft wiederholt durch wichtige Arbeiten erfreut, unter denen die im Jahrbriefe von 1839 mitgeteilte erschöpfende Behandlung der bei Wägungen vorkommenden Reduktionen hervorzuheben ist. — Noch in seinem Todesjahre, 1850, enthält der Jahrbrief eine Mitteilung über die geometrische Dreiteilung des Winkels, gegründet auf die Reihe $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16}$ u. s. w. $= \frac{1}{3}$.

Die regelmäfsigen Versammlungen der einheimischen Mitglieder sollten nach den Satzungen von 1816 im Winterhalbjahr alle drei Wochen, im Sommerhalbjahr im ganzen zweimal und zwar Sonnabends abends 7 Uhr stattfinden. Im Laufe der Zeit ist hierin mancherlei verändert; so wurden aus der Gesamtzahl der Versammlungen einzelne, als Quartalsversammlungen bezeichnete, besonders hervorgehoben; auch hat zeitweise eine Verlegung der Versammlungen auf den Sonntag Mittag stattgefunden. Während vor 1790 nur 6 einheimische Mitglieder der Gesellschaft angehörten, stieg die Zahl derselben mit dem Jubelfeste auf 13; eine weitere Vermehrung hat nur sehr allmählich stattgefunden, bis im Jahre 1860 der Meistbetrag dieser Periode, 29 Mitglieder, erreicht wurde. Bei dieser verhältnismäfsig geringen Mitgliederzahl erforderte das Gedeihen der Gesellschaft einen

regelmäfsigen Besuch der Versammlungen. Es wurde deshalb eine kleine Geldstrafe für unentschuldigtes Fehlen festgesetzt, eine Einrichtung, welche noch jetzt besteht.

Anfangs fanden die Zusammenkünfte noch im Hause des Jahrverwalters statt. Als indessen 1830 der derzeitige Jahrverwalter, Adjutant Cramm, seine Wohnung nach St. Georg a. d. Alster verlegte, wurde es als eine unerhörte Zumutung angesehen, dafs die Mitglieder diese entlegene Gegend aufsuchen sollten. Der am 16. Mai 1830 gestellte Antrag, den Jahrverwalter anzuhalten, auf seine Kosten einen Versammlungsraum in der Mitte der Stadt zu beschaffen, wurde allerdings in der folgenden Versammlung als durchaus ungerecht erkannt; es fand sich aber der Ausweg, dafs die Patriotische Gesellschaft in ihrem Hause ein Zimmer für die Versammlungen zur Verfügung stellte. Als jedoch im Jahre 1842 dieses Gebäude durch Feuer zerstört war, wurden die Sitzungen nochmals in das Haus des Jahrverwalters verlegt, bis dieselben nach vollendetem Neubau des Patriotischen Gebäudes endgültig in dasselbe aufgenommen wurden.

In der Versammlung der Ältesten und Deputierten der Patriotischen Gesellschaft vom 17. Oktober 1848 wurde in entgegenkommender Weise beschlossen, der Mathematischen Gesellschaft ein Lokal zu ihren Versammlungen auch ferner ohne eigentliche Miete, doch gegen eine Vergütung für Feuerung und Beleuchtung einzuräumen. Die Verpflichtung des Jahrverwalters zur Lieferung von Thee und Rauchbedarf war hiermit indessen nicht aufgehoben: dem Besucher der Versammlungen winkte auch im Patriotischen Gebäude ein mit hoher Theemaschine besetzter Tisch, um welchen die Mitglieder sich in der ersten halben Stunde zu zwangloser wissenschaftlicher Unterhaltung gruppierten. Die langen Pfeifen waren allerdings verschwunden und durch die prosaischen Cigarren ersetzt.

Im Hintergrunde des Zimmers erhob sich zu dem ernsteren Nachspiel die Wandtafel! Entsprechend dem Nachdrucke, welcher in den Satzungen auf die Pflege der angewandten Mathematik gelegt war, beschäftigte man sich in dieser Periode vorwiegend mit nautischen und technischen Fragen. Als ein wertvolles Ergebnis der in ersterer Beziehung geführten Verhandlungen ist das von der Gesellschaft verfafste Handbuch der Schiffahrtskunde hervorzuheben. Die Veranlassung zu diesem Buche gab vorzüglich der Umstand, dafs die Oberbehörde der Navigationsschule dieser Anstalt eine verbesserte Einrichtung zu geben, auch die deutsche Sprache statt der bisher gebrauchten holländischen eingeführt zu sehen wünschte. Dazu war ein tüchtiges deutsches Lehrbuch notwendig. Die Mathematische

Gesellschaft zog in ihrer Versammlung vom 4. Oktober 1817 in Erwägung, dafs in den vorhandenen nautischen Lehrbüchern der Stoff meistens wenig zweckmäfsig geordnet, der Vortrag häufig in handwerksmäfsiger Weise auf Gedächtnisregeln gegründet sei, die nur allzuleicht vergessen oder bei mangelnden Vorkenntnissen irrig angewandt würden. Es wurde demgemäfs beschlossen, ein Lehrbuch der Schiffahrtskunde auszuarbeiten und für den Fall, dafs das Unternehmen hinreichende Unterstützung finden sollte, dasselbe herauszugeben. Woltman unterzog sich mit grofsem Eifer der mühevollen Arbeit und stellte, unterstützt durch E. W. Schuback, in Jahresfrist das ohne die Tafeln 400 Druckseiten haltende Werk fertig. Wohlwollende Gönner bewilligten die erforderlichen Mittel für die Abschriften, die Zeichnungen, und namentlich für die Aufstellung und Durchsicht der zahlreichen Tafeln, so dafs bereits im Jahre 1819 die Drucklegung und Veröffentlichung stattfinden konnte. Das für seine Zeit vorzügliche Lehrbuch erlangte einen durchschlagenden Erfolg. 1823 bereits waren sämtliche Abdrücke vergriffen, so dafs eine zweite Auflage notwendig wurde. Im Jahrbriefe von 1829 konnte mit Befriedigung gemeldet werden, dafs das Handbuch der Schiffahrtskunde in 2000 Exemplaren verbreitet sei. — Die zweite und die im Jahre 1832 herausgegebene dritte Auflage wurden von Woltman und E. W. Schuback besorgt. Drei weitere in den Jahren 1844, 1850 und 1857 zum Druck gelangte fernere Auflagen sind dagegen von dem Direktor der Sternwarte und der Navigationsschule Christian Carl Ludwig Rümker bearbeitet und herausgegeben.

An dieses Werk knüpft sich in eigentümlicher Weise ein Namenswechsel der Gesellschaft. In der Sitzung vom 4. Januar 1824 teilte der Jahrverwalter E. W. Schuback mit, dafs Woltman es weniger anmafsend gefunden habe, auf dem Titelblatte zu schreiben: herausgegeben von der Gesellschaft zur Verbreitung der mathematischen **Kenntnisse**, als den bisher gebrauchten Namen: Gesellschaft zur Verbreitung mathematischer Wissenschaften, anzuwenden. Es ward dementsprechend beschlossen, dafs die Gesellschaft künftig den veränderten Namen führen solle. Streng durchgeführt ist dieser Beschlufs indessen nicht; es kommen vielmehr beide Titel später vor.

Der in der Verfassungsurkunde von 1816 dargelegte Plan, ein vollständiges Lehrbuch der reinen Mathematik für den Schulgebrauch herauszugeben, führte am 13. Oktober 1822 zur Einsetzung eines bezüglichen Ausschusses, doch ist die Absicht nicht zur Verwirklichung gekommen. Dagegen hat die Gesellschaft im Jahre 1824, um die Kenntnis der Logarithmen-Rechnung in den deutschen Schulen

und dadurch den Gebrauch derselben im gemeinen Leben mehr zu verbreiten, eine deutsche Ausgabe der 1805 in Paris erschienenen kleinen stereotypierten Logarithmentafeln von Lalande veranstaltet. Die Tafeln wurden aus Paris bezogen und unter Hinzufügung einer deutschen Erklärung herausgegeben. Sie haben hier am Platze gute Nachfrage gehabt.

Eine weitergehende litterarische Unternehmung wurde im Jahre 1826 ins Auge gefafst. Da man erfahren hatte, dafs im folgenden Jahre die Geltung des hamburgischen Kalenderprivilegiums ablaufen werde, wurde beschlossen, an E. E. Rat wegen Übertragung dieses Privilegiums an die Gesellschaft zu supplizieren. Man hatte eine doppelte Absicht hierbei. Einmal wünschte man der Allgemeinheit durch eine Verbesserung des astronomischen Teiles des Kalenders zu dienen, andererseits hoffte man, durch die aus der Herausgabe der Gesellschaftskasse zufliefsende Einnahme die Anschaffung wichtiger mathematischer Werke für die Bibliothek zu ermöglichen. Der Senat zeigte sich der Absicht der Gesellschaft nicht abgeneigt, wünschte aber, dafs dieselbe sich mit dem bisherigen Herausgeber des Kalenders dieserhalb einige, weil demselben das Privilegium nicht ohne weiteres entzogen werden dürfe. Der Plan scheiterte an dem Nichtzustandekommen dieser Einigung. Als 30 Jahre später wiederum eine Erneuerung des Kalenderprivilegiums bevorstand, wurde der Gegenstand nochmals aufgenommen, nach längerer Verhandlung aber fallen gelassen.

Mit dem am 20. April 1837 eingetretenen Ableben Reinhard Woltmans war das letzte der 1790 eingetretenen Mitglieder aus der Gesellschaft geschieden. Die eingetretenen Lücken fanden ihre Ausfüllung.

Zunächst ist des bereits erwähnten Wasserbaukondukteurs und späteren Inspektors der Staatspachtgüter auf den Elbinseln E. W. Schuback zu gedenken, welcher am 6. Oktober 1798 geboren, schon 1816 der Gesellschaft beitrat und derselben 60 Jahre angehört hat. Schuback beteiligte sich an den litterarischen Unternehmungen der Gesellschaft aufs eifrigste, war 1823 und 1841 Jahrverwalter und bewahrte der Gesellschaft bis zu seinem im Jahre 1876 erfolgten Tode das lebhafteste Interesse, welches er u. a. auch dadurch bethätigt hat, dafs er nicht ein einziges Mal bei der Feier des Stiftungsfestes fehlte.

Die Gesellschaft erblickt gegenwärtig in dem Bruder des Verstorbenen, Herrn Deichinspektor D. A. Schuback, welcher 1847 derselben beitrat, ihr ältestes Mitglied.

Joh. Phil. Wertheim, 1778 zu Würzburg geboren, 1813/14 Hauptmann der hanseatischen Legion, später in gleicher Eigenschaft dem

hamburgischen Bundeskontingente angehörend, war von 1816 bis zu seinem Tode (1846) Mitglied der Gesellschaft, 1820 Jahrverwalter, und lieferte von 1821 bis 1842 zahlreiche Abhandlungen aus verschiedenen Gebieten der reinen Mathematik für die Jahrbriefe.

Johann Friedrich Cramm, Hauptmann und Adjutant im Generalstabe des Bürgermilitärs, gehörte von 1825 bis 1879 der Gesellschaft an, war 1830 und 1850 Jahrverwalter und bearbeitete im Auftrage der Gesellschaft die mit dem Jahrbriefe von 1852 zur Verteilung gebrachten Mafs- und Gewichts-Tafeln. Cramm, welcher bis in sein hohes Alter noch die Versammlungen zu besuchen pflegte, hat als ein dauerndes Zeichen seiner Teilnahme an den Bestrebungen der Gesellschaft die in seinem Besitz befindlichen, teilweise nicht unwichtigen mathematischen Werke der Bibliothek derselben hinterlassen.

Die Offiziercorps des hamburgischen Bundeskontigentes, des Generalstabes unseres Bürgermilitärs und der in Altona in Besatzung liegenden dänischen Truppen haben gegen die Mitte des Jahrhunderts noch eine Reihe weiterer tüchtiger Mitglieder in die Gesellschaft entsendet. Wenn wir bezüglich derselben im allgemeinen auf die Mitgliederliste verweisen müssen, so dürfen wir doch des Obersten von Stephani hier nicht vergessen, welcher wiederholt mit kräftiger Hand und militärischer Strammheit die ihm anvertraute Geschäftsführung zu erledigen wufste und sich um die Ordnung des Archivs und der Bibliothek wesentliche Verdienste erworben hat. Carl von Stephani, 1782 in Litthauen geboren, beteiligte sich im russischen Militärdienste an der Schlacht bei Leipzig und später an der Belagerung Hamburgs; 1822 trat er als Oberst und Stadtkommandant in hamburgische Dienste und wurde noch im selben Jahre Mitglied der Gesellschaft, welche ihm dreimal (1826, 1832 und 1840) das Amt des Jahrverwalters übertragen hat. Ob hierzu allein die soldatische Ordnungsliebe Stephanis den Anlafs gegeben hat oder ob der nach mündlicher Überlieferung von ihm vorgesetzte treffliche Karawanenthee an der Vorliebe für seine Geschäftsleitung einen Anteil hatte, vermögen wir nicht mehr zu entscheiden.

Der Wiederaufbau der Stadt nach den verhängnisvollen Maitagen des Jahres 1842 und das Bestreben, den neuen Stadtteilen in möglichst vollständiger Weise die vom Standpunkte der Feuersicherheit und Gesundheitspflege wünschenswerten zeitgemäfsen Einrichtungen zugängig zu machen, belebten die Bauthätigkeit und das Interesse für technische Einrichtungen in bis dahin in Hamburg nicht gekannter Weise. Manche Ingenieure, welche zu den auszuführenden Arbeiten herangezogen waren, schlossen sich in Ermangelung eines anderen

geistigen Mittelpunktes der Mathematischen Gesellschaft an, und es war eine natürliche Folge dieser Thatsache, dafs in zunehmender Weise die technische Richtung in derselben in den Vordergrund gerückt wurde.

In der Fastnachtsversammlung des Jahres 1846 wurde von mehreren Seiten betont, dafs, wenn der Titel der Gesellschaft auch beizubehalten sei, doch die Tendenz derselben eine immer mehr praktische Richtung anzunehmen habe, weil die Gesellschaft sich in dieser Stellung der Vaterstadt am besten nützlich machen könne.

Der einflufsreichste unter den Ingenieuren dieser Zeit war der Wasserbau-Direktor Heinrich Hübbe. Derselbe, am 28. September 1803 in Hamburg geboren, bereitete sich auf dem akademischen Gymnasium auf sein Studium vor, wurde von Reinke und Woltman in die praktische Ausübung der Baukunst eingeführt und arbeitete 1822/23 unter dem Direktor der Sternwarte, Encke, in Gotha. Nach Vollendung seiner Studien auf der Bauakademie in Berlin wurde Hübbe 1828 als Kondukteur beim Wegebau in Hamburg, 1832 als Wasserbau-Kondukteur in Cuxhaven und 1839 als hamburgischer Wasserbau-Direktor angestellt, aus welcher Stellung er 1856 politischer Verhältnisse halber ausschied. Hübbe besafs bei einem scharfen Verstande sehr tüchtige mathematische Kenntnisse und hat die in seiner dienstlichen Stellung, wie auf umfangreichen Reisen gewonnenen Erfahrungen auf dem Gebiete der Hydrotechnik in einer Reihe wertvoller Schriften niedergelegt. Die Bestrebungen der Mathematischen Gesellschaft hat er durch umsichtige Geschäftsführung während seiner dreimaligen Jahrverwalterschaft (1844, 56 und 64) wie durch seine thätige Teilnahme an den Verhandlungen der regelmäfsigen Sitzungen wesentlich gefördert; auch ist seinen Anregungen der Beitritt einer Reihe jüngerer Ingenieure zu danken, deren Teilnahme noch über die technische Periode hinaus der Gesellschaft zu wesentlichem Nutzen gereichte.

Unter den von 1840—1860 eingetretenen Technikern haben wir hier noch der Wasserbau-Inspektoren Gullann und Maack, des späteren Wasserbau-Direktors Dalmann und vor allem des um die Arbeiten der Gesellschaft hoch verdienten, ihrem Kreise leider schon im Alter von 39 Jahren durch den Tod entrissenen Ingenieurs Schaumann zu gedenken.

Schaumann war neben Cramm der hauptsächlichste Bearbeiter der im Jahre 1856 herausgegebenen „Technischen Hilfstabellen". Schon im Jahre 1846 hatte die Gesellschaft erkannt, dafs bei der Kleinheit des Gebietes, in welchem das Hamburger Mafs und Ge-

wicht galt, ein lebhaftes Bedürfnis für ein Tabellenwerk vorhanden sei, welches eine genaue Vergleichung der hier eingeführten Maſse und Gewichte mit den in andern Ländern üblichen ermöglichte. Die 1852 von Cramm mitgeteilten Tafeln waren das erste Ergebnis der zur Befriedigung dieses Bedürfnisses in Angriff genommenen Arbeiten. Man wünschte, dieselben der Öffentlichkeit zu übergeben, und entschied sich ferner dafür, den ursprünglichen Plan durch Aufnahme wichtiger technischer und physikalischer Angaben zu erweitern. Unter der Beihilfe einer gröſseren Anzahl Mitglieder der Gesellschaft förderte Schaumann die Arbeiten so gut, daſs das sehr zweckmäſsig ausgestattete Werkchen im Jahre 1856 zur Ausgabe gelangte. Eine zweite Auflage ist im Jahre 1860 veranstaltet, nachdem im Jahre 1857 das alte Hamburger Handelspfund durch das Zollpfund ersetzt war. Eine dritte Auflage, welche 1872 infolge des bevorstehenden Überganges zum metrischen System notwendig wurde, hat zur Erleichterung dieses Überganges wesentlich beigetragen und dürfte noch jetzt in den meisten technischen Bureaus benutzt werden, sobald es sich um die Verwertung von Quellen handelt, welchen die alten Maſssysteme zu Grunde liegen.

Die vermehrte Berücksichtigung der Technik war in den vierziger Jahren zeitgemäſs gewesen, doch die Gefahr lag nahe, in dem Verfolgen dieser Richtung über das Ziel hinauszuschieſsen. Der Kreis der Männer, welche die Gesellschaft zusammensetzten, war doch nicht vielseitig genug, um dauernd als eine Vertretung des Bau- und Maschinenwesens zu gelten, denn die Zeiten waren vorüber, in denen Handbücher des Hoch- und Wasserbaues von einem Professor des akademischen Gymnasiums geschrieben wurden. Die Ingenieurwissenschaften hatten sich auch in Deutschland von ihrer älteren Schwester, der Mathematik, losgelöst und hatten, wenn auch in demselben Boden wie diese wurzelnd, ihre eigenen Wege verfolgt. Es wäre im höchsten Grade bedauerlich gewesen, wenn die Mathematische Gesellschaft, ihrer jahrhundertelangen Überlieferung untreu werdend, sich durch fortgesetzte Aufnahme neuer Elemente von ihren ursprünglichen Zielen dauernd entfernt und in einen rein technischen Verein verwandelt hätte. Im lebendigsten Interesse der Gesellschaft lag es deshalb, daſs die Vertretung der technischen Fächer neue Krystallisationspunkte fand, als welche zunächst die im Jahre 1840 begründete technische Sektion der Patriotischen Gesellschaft, vor allem aber der 1859 ins Leben gerufene „Architektonische Verein“ zu bezeichnen ist, welcher in einem Jahrzehnt wachsender Blüte sich zum „Architekten- und Ingenieur-Verein“ erweiterte.

Auch der im Jahre 1868 begründete nautische Verein hat die Pflege praktischer Ziele, welche ehemals nur in der Mathematischen Gesellschaft verfolgt wurden, in kräftiger Weise übernommen.

Doch noch eine zweite Gefahr drohte der Mathematischen Gesellschaft: dafs die Aufsaugung ihrer besten Kräfte durch die neuen Unternehmungen ihre eigene Entwicklung hemmen, ja vielleicht zum Stillstand bringen würde. Dafs der Fall nicht ganz ausgeschlossen war, hat der Rückgang der Zahl der einheimischen Mitglieder von 29 im Jahre 1860 auf 22 im Anfang der siebziger Jahre bewiesen.

Der Dank dafür, dafs diese Klippe glücklich überwunden ist, gebührt in erster Linie den wenigen Vertretern der reinen Mathematik, welche auch in der technischen Periode treu zur Gesellschaft gestanden und das wissenschaftliche Interesse in derselben rege erhalten haben. Die Geschichte der Mathematischen Gesellschaft hat deshalb rückgreifend auch diesen Männern ein Blatt zu widmen.

Karl Friedrich Hipp, 1763 in Württemberg als Sohn eines Pfarrers geboren, widmete sich dem Studium der Theologie, trieb aber, wie so manche seiner Zeitgenossen, nebenbei mit Vorliebe Mathematik und Physik. 1788 nach Hamburg gekommen, beschäftigte Hipp sich zunächst mit Privatunterricht. Nach der im Jahre 1802 erfolgten Umformung der Gelehrtenschule des Johanneums wurde ihm auf Betreiben des Direktors Gurlitt, welcher seine Fähigkeiten erkannt hatte, ein Teil des mathematischen Unterrichtes übertragen, und als bald darauf Brodhagen seiner schweren Krankheit erlag, wurde Hipp dessen Nachfolger sowohl in der Professur am Gymnasium als auch im Lehramte am Johanneum und führte diese Ämter bis zu seiner am 1. März 1836 erfolgten Pensionierung mit anerkanntem Erfolge. Anläfslich der 125jährigen Jubelfeier im Jahre 1815 zum Ehrenmitgliede der Mathematischen Gesellschaft erwählt, beteiligte Hipp sich mit solchem Eifer an den Arbeiten derselben, dafs man am 8. Oktober 1826 beschlofs, ihn in Anerkennung seiner besonderen Verdienste unter die Zahl der ordentlichen Mitglieder aufzunehmen, gewifs eine selten vorkommende Art der Auszeichnung!

Hipps Nachfolger in der Professur der Mathematik am Johanneum war der am 30. Oktober 1806 als Sohn eines praktischen Arztes in Hamburg geborene Georg Heinrich Bubendey. Derselbe hatte 1826/9 in Heidelberg und Berlin Mathematik und Philosophie studiert und war nach Rückkehr in seine Vaterstadt bereits im Jahre 1830 als Kollaborator am Johanneum angestellt. Die 46 Jahre seiner Amtsthätigkeit an dieser Schule umfassen zugleich die Zeit, in welcher allmählich die Gleichberechtigung der Mathematik mit den alten

Sprachen im Lehrplane der Schule zur Durchführung kam. G. H. Bubendey war lange Zeit hindurch der alleinige Lehrer der Mathematik an der einzigen Gelehrtenschule Hamburgs, es gehört deshalb eine grofse Zahl seiner Schüler gegenwärtig den verschiedensten Lebensstellungen der Vaterstadt an, und alle haben dem gründlichen Unterrichte dankbare Anerkennung bewahrt. Sein wissenschaftliches Interesse ist durch die Arbeiten bezeugt, welche er zu den Schulprogrammen lieferte. Schon die Titel derselben lassen den kritischen Sinn erkennen, mit welchem er die wichtigsten Prinzipienfragen zu prüfen suchte, welche die Mathematik in ihrer neueren Entwickelung aufgeworfen hat: „Bemerkungen über die Axiome des Euklid", „Über die räumliche Darstellung der imaginären Gröfsen der Analysis", „Über die Ableitung des Taylorschen Theorems aus den Prinzipien des Infinitesimalcalculs", „Uber den Beweis des Fundamantalsatzes in der Theorie der algebraischen Gleichungen". G. H. Bubendey ist 1841 der mathematischen Gesellschaft beigetreten. Obgleich er, namentlich angeregt durch seine Freundschaft mit Hübbe, die Entwickelung der Technik mit Interesse verfolgte und sich an den einschlägigen Verhandlungen und Arbeiten der Gesellschaft eifrig beteiligte, war sein eigentliches Gebiet doch die Pflege der reinen Mathematik, deren hauptsächlicher Vertreter im Kreise der Gesellschaft er bis Ende der sechziger Jahre war. Bubendey wurde schon zwei Jahre nach seinem Eintritt, 1843, zur Jahrverwalterschaft berufen und hat dieses Amt 1854 und 1870 wiederholt geführt, auch lange Zeit die Bibliothek der Gesellschaft verwaltet. Seiner regen Teilnahme am Gesellschaftsleben ist vor allen Dingen die glückliche Uberwindung der mit dem Rückgange der technischen Periode eingetretenen Gefahren zu danken. Die Gesellschaft hatte deshalb gehofft, G. H. Bubendey, welcher seit Georg Repsolds Tode ihr ältestes Mitglied war, bei Gelegenheit der Jubelfeier unter die Zahl ihrer Ehrenmitglieder aufnehmen zu dürfen, als eine schnell verlaufende Krankheit am 7. Oktober d. J. den fast 83jährigen dahinraffte, so dafs an Stelle dieser Ehrenbezeigung der Trauerkranz als Zeichen der Dankbarkeit am Grabe niederzulegen war.

Als Vertreter der reinen Mathematik haben auch die Astronomen Christian Karl Ludwig Rümker und Christian August Friedrich Peters wesentlich fördernd in das Gesellschaftsleben eingegriffen.

Rümker war 1788 in Stargard geboren und hat nach Vollendung seiner Studien auf der Bauakademie zunächst Seedienste genommen und von 1813—1819 der englischen Kriegsmarine angehört. 1819 *wurde er in* Hamburg als Navigationslehrer angestellt, trat noch im

selben Jahre der Mathematischen Gesellschaft bei und lieferte für den Jahrbrief eine Darstellung der am 7. September d. J. bevorstehenden Sonnenfinsternis.

1821—29 war Rümker als Direktor der Sternwarte zu Paramatta in Neu-Süd-Wales thätig und kehrte im letzteren Jahre nach Hamburg zurück, um hier die Leitung der Sternwarte und der Navigationsschule zu übernehmen. Die von ihm besorgte Bearbeitung der späteren Auflagen des Handbuches der Schiffahrtskunde ist bereits erwähnt. Daneben hat er zu den Jahrbriefen 1834/36 und 1846/47 Beiträge „Über die Örter sphärischer Dreiecke", „Über Längenbestimmungen durch Monddistanzen" und über die Besselsche Analyse der Fixstern-Bedeckungen geliefert und mehrfach Vorträge über astronomische Gegenstände gehalten. Rümker war 1834 Jahrverwalter und hat durch seine vielfachen Beziehungen zu auswärtigen Astronomen und Mathematikern für die Gesellschaft wertvolle Verbindungen vermittelt. Er starb 1862 in Lissabon, dessen milderes Klima er aufgesucht hatte, nachdem ihm der Sohn, Dr. G. F. W. Rümker, welchen die Gesellschaft zur Zeit noch zu ihren Mitgliedern zählt, im Amte beigeordnet war.

C. A. F. Peters, 1806 in Hamburg geboren, bildete sich unter der Leitung Schumachers und Bessels auf den Sternwarten zu Altona und Königsberg aus und promovierte 1833 an der Universität Königsberg. Er gehörte von 1828—1839, in welchem Jahre er als Observator der Sternwarte in Pulkowa angestellt wurde, sowie von 1854 an als Direktor des Observatoriums in Altona bis zur Verlegung der Sternwarte nach Kiel der Gesellschaft als einheimisches Mitglied an, war im Jahre 1836 Jahrverwalter und lieferte für verschiedene Jahrbriefe wissenschaftliche Beiträge. Peters hat seine Teilnahme für die Mathematische Gesellschaft auch dadurch bekundet, dafs er deren Bibliothek durch die Schenkung der von ihm redigierten Astronomischen Nachrichten bereicherte.

Nicht allein zur Erhöhung ihres Ansehens, sondern auch zur Förderung ihrer Bestrebungen hat es der Mathematischen Gesellschaft gereicht, zwei der höchsten Regierungsbehörde unserer Stadt angehörende Männer zu ihren thätigen Mitgliedern zählen zu dürfen.

Am 9. Februar 1827 wurde der Senator, nachmalige Bürgermeister Dr. jur. Friedrich Sieveking in aufrichtiger Würdigung seiner wissenschaftlichen Thätigkeit aufserhalb seines Berufs-Geschäftskreises zum Ehrenmitgliede der Gesellschaft erwählt.

Am 2. März 1834 wurde auf die Beglaubigung des Herrn Senator Dr. Sieveking und des Herrn John Herr Dr. jur. Nikolaus Ferdinand

Haller, nachmaliger Senator und Bürgermeister, unter Absehung von der Einlieferung eines Specimens als ordentliches Mitglied in die Gesellschaft aufgenommen.

Beide Mitglieder des Senates haben sich nicht allein als eifrige Förderer der Wissenschaft ausgezeichnet, sondern auch wiederholt ihre persönliche Vorliebe für mathematische Erörterung des ihrer Behandlung sich bietenden Stoffes, wie für die Erforschung mathematischer und mechanischer Probleme bezeugt.

Beide Männer haben, namentlich in der ersten Zeit ihrer Mitgliedschaft, sich an den regelmäfsigen Versammlungen rege beteiligt, auch die durch Übernahme der Jahrverwalterschaft ihnen erwachsende Mühe nicht gescheut und dauernd der Gesellschaft eine wohlwollende Teilnahme gewidmet.

In der Versammlung vom 19. November 1837 wurde von dem Jahrverwalter Dr. Haller auf die durch Gaufs und Weber veröffentlichten Untersuchungen über den Erdmagnetismus hingewiesen und zugleich in Anregung gebracht, die Errichtung eines magnetischen Observatoriums in Hamburg, dessen Verwaltung von der Mathematischen Gesellschaft zu übernehmen sein würde, zu betreiben. Der Vorschlag fiel auf sehr günstigen Boden und wurde von den anwesenden Astronomen, wie auch von den Gebrüdern Repsold aufs wärmste unterstützt. Es wurde auch sofort ein Ausschufs zur weiteren Erörterung dieser Angelegenheit eingesetzt, in welchen die Herren Senator Dr. Sieveking, Dr. Haller, Rümker und G. Repsold eintraten. Bei dem lebhaften Interesse, welches insbesondere das erstgenannte Ehrenmitglied der Sache widmete, erschien die Erreichung des Zieles nicht unwahrscheinlich. Die Verhandlungen verzögerten sich allerdings zunächst, waren aber 1842 soweit gediehen, dafs man vom Staate die Bewilligung eines geeigneten Bauplatzes und die Baukosten erbitten wollte, während für die Beschaffung der Instrumente Hilfsmittel von anderer Seite in Aussicht gestellt wurden.

Doch auch hier ist die Maikatastrophe störend in den Weg getreten. Die dem Staate durch den Wiederaufbau der Stadt erwachsenden Aufgaben waren vor der Hand so bedeutend, dafs das Wünschenswerte vor dem Notwendigen zurückstehen mufste!

In den Maitagen des Jahres 1842 ist mit dem Patriotischen Gebäude auch das Archiv der Gesellschaft und die ganze Bibliothek mit Ausnahme der gerade ausgeliehenen Sachen ein Raub der Flammen geworden. Das seit dem Jahre 1819 geführte Protokollbuch und das im Jahre 1771 angelegte Kassenbuch hatten sich im Hause des Jahr-

verwalters befunden und waren erhalten, dagegen ist ein die Protokolle von 1695—1819 enthaltender Band verbrannt.

Der Verlust des Archivs war unersetzlich, doch auch die Bibliothek, welche nicht versichert war, konnte nicht wieder beschafft werden. Erst im Laufe der Zeit ist durch Schenkung einzelner Bücher, sowie durch die von Mitgliedern übergebenen Abdrücke eigener Veröffentlichungen eine kleine Sammlung zustande gekommen. Zur Aufnahme derselben wurde 1859 ein mit dem Wappen der Gesellschaft gezierter Schrank im Patriotischen Gebäude aufgestellt. Bei der geringen Mitgliederzahl konnten die Anschaffungen aus eigenen Mitteln sich immer nur in engen Grenzen halten. Mehrfach sind mathematische Zeitschriften zum Rundlauf unter den Mitgliedern gehalten, doch stellte es sich heraus, dafs die Ausgaben einschliefslich der Botenlöhne unverhältnismäfsig hoch waren, so dafs die Einrichtung jedesmal keine lange Dauer hatte. Die Mitglieder erleichterten sich dagegen die wechselseitige Benutzung ihrer Privatbibliotheken. So war es jahrelang bekannt, dafs Crelles Journal in Hamburg nur bei Professor G. H. Bubendey zu finden sei, welcher die einzelnen Bände gerne jedem darum nachsuchenden Mathematiker lieh, bis er vor einigen Jahren das ganze Werk zur bequemeren Benutzung desselben der Stadtbibliothek schenkte. —

Die Beziehungen der Mathematischen Gesellschaft zu ihren auswärtigen Mitgliedern waren in der technischen Periode keine lebhaften. Eine Ausnahme hiervon ist bezüglich der in unmittelbarer Nähe, also in den jetzigen Vororten, in Altona oder Hamburg wohnenden Mitglieder zu erwähnen. Dieselben besuchten dann und wann die Versammlungen, wurden aber nicht zu denselben eingeladen und brauchten bei unentschuldigtem Fehlen keine Bufse zu erlegen. Es galten in einer Zeit, welche noch die abendliche Thorsperre kannte, eben nur die in der inneren Stadt wohnenden Mitglieder als „einheimische".

Eine Reihe verdienter Gelehrten und Förderer der Wissenschaft und Technik wurde in dieser Zeit zu Ehrenmitgliedern der Gesellschaft ernannt. Wir nennen neben den bereits angeführten insbesondere die Astronomen Dr. Joh. Franz Encke, Dr. Olbers und Gerling, den Kaufmann Richard Parish in Hamburg und die in lebhaftem Schriftwechsel mit der Gesellschaft stehenden Professor Dr. Grunert in Greifswald und Kgl. Preufsischer Postmeister, später Geheimrat Dr. Nürnberger in Landsberg a/W.

Professor Adam Burg in Wien bedauerte in einem am 27. Juli 1834 zur Verlesung gekommenen Schreiben, die ihm durch Ernennung zum Ehrenmitgliede zu teil gewordene Auszeichnung ablehnen zu

müssen, weil es jedem österreichischen Unterthan untersagt sei, einem Privatverein anzugehören. Der Name des Herrn Professor Burg, welcher übrigens noch in voller Wirksamkeit stand, als die vormärzliche Periode längst dahingeschwunden war, ist nichtsdestoweniger in den Listen geführt.

Wie die Mathematische Gesellschaft im allgemeinen bestrebt gewesen ist, die aus alter Zeit überlieferten Einrichtungen so viel wie möglich zu erhalten, so hat sie auch den Fastnachtmontag, an welchem bei frohem Mahle der Plan Heinrich Meifsners besiegelt ist, dauernd als Stiftungstag gefeiert. Im vorigen Jahrhundert versammelte sich die kleine Zahl der Mitglieder im Hause des Jahrverwalters, um die dem Fastnachtstage nach Hamburger Sitte angemessene Mahlzeit: „Snuten und Pöthen", Schweineschnauzen und -pfoten mit Erbsenmufs und Sauerkraut zu verzehren und dabei froher Stimmung des Fortganges der Gesellschaft zu gedenken. Die Vergröfserung des Kreises der Teilnehmer brachte zunächst ausnahmsweise, dann regelmäfsig, die Verlegung des Festmahles in öffentliche Wirtschaftsräume mit sich, immer aber blieb das historische Gericht ein unentbehrlicher Bestandteil desselben. Seit dem Jahre 1851 wurden auch Freunde des Vereines bei dieser Gelegenheit gerne gesehen, und das Stiftungsfest bildete sich mehr und mehr zu einem Vereinigungspunkte aller dem Gesellschaftsleben nahe stehenden Personen aus, und manche für die Entwicklung der Gesellschaft wichtige Anregungen haben am Fastnachtstage ihren Ausgang genommen, indem vor dem Feste die jährliche Hauptversammlung stattfindet, in welcher sich der Übergang der Geschäftsführung auf den neuen Jahrverwalter und die Wahl eines Adjunkten satzungsgemäfs vollzieht.

Die wissenschaftliche Periode.

Von 1860 an.

Wenn in das Jahr 1860 der Beginn einer neuen Periode gesetzt wird, so ist das nicht so zu verstehen, als ob nun durch den Anschlufs neuer Elemente eine rasche Wendung in den Zielen der Gesellschaft entstanden sei. Die Ingenieure blieben vielmehr noch ein Jahrzehnt die durchaus mafsgebenden Mitglieder, und die nächste litterarische Unternehmung der Gesellschaft war die Drucklegung und Verbreitung einer die Vorteile mathematischer Kenntnisse für Gewerbtreibende darlegenden Flugschrift. Die im Jahre 1862 erfolgte Veröffentlichung dieser Schrift bewies indessen, dafs das bis dahin herrschende Bestreben, in erster Linie der Technik und den

Gewerben zu dienen, sich überlebt habe, und dafs der Einflufs der Gesellschaft nach dieser Richtung im Schwinden sei.

Andererseits hatten die jüngeren der Gesellschaft beitretenden Ingenieure auf den inzwischen in ihren Lehrzielen voll ausgebildeten technischen Hochschulen eine wissenschaftliche Erziehung genossen, welche auch die mathematischen Grundlagen der Fachwissenschaften umfafste. Sie wurden sich klar, dafs die Pflege der eigentlichen Fachinteressen anderen Vereinigungen zu überlassen sei, erkannten aber gleichzeitig die Vorteile einer weiteren Ausbildung jener exakten Grundlagen und fanden hierfür in der Mathematischen Gesellschaft den geeigneten Boden. Wohl waren schon in den fünfziger Jahren von Schuback, Plath und Dalmann mathematische Fragen in den Jahrbriefen erörtert, aber die planmäfsige Behandlung einzelner Zweige der reinen Mathematik wurde in jener Zeit als ungeeignet erachtet. Während in früheren Jahrbriefen bereits Anklänge an die synthetische Geometrie vorgekommen waren, trug man 1859, nach Schaumanns Tode, Bedenken, die von demselben bei seinem Eintritt als Specimen gelieferte Arbeit über die Kegelschnitte in den Jahrbrief aufzunehmen, weil ihr die neuere von Steiner begründete Auffassung der Geometrie zu Grunde liege. Die Veröffentlichung könne deshalb nicht ohne eine ziemlich umfassende Einleitung erfolgen. Nach 1860 dachte man in dieser Beziehung freier und nahm in den Jahrbrief von 1865 die ganz ähnliche Arbeit eines jüngeren Ingenieurs auf.

Der Charakter der Versammlungen änderte sich insofern, als an die Stelle der ungezwungenen Besprechung eines vom Jahrverwalter oder einem anderen Mitgliede angeregten Stoffes sorgfältig vorbereitete Vorträge traten. Es kann nicht Wunder nehmen, dafs diese Vorträge sich im ersten Jahrzehnt noch vorwiegend an Gegenstände technischer Erfahrung lehnten, da auch die neu hinzutretenden Mitglieder fast ausschliefslich dem Ingenieurstande angehörten.

Erst Ende der sechziger Jahre begann sich eine Änderung in dieser Richtung geltend zu machen.

Die Elementarlehrer, welche im ersten Jahrhundert das Gesellschaftsleben durchaus beherrschten, waren auch an der Wende des 18. Jahrhunderts noch am stärksten von allen Berufskreisen unter den Mitgliedern vertreten. Die durch Todesfälle entstehenden Lücken wurden indessen nicht ergänzt, so dafs mit dem Lehrer der St. Jakobi-Kirchenschule, Johann Christoph Wedderihn († 1844), und dem Waisenhauslehrer Friedrich Luther († 1853) die letzten Vertreter dieses Standes ausgeschieden sind.

Akademisch gebildete Lehrer waren auch nur vereinzelt der in

der Hauptsache praktischen Zielen nachstrebenden Gesellschaft beigetreten. Von 1841—1867 findet sich kein Lehrer der Mathematik unter den Aufgenommenen, so dafs G. H. Bubendey nach dem Ableben L. E. Johns († 1864) der einzige der Gesellschaft als einheimisches Mitglied angehörige Lehrer war.

Nachdem die Gesellschaft sich in zunehmender Weise auch mit Fragen der reinen Mathematik beschäftigte, übte sie indessen auf die Lehrerkreise eine wachsende Anziehungskraft aus. Der lebhafte Aufschwung, welchen Hamburg seit der Wiedererrichtung des Deutschen Reiches nahm, veranlafste ein rasches Steigen der Einwohnerzahl und, da gleichzeitig infolge der eingeführten allgemeinen Wehrpflicht die Anforderungen an die Schulbildung der höheren Kreise wesentlich gesteigert waren, die Gründung eines neuen Gymnasiums und höherer Bürgerschulen. Die hierdurch vermehrte Niederlassung akademisch gebildeter Mathematiklehrer wirkte ebenfalls auf die Zusammensetzung der Gesellschaft zurück.

Am Schlusse des Jahres 1889 zählt die Gesellschaft 53 einheimische Mitglieder, unter denen sich 34 Lehrer der Mathematik und Physik befinden. Auch die übrigen Mitglieder gehören nicht mehr vorzugsweise dem Ingenieurstande, sondern den verschiedenen Berufsarten an, welche auf das Studium der exakten Wissenschaften begründet sind. Namentlich ist die Nautik u. w. d. a. seit dem Bestehen der deutschen Seewarte stärker als bisher vertreten.

Durch das Zusammenwirken der Vertreter der reinen und angewandten Mathematik wurde im Verlaufe der letzten 20 Jahre die Gesellschaftsthätigkeit eine wesentlich regere. Es wurde nicht allein entsprechend der wachsenden Mitgliederzahl der Kreis der in den Versammlungen Anwesenden ausgedehnt, sondern auch der zur Behandlung sich bietende Stoff vermehrte sich derartig, dafs die in zweimonatlicher Frist abgehaltenen Versammlungen denselben nicht zu bewältigen vermochten. — Nachdem im Jahre 1877 bereits aufserordentliche Versammlungen eingeschoben waren, wurde deshalb bei Gelegenheit der Durchsicht der Satzungen von 1816 der Beschlufs gefafst, in Zukunft mit Ausnahme der Sommermonate Juli und August am zweiten Sonnabend eines jeden Monats zusammenzukommen.

Bei Festsetzung der neuen Satzungen von 1877 herrschte das Bestreben, in möglichster Kürze die für die Ordnung der Gesellschaft notwendigen Bestimmungen zu treffen, wesentliche Änderungen gegen das Althergebrachte aber nur dort vorzunehmen, wo die veränderten Zeitumstände es unbedingt erforderten. Die Bestimmungen über die Geschäftsführung blieben ungeändert. Unter Aufhebung des besonderen

Hinweises auf die Pflege der angewandten Mathematik wurde die Beförderung und Belebung des Studiums der reinen und angewandten Mathematik als Zweck der Vereinigung, welche sich nunmehr „Mathematische Gesellschaft in Hamburg“ nannte, bezeichnet. Die früheren Bestimmungen über den Kreis der mathematischen Kenntnisse, welche ein Mitglied besitzen sollte, wurden aufgehoben, und die Gesellschaft behielt sich nur im allgemeinen das Recht vor, die mathematische Befähigung des Aufzunehmenden zu prüfen. Man ging bei dieser Bestimmung davon aus, dafs das seither geforderte Mafs mathematischer Kenntnisse von jedem gebildeten Manne erfüllt werde, und wollte vermeiden, durch unbedingte Festlegung hoch gesteigerter Anforderungen Männer der Praxis, welche die mangelnde Kenntnis einzelner Zweige der höheren Mathematik durch grofse Erfahrung auf anderen Gebieten ersetzten, von der Mitarbeit auszuschliefsen.

Entsprechend der Ausdehnung des städtischen Gebietes wurden hinfort alle in den vier Städten Hamburg, Altona, Ottensen und Wandsbeck wohnenden Mitglieder als Einheimische bezeichnet.

Endlich wurde auch eine Bestimmung über die seit einigen Jahren bereits herausgegebenen „Mitteilungen“ der Gesellschaft aufgenommen.

Die regelmäfsige Veröffentlichung von Jahrbriefen hatte in früheren Jahren nur seltene Ausnahmen erfahren. Während von 1790 bis 1847 nur in den Jahren 1814, 1817, 1830, 1838 und 1845 die Herausgabe eines Jahrbriefes unterblieben war, wurde nach 1847 die Ausnahme zur Regel, weil die überlieferte Form eines hauptsächlich für die auswärtigen Mitglieder bestimmten Berichtes nicht mehr in gleicher Weise wie früher als zweckmäfsig erkannt wurde.

Die in den Jahren 1850, 1852, 1853, 1859, 1861, 1865, 1867, 1869, 1871 und 1878 gedruckten Jahrbriefe zeigen noch die alte Gestalt und enthalten neben dem Geschäftsbericht wissenschaftliche Abhandlungen.

Um die geistige Verbindung der Gesellschaft mit dem Gesamtkreise ihrer Mitglieder besser als bisher zu gestalten, wurde 1873 beschlossen, nach jeder Versammlung, in welcher geeignete Vorträge gehalten seien, einen kurzen Bericht über dieselben unter Hinzufügung etwa sonst vorliegender Mitteilungen auf dem Wege des Überdrucks zu vervielfältigen.

Diese autographierten „Mitteilungen“ sind bis zum Jahre 1880 regelmäfsig zur Verteilung gelangt. Sie enthalten in 26 Nummern neben den Berichten über die geschäftlichen Verhandlungen Auszüge

aus 62 in den Versammlungen gehaltenen Vorträgen, welche vorwiegend Gegenstände der reinen Mathematik betreffen.

Diese neue Form der Veröffentlichung bewährte sich indessen nicht auf die Dauer. Es stellte sich der Wunsch ein, neben den Versammlungsberichten auch kleinere selbständige Arbeiten in die „Mitteilungen" aufzunehmen und die zwanglos erscheinenden Umdruckblätter durch auf dem Wege des Buchdruckes herzustellende und jährlich herauszugebende Hefte zu ersetzen. Im Oktober 1880 wurde dementsprechend beschlossen, auch ein Redaktionsausschufs eingesetzt.

Im nächsten Jahre erschien die erste Nummer der gedruckten „Mitteilungen", und bis zum Jahre 1889 sind 9 Hefte, welche den ersten Band derselben bilden, zur Verteilung gelangt.

Die neue Art der Veröffentlichungen erfreute sich innerhalb wie aufserhalb der Gesellschaft einer günstigen Aufnahme, und die Mathematische Gesellschaft ist auf Wunsch derselben mit den folgenden Vereinen und Herausgebern wissenschaftlicher Zeitschriften in einen Schriftenaustausch eingetreten:

Wiskundig Genootschap in Amsterdam.
Reale Accademia dei Lincei in Rom.
Reale Accademia della Scienze fisiche e matematiche in Neapel.
Société Mathematique de France in Paris.
John Hopkins University in Baltimore. (American Journal of Mathematics.)
Dr. Teixeira in Coimbra. (Jornal de Sciencias math. e astronom.)
Kaiserl. Leopoldinisch Carolinische Deutsche Akademie der Naturforscher und Ärtzte.
Akademisch Mathematische Vereine zu Berlin und Göttingen.

Durch die im Austausch erhaltenen Schriften, sowie durch Schenkungen und Anschaffungen vermehrte sich die Bibliothek in einer Weise, dafs die Aufstellung der Bücher Schwierigkeiten bereitete; auch war die Benutzung der Bibliothek aufserhalb der Versammlungsabende mit Weitläufigkeiten verknüpft, welche eine Abhilfe wünschenswert erscheinen liefsen. Da die verhältnismäfsig geringe Ausdehnung der Bibliothek und die mäfsigen zur Erhaltung und Vermehrung derselben verfügbaren Geldmittel gleichwohl die Einrichtung einer eigenen Bibliotheksverwaltung unthunlich erscheinen liefs, wurde die Anlehnung der Gesellschaftsbibliothek an eine der bestehenden öffentlichen Bibliotheken ins Auge gefafst. Die deshalb eingeleiteten Verhandlungen führten im Jahre 1886 zu einem Abkommen mit dem Vorstande der Patriotischen Gesellschaft, nach welchem die Mathematische Gesellschaft derselben die vorhandene Bibliothek sowie alle [illegible] Er-

werbungen an Drucksachen als Geschenk überweist. Die Patriotische Gesellschaft übernimmt dagegen die Aufstellung und Katalogisierung dieser Werke und gestattet den Mitgliedern der Mathematischen Gesellschaft die Benutzung ihrer Bibliothek nach den für die eigenen Mitglieder geltenden Gesetzen.

War hierdurch die Benutzung der eigenen Bibliothek wesentlich erleichtert, so hatte die Gesellschaft im selben Jahre, dank dem bereitwilligen Entgegenkommen der Staatsbehörde, auf verwandtem Gebiete einen weiteren wesentlichen Erfolg zu verzeichnen. Die in den letzten Jahrzehnten nur in geringem Umfange ausgeführten Anschaffungen mathematischer Werke für die hiesige Stadtbibliothek liefsen dieselbe in den einschlagenden Fächern als sehr lückenhaft erscheinen. Die Mathematische Gesellschaft hatte sich deshalb mit einer ausführlich begründeten Eingabe an die Oberschulbehörde gewandt und um nachträgliche Ausfüllung der wesentlichsten Lücken sowie um vermehrte Anschaffung auf mathematischem Gebiete ersucht. In der Versammlung vom 11. Dezember 1886 konnte die erfreuliche Mitteilung gemacht werden, dafs die Oberschulbehörde die Eingabe als begründet erachtet und beantragt habe, einen besonderen Posten für die Vervollständigung der mathematischen Sammlungen der Stadtbibliothek in das Staatsbudget einzustellen. Bei der Verwendung des bewilligten Betrages fanden die Vorschläge der Mathematischen Gesellschaft volle Berücksichtigung.

Es ist an dieser Stelle noch zweier Männer zu gedenken, welche, in kräftigem Mannesalter stehend, der Gesellschaft durch den Tod entrissen wurden.

Heinr. Corn. Jakob Reese, Inspektor der Hamburger Gascompagnie und später Baupolizeiinspektor, wurde im Jahre 1857 Mitglied der Gesellschaft und gehörte zu denjenigen jüngeren Ingenieuren, welche das wissenschaftliche Interesse in lebhafter Weise vertraten. Reese hat bis zum Beginn der mehrjährigen schweren Krankheit, welche im Juli 1884 seinen Tod herbeiführte, mit regem Eifer die Thätigkeit der Gesellschaft unterstützt.

Mit Reese eng befreundet und fast gleichzeitig mit ihm der Gesellschaft beigetreten, war der Ingenieur F. H. Reitz, welcher mit gründlichen mathematischen Kenntnissen eine grofse Erfindungsgabe verband und eine Reihe wichtiger geodätischer Instrumente in die Praxis einführte, von denen hier nur der zur Bestimmung der mittleren Meereshöhe dienende integrierende Flutmesser hervorgehoben werden soll. Reitz starb nach kurzer Krankheit im November 1886.

Einen ferneren Verlust hatte die Gesellschaft im März 1887

durch den plötzlich und unerwartet eingetretenen Tod des Herrn Bürgermeisters Dr. Kirchenpauer zu beklagen, welcher im Jahre 1883 in Anerkennung seiner hohen Verdienste um die Förderung der Wissenschaften zum Ehrenmitgliede der Gesellschaft erwählt war.

Die Gesellschaft schätzt sich glücklich, in dem Nachfolger des Herrn Bürgermeisters Dr. Kirchenpauer im Amte des Vorsitzenden der Oberschulbehörde, Herrn Senator Dr. Stammann, einen wohlwollenden Vertreter ihrer Interessen wieder gefunden zu haben und hat deshalb in ihrer Versammlung vom 15. September 1888 Herrn Senator Dr. Stammann, in Anerkennung der Verdienste desselben um die Bestrebungen der Gesellschaft, zu ihrem Ehrenmitgliede erwählt.

In den regelmäfsigen Versammlungen der letzten Jahre ist die Gesellschaft bemüht gewesen, den bei Durchsicht der Satzungen im Jahre 1877 in erster Linie ins Auge gefafsten Zweck gegenseitiger wissenschaftlicher Anregung möglichst zur Geltung zu bringen. Die seit dem Jahre 1886 eingeführte Neuerung, neben den vorbereiteten wissenschaftlichen Vorträgen jedesmal Gelegenheit zu geben zu kleineren Mitteilungen über neuentdeckte Sätze und Thatsachen auf mathematisch-physikalischem Gebiet, hat sich durchaus bewährt.

Am 10. November 1877 ist die bis dahin bestehende Sitte, dafs der Jahrverwalter in den regelmäfsigen Sitzungen Thee und Rauchbedarf für die Mitglieder zur Verfügung zu halten habe, aufgehoben. Die zwanglosen Besprechungen im ersten Teile der Versammlungen sind damit ebenfalls verschwunden, doch ist an deren Stelle eine Unterhaltung nach beendeter Sitzung getreten, an welcher die Mehrzahl der Mitglieder teilzunehmen pflegt.

Das Stiftungsfest am Fastnachttage ist unverändert nach alter Sitte gefeiert. In den letzten Jahren erfreute sich dasselbe in wachsendem Mafse der Teilnahme befreundeter Gäste, indem das bevorstehende 200jährige Jubelfest in besonderer Weise das ehrwürdige Alter der Gesellschaft zur Erscheinung gebracht und das Interesse für die Bestrebungen derselben geweckt hat. Möge der lebhafte Aufschwung, welchen die aufsteigende Linie der am Schlusse der Festschrift angehängten graphischen Darstellung der Mitgliederzahlen bezeugt, ferner andauern, und niemals der alte Wahlspruch in Vergessenheit geraten:

Was gefunden ich verwahr,
Und noch finde immerdar!

Materialien für die Geschichte der Mathematischen Gesellschafts-Mitglieder in den Niederlanden.

(Von Bierens de Haan in Leyden.)

Es war wohl Jakob Oostwoud, Lehrer der Mathematik in Oost-Zaandam, der in den Niederlanden den Anstofs gab zur Anschliefsung an die Hamburger Mathematische Gesellschaft.

Vorher war Friedrich Marci [der Meritierende], welcher 1734 als Mitglied aufgenommen war, von Hamburg nach Amsterdam übergesiedelt. (Siehe bezüglich dessen Wirksamkeit in Holland „Bouwstoffen voor de Geschiedenis der Wis- en Naturkundigen Wetenschappen in de Nederlanden", 1878, S. 63.)

Auf ihn folgte Christiaen Croesen oder Croese als Mitglied, der sich unter dem deutschen Namen Kruse 1737 einschreiben liefs. Er war ein Sohn von Jurriaan Croesen, Schuster zu Amsterdam, und wurde am 30. Oktober 1766 Bürger der Stadt Amsterdam; er war Tabakspinner, nachher Schreib- und Rechenmeister daselbst, und starb 1781.

Jakob Oostwoud aber, ein Schullehrer zu Oost-Zaandam, in der Nähe von Amsterdam, 1766 als Mitglied aufgenommen, war auf vielerlei Weise im Geiste der Mathematischen Gesellschaft wirksam. Er hatte sich schon bekannt gemacht durch seine „Maandelykse Mathematische Liefhebbery"[1]) d. h. Monatliche Mathematische Liebhaberei, die, 1754 bis 1763 von ihm herausgegeben und später von

---

1) MAANDELYKSE ‖ MATHEMATISCHE ‖ LIEFHEBBERY; ‖ Waar in voorkoomen, eenige *OPGELOSTE* ‖ *VOORSTELLEN,* met nog eenige weinige ‖ te *ONTBINDEN* voorgesteld; ‖ *Geschikt ten dienste der Leergierige Jeugt, of die zig* ‖ *in de* ALGEBRA *en* REKEN-KONST *zoude* ‖ *willen oefenen.* ‖ DOOR ‖ J. OOSTWOUD. ‖ Waar agter gevoegt is, ‖ het MAANDELYKS NIEUWS der ‖ FRANSCHE EN DUYTSCHE ‖ SCHOOLEN. ‖ In de Provincien van *Holland, West-Friesland,* ‖ *Utrecht, Overyssel,* &c. ‖ Zoo van die Vaceren, ‖ als daar Nominatien, Beroepingen en diergelyke ‖ Veranderingen zyn voorgevallen. ‖ *Voor de Maand* . . . . ‖ *Met Privilegie.* ‖ Te *PURMERENDE,* ‖ By PIETER JORDAAN, BOEKVERKOOPER, ‖ Ordinaris Drukker van Stads en 's Lands Zegel; ‖ alwaar dezelve alle Maanden voor 4 st.: te bekomen ‖ zullen zyn; als mede te *Amsterdam,* ‖ By J. KANNEWET, en de verdere Boekver|koopers, die op de Tytel van *Maandelyks* ‖ *Nieuws der Fransche en Duytsche Scholen* gemeld werden. in 8°.

Louis Schut bis 1769 fortgesetzt wurde, und deren allmonatliche Hefte (zu 4 Stuivers = $^1/_3$ Mark) von durchschnittlich 40 Seiten in klein 8°, mathematische Aufgaben mit deren Auflösungen gaben, und in einer zweiten Abteilung Bericht erstatteten über allerhand Schulsachen, Todesfälle, Vakaturen, Versetzungen, Ernennungen, vergleichende Examina. Die gestellten Fragen und Aufgaben waren oft beigefügt. Die Aufgaben gab er später, zu Tausenden vereinigt, in drei Serien heraus[1]), wie es G. Hiddinga in Hamburg mit seinen drei Serien von 100 Aufgaben auch that.

Später nahm er den besten Weg, die Mathematische Gesellschaft und ihr Streben in den Niederlanden bekannt zu machen. Er gab eine Übersetzung von Halckes Sinnenkonfekt[2]) 1767 heraus, worauf sofort eine neue (Titel-) Ausgabe 1768 folgte; und nochmals 1780 eine zweite neue Ausgabe. Im Jahre 1776 gab er dann unter dem Titel Bundel van Wiskundige Uytspanningen[3]) (Büschel mathematischer

---

1) MATHEMATISCHE ‖ LIEFHEBBERY, ‖ Behelzende een verzameling van ‖ DUYZEND ‖ VOORSTELLEN. ‖ Betrekkelyk tot verscheyde deelen der ‖ WISKUNDE, en bevoorens den ‖ *Liefhebberen* MAANDELYKS tot ‖ oeffening voorgesteld. ‖ Grootdeels nieuwelyks ontworpen door VOOR-‖NAME BEGUNSTIGERS DEZER WETEN-‖SCHAP; en anderdeels getrokken uyt ‖ verscheyde, doch meest uytheem-‖sche SCHRYVERS. ‖ Ten dienste der *Leerbegerigen* by een ‖ gebragt DOOR ‖ J. OOSTWOUD, ‖ *Lid van de Societeit der Mathematische Weten-*‖*schappen te Hamburg, en Leermeester der* ‖ *Wiskunde de Oostzaandam* ‖ I (u. s. w.) *DEEL* ‖ *te* PURMERENDE, AMSTERDAM en HAARLEM. By Boekverkoopers P. JORDAAN, J. KANNEWET, en A. TOLK. ‖ *Met Privilegie.* in 8°.

2) MATHEMATISCH ‖ ZINNEN-CONFECT, ‖ *Of* ‖ WISKUNDIGE UYTSPANNINGEN ‖ ter beoeffeninge van het Verstand. ‖ Bestaande in 574 uytgelezen en ten deele zeer ‖ konstige Mathematische Voorstellen met ‖ veele konstige Ontbindingen en ‖ Regelen vercierd. ‖ Allen Liefhebberen der Wiskundige Wetenschap-‖pen, en inzonderheyd der voortreffelyke Re-‖kenkunde, tot eene aangenaame verlustiging ‖ en ter opscherping van den Geest ‖ voorgesteld door ‖ PAUL HALCKEN. ‖ In zyn Leven LID van de Societeit der Mathe-‖matische Wetenschappen te Hamburg en ‖ Mathematicus te Boxtehoede. ‖ Uyt het Hoogduytsch vertaald, en met eenige Aan-‖tekeningen vermeerdert door ‖ JACOB OOSTWOUD, ‖ LID van de genoemde Societeit en Leermeester ‖ der Wiskunde te Oostzaandam. ‖ te PURMERENDE, ‖ By *Pieter Jordaan,* Boekverkooper; Or-‖dinaris Drukker van de Stad en van 's Lands Zegel. ‖ MDCCLXVII in 8°. S. 1—31; A—EEE Seiten 525. 2 Tafeln.

3) BUNDEL ‖ VAN ‖ WISKUNDIGE ‖ UYTSPANNINGEN ‖ Uyt eenige Hoogduytsche Autheuren ‖ by een verzameld, en vertaald door ‖ JACOB OOSTWOUD, ‖ Mathematicus te Oostzaandam, en Lid van de ‖ Societeit der Mathematische Wetenschap‖pen te Hamburg. ‖ Te PURMERENDE ‖ By *Pieter Jordaan,* Boekverkooper; Ordinaris ‖ Drukker van de Stad en van 's Lands Zegel. ‖ S. I—XIV A—C. S. [6], 1 - 36; A—D. S. 1—60; A. S. [4], 1—14; A, B. S. [4], 1—20; A. S. 1—16; A, B. S. 1—30; A—K. S. 1—122; 1—24. in 8°.

Lucubrationen) die Übersetzung einiger Arbeiten der mathematischen Gesellschaft heraus; diese sind:

Jos. Crummel, Het Nut der Algebra	36	Seiten
Gerl. Hiddinga, Aanleiding tot de Algebra . .	60	„
— —, 1e Verzameling van 100 Algebr. Voorstellen	14	„
— —, 2e „ „ 100 „ „	20	„
— —, 3e „ „ 100 „ „	16	„
(deren letzte Handschrift ihm vom Sohne, Johann Heinrich Hiddinga, Kunstmaler, zugesandt wurde)		
H. Meiszner, Arithmetische Roozenkrans	32	„
— —, Arithmetische en Geometrische-Algebraische Konst-keten. Met Aanhang	121	„
— —, Mathematisch Konst-Wekkertje en 23 voorstellen van Brandanus Detri	24	„

Oostwoud dedizierte diese Sammlung an Albert Vryer (der 1770 bei der Gesellschaft aufgenommen war), Pfarrer der Mennoniten-Gemeinde zu Wormerveer; dieser half dem Übersetzer bei der Ausgabe und bei Annotierungen verschiedener Art.

Bald darauf 1775 wurde als Mitglied der Mathematischen Gesellschaft aufgenommen: Arnoldus Bastian Strabbe, der am 20. Juni 1740 zu Zwolle geboren, zu Amsterdam den 26. März 1805 gestorben ist; er war ein Sohn von Evert Jan Strabbe und Antonia Wyk. In Amsterdam war er Lehrer der Mathematik und Staats-Aichmeister.

Nachdem er schon 1760 die „Gronden der Algebra“ und „Beginselen der Geometrie“, beide von Clairaut, übersetzt hatte, fing er 1770 seine „Oefenschool der Mathematische Wetenschappen“ (Übungsschule der mathematischen Wissenschaften) an, deren vier gröfsere Abteilungen in 8° 300 bis 400 Seiten stark waren. Sie enthielten eine grofse Menge Aufgaben der reinen und angewandten Mathematik und gingen bis zu der Fluxionsrechnung hinauf.

Er gab noch heraus:

Verhandeling over de Rabdologie of Rekening met staafjes. Amst. 1770. 8°.

Gronden der Meetkonst . . Toepassing in de Oplossing van eenige Meetkundige Voorstellen . . de Meeting der Vlakken en Lighaamen en de Maxima en Minima. Amst. 1770. 8°; und ib. 1790. 8°.

Inleidinge tot de Mathematische Weetenschappen. II Dl. 8°. 1770; 3. Aufl. ib. 1820.

Mitvoerige Tafels van ondeelbare of Priemgetallen. Amst. 1772. 8°.

Toepassing van de Algebra op de Hoogere Meetkunde. Amst. 1782, II Dl. 8°.

Mathematische Uitspanningen of Examen. Amst. 1789. 8°.

Het vernieuwde Licht des Koophandels of Grondig onderwijs in de Koopmans Rekenkunst. Amst. 1790. 8°, mit vielen Ausgaben bis 1840.

Schatkamer der Koopmans-Rekenkunde. Gouda 1791. I Dl. 8°. 2. Aufl. 1799.

Eerste Beginselen van de Arithmetica of Rekenkunst. Amst. 1790. II Dl. 8°, mit vielen Ausgaben bis 1829.

Eerste Beginselen der Fluxie-Rekening. Amst. 1798. 8°.

Gronden der Driehoeksmeting. Amst. 1804. 8°.

Verzameling van rekenkunstige Vermakelijkheden. Amst. 1815. 8°.

Seine Übersetzungen von de Lalande, Astronomie, Amst. 1773—1780, V Dl. 8° und dieses Astronomischen Tafeln; von Montucla, Geschichte der Mathematik, Amsterdam 1782—1804, IV Dl. 8°; von Simpion, Gründen der Mathematik, Amst. 1791, 8°, wurden vielfach benutzt.

Das gröfste Verdienst hatte Strabbe aber vielleicht darin, den ersten Anstofs zu der Geburt der zu Amsterdam 1778 gestifteten mathematischen Gesellschaft unter dem Motto „Een Onververmoeide Arbeid komt alles te boven" [Eine unermüdete Arbeit überwindet alles] gegeben zu haben: wenigstens von 1778 bis 1804 war er ihr Sekretär. Diese Gesellschaft stellte sich das Ziel, das Aufstellen von Aufgaben und die Mitteilung der ausgewählten Auflösungen mit wissenschaftlichen Anmerkungen —, das Ausschreiben von Preisfragen und Bekrönung der Antworten — das Aufnehmen von mathematischen Abhandlungen — das Halten von wissenschaftlichen Vorträgen — überhaupt den in den Niederlanden immer vorhandenen mathematischen Sinn zu entwickeln und in guter Bahn zu halten. Diese Gesellschaft ist noch jetzt wirksam am Leben und giebt regelmäfsig ihre Aufgaben, ihre Preisfragen und ihr „Nieuw Archief voor Wiskunde". Im Jahre 1885 gab sie ein wissenschaftliches Register der Arbeiten, in den Jahren 1818—1883 eine Sammlung von etwa 3950 ausgewählten Aufgaben, in 445 Seiten imperial 8°.

Gehen wir noch auf unseren Schritten zurück, so finden wir als Mitglieder der Hamburger Mathematischen Gesellschaft:

Jean Correch, Liebhaber der mathematischen Wissenschaften, Sohn des Wagenmachers Nathan Correch, wurde Bürger der Stadt Amsterdam am 7. September 1779 und in demselben Jahre Mitglied der Gesellschaft.

Hermanus Rakers, Sohn des Schiffsbaumeisters Pieter Rakers, wurde Bürger von Amsterdam am 25. Oktober 1759. Er war selbst auch Schiffbaumeister und Lehrmeister der Mathematik in Amsterdam. Er wurde 1780 als Mitglied aufgenommen.

Johann Peter Marchant, Schulmeister zu Bodegraven, hielt ein Institut und wurde aufgenommen 1786.

Johannes te Veltrup war Lehrmeister zu Haarlem und wurde Mitglied 1786. Er gab 1796 eine neue Ausgabe von A. B. Strabbe, Eerste Beginselen van de Arithmetica. Amsterdam. 8°.

Konrad Werle, Schullehrer in Amsterdam, wurde 1787 Mitglied der Gesellschaft.

Gerrit van der Weyde, Liebhaber der mathematischen Wissenschaften im Haag, wurde 1780 Mitglied der Gesellschaft.

Pieter Hegnis, zu Haarlem gestorben 1784, wurde als Mitglied aufgenommen 1780.

Jan Bolten, Architekt und Baumeister von Gelderland, Holland, Utrecht u. s. w., wohnte in Amsterdam und wurde 1781 Mitglied der Gesellschaft.

Cornelis Brewil, Stadt- und Diakonie-Schulmeister zu Hoorn, wurde 1781 bei der Gesellschaft angenommen.

Gerrit Schut, 1769 Schullehrer zu Schiedam, später zu Sloterdyk. Er war ein Bruder des Louis Schut, der die Maandelykse Liefhebbery von J. Oostwoud fortsetzte. Teil XII—XVII. 1763—1769.

Gerrit Beeldemaker zu Amsterdam wurde Mitglied 1791.

Joannes van der Paardt wurde 1758 beeidigter Buchhalter in Amsterdam und 1792 in die Gesellschaft aufgenommen.

Hendrik Gehle, zu Amsterdam, wurde Mitglied 1792.

Adriaan Alblass war Stadt- Schreib- und Rechenmeister zu Purmerend.

Wie man sieht, blühte die Hamburger Mathematische Gesellschaft im Ende des vorigen Jahrhunderts ziemlich gut in den Niederlanden. Hatte es damit ein Ende, so war die Ursache wohl der zunehmende Einfluſs der Amsterdamer Gesellschaft. Wie wir oben gesehen haben, mag sie wohl, als eine Tochter der älteren Mutter, diese bei uns überwachsen haben. Hoffen wir, daſs beide Gesellschaften jetzt in ihrem hohen Alter ihrem Charakter treu bleiben und wie gute Schwestern nebeneinander noch lange leben und blühen werden!

Verzeichnis aller Mitglieder,

welche in die zu Hamburg 1690 begründete Kunst-Rechnungs lieb- und übende Societät, seit dem Jahre 1877 genannt „Mathematische Gesellschaft in Hamburg" aufgenommen sind.

Die jedem Namen vorangesetzte Jahreszahl bezeichnet das Eintrittsjahr, die dem Namen nachgesetzte Zahl das Austritts- bzw. Todesjahr des betreffenden Mitgliedes. Die nicht mit voller Genauigkeit verbürgten Jahreszahlen sind cursiv gedruckt. Die Namen derjenigen, welche sowohl als „einheimische", als auch als „auswärtige" Mitglieder der Gesellschaft angehört haben, sind mit Ausnahme der noch lebenden auswärtigen Mitglieder nur in der Reihe der „einheimischen" Mitglieder aufgeführt.

I. Ehrenmitglieder.

1. *1699. Philipp Jakob Oswald,* Freiherr von Ochsenstein, Kaiserl. Hofmathematikus in Wien [der Öffnende]. † 1703.
2. *1699. Johann Georg von Göritz*, Kaiserl. General-Kriegs-Kommissariat-Amts-Kanzlei-Verwandter in Wien [der Glänzende]. † 1723.
3. *1699. Theobald Schöttel,* Kaiserl. Antecamerae Thürhüter in Wien [der Schirmende]. † 1720.
4. *1729. Joseph Schöttel*, Kaiserl. Archivarius der Hof-Kriegs-Kanzlei in Wien. † 1760.
5. 1790. *Johann Georg Büsch,* Professor der Mathematik in Hamburg. † 1800.
6. „ *Matthias von Drateln,* Verordneter beim Admiralitäts-Dispache-Comptoir in Hamburg. † 1801.
7. 1792. *Ernst Georg Sonnin*, Baumeister in Hamburg. † 1794.
8. 1802. *Johann Elert Bode*, Dr. phil., Direktor der Sternwarte in Berlin. † 1826.
9. „ *Kaspar Horner*, Dr. phil., Professor der Mathematik in Zürich. † 1834.
10. 1813. *H. C. Schumacher,* Dr. jur., Konferenzrat, Direktor der Sternwarte in Altona. † 1850.
11. 1815. *Karl Friedr. Hipp*, Dr. phil., Professor der Mathematik in Hamburg, seit 1826 ordentl. Mitglied.
12. 1818. *Karl Friedr. Gauſs,* Professor der Mathematik, Direktor der Sternwarte in Göttingen. † 1855.
13. 1820. *J. G. Tralles,* Dr. phil., Professor der Mathematik in Berlin. † 1822.

14. 1820. *F. G. W. Struve*, Dr. phil., Direktor der Sternwarte in Pulkowa. † 1864.
15. „ *Walbeck*, Dr. phil., Direktor der Sternwarte in Abö. † 1823.
16. 1823. *Joh. Wilh. Brandes*, Dr. phil., Professor der Mathematik in Breslau. † 1836.
17. 1824. *Georg von Buquoy*, Kaiserl. Kämmerer in Prag. † vor 1865.
18. „ *Karl Ferd. Degen*, Dr. phil., Professor der Mathematik in Kopenhagen. † 1825.
19. „ *Friedr. Wilh. Spehr*, Dr. phil., Professor der Mathematik in Braunschweig. † vor 1865.
20. 1826. *Karl Gustav Rentzel*, Schullehrer in Osterode. † vor 1865.
21. 1828. *Joh. Franz Encke*, Dr. phil., Direktor der Sternwarte in Berlin. † 1865.
22. „ *Richard Parish*, Kaufmann in Hamburg. † vor 1865.
23. „ *Friedr. Sieveking*, Dr. jur., Bürgermeister in Hamburg. † 1875.
24. 1829. *Christian Ludw. Gerling*, Professor der Astronomie in Marburg. † 1864.
25. 1832. *A. L. Crelle*, Dr. phil., Geh. Oberbaurat in Berlin. † 1855.
26. 1833. *Adam Burg*, Professor der Mathematik in Wien. † 1882.
27. 1834. *W. Olbers*, Dr. phil., Direktor der Sternwarte in Bremen. † 1839.
28. 1836. *J. A. Grunert*, Professor der Mathematik in Greifswalde. † 1873.
29. 1840. *A. D. Bache*, Professor der Mathematik in Philadelphia. † 1868.
30. „ *G. W. Müller*, Dr. phil., Major der Artillerie in Hannover. † 1843.
31. „ *William Lindley*, Ingenieur in London.
32. 1842. *C. L. Kunze*, Dr. phil., Professor in Weimar.
33. 1843. *Sir Thomas Brisbane*, Bart. zu Makerstown in Schottland. † 1860.
34. 1846. *von Senftenberg*, Baron, Gutsbesitzer in Böhmen. † 1858.
35. „ *Moinet*, Professor der Mathematik in Paris. † vor 1869.
36. „ *A. Quetelet*, Direktor der Sternwarte in Brüssel. † 1874.
37. 1847. *J. E. E. Nürnberger*, Dr. phil., Kgl. Geh. Rat, Landsberg a. W. † 1849.
38. 1855. *Heinr. Barth*, Dr. phil. in Berlin. † 1865.
39. 1876. *Bierens de Haan*, Dr. phil., Professor der Mathematik in Leyden.
40. 1883. *Heinr. Corn. Bernh. Reese*, Baupolizei-Inspektor in Hamburg. † 1885.
41. „ *Gust. Heinrich Kirchenpauer*, Dr. jur., Bürgermeister in Hamburg. † 1887.
42. 1886. *H. W. C. Hübbe*, Stadtbaudirektor in Schwerin.
43. 1888. *Johann Otto Stammann*, Dr. jur., Senator in Hamburg.

II. Einheimische Mitglieder.

1. 1690. *Heinrich Meifsner* [der Mehrende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Jakobi. Senior. † 1716.
2. „ *Valentin Heins* [der Hoffende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Michaelis. Consenior. † 1704.

3. 1690. *Johann Jakob Zimmermann* [der Zierende], ehemals Prediger in Würtemberg, Lehrer der Mathematik. † 1693.
4. „ *Michael Scharff* [der Schärfende], Schreib- und Rechenmeister. † 1703.
5. „ *Peter Andr. Grahn* [der Grünende], Schreib- und Rechenmeister a. ausw. M. † 1710.
6. „ *Barth. Hinr. Witte* [der Wehrende], Buchhalter. † 1712.
7. 1691. *Michael Hönicke* [der Hebende], Schreib- und Rechenmeister am Dom. † 1707.
8. 1692. *Christopher Schliffel* [der Schlichtende], Buchhalter und Rechenmeister. † 1708.
9. 1692/3. *Johann Gude* [der Gebende], Schreib- und Rechenmeister. *1705.*
10. 1693. *Eberhard Eberus* [der Ebende], Buchhalter. † 1701.
11. 1694. *Joh. Christ. Ferber* [der Forschende], Schreib- und Rechenmeister am Heil. Geist. † 1724.
12. 1695/6. *Jürgen Riege* [der Reiffende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Michaelis. † 1717.
13. 1697. *Dietrich Peter Hinnerking* [der Häuffende], Schreib- und Rechenmeister. † 1714.
14. 1704. *Joh. Hinr. Wohlgemuth* [der Weisende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Nikolai. † 1720.
15. 1718. *Rudolph Carstens* [der Confirmierende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Petri. † 1750.
16. „ *Berend Andr. Wodarch* [der Wohlmeinende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Katharinen. † 1743.
17. „ *Hans Jakob Seehusen* [der Säende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Nikolai. † 1734.
18. „ *Hinr. Matth. Wohlgemuth* [der Wirkende], a. ausw. M. † 1732.
19. 1721. *Klaus Magens* [der Meditierende], Kaufmann a. ausw. M. † 1764.
20. „ *Joh. Christ. Öhlers* [der Observierende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Jakobi. † 1735.
21. „ *Gerlof Hiddinga* [der Helfende], Lehrer der Mathematik und des Zeichnens. † 1766.
22. „ *Jochim Franck* [der Fassende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Michaelis. † 1751.
23. 1722. *Hermann Wahn* [der Wählende], Schreib- und Rechenmeister der St. Johannis-Schule. † 1747.
24. *1727.* *Joh. Hinr. Stüve* [der Suchende], Buchhalter. † 1751.
25. „ *Joh. Elias Gressner* [der Gränzende], Schreib- und Rechenmeister zu St. Jakobi. † 1768.
26. 1735. *Joh. Jürgen Ressing* [der Ruhende], Schreib- und Rechenmeister an der Passmannschen Schule. † 1790.
27. 1751. *Joh. Reimer I* [der Recreierende], Lehrer der Mathematik und der Navigation. † 1803.

28. 1752. *Jakob Rolfink* [der Rechnende], Schreib- und Rechenmeister. † 1787.
29. 1764. *Fedder Carstens* [der Contentierende], Kaufmann. † 1802.
30. 1774. *Johann Lange* [der Lernbegierige], Lehrer a. ausw. M. † 1815.
31. 1775. *Jost Hinr. Biester* [der Begnügende], Kaufmann a. ausw. M. *1799.*
32. 1776. *Christ. Friedr. Scharnberg* [der Satisfacierende], Schreib- und Rechenmeister an der Domschule. † 1795.
33. „ *Joh. Reimer II.* [der Recipierende], Lehrer. *1796.*
34. 1783. *Joh. Herm. Grunendahl* [der Genügende], Schreib- und Rechenmeister an der Domschule. † 1806.
35. 1790. *Johann Theod. Reinke,* Strom- und Kanalbau-Direktor. † 1825.
36. „ *Peter Heinr. Chr. Brodhagen,* Professor der Mathematik am Gymnasium und Johanneum. † 1805.
37. „ *Christ. Diedr. Westphalen,* Lehrer der St. Petri-Kirchenschule. † 1814.
38. „ *Johann Heinr. Röding,* Lehrer der St. Jakobi-Kirchenschule. † 1800.
39. „ *Joh. Joach. Kruse,* Lehrer der St. Nikolai-Kirchenschule. † 1813.
40. „ *Joh. Gottl. Lor. Halske,* Lehrer der St. Katharinen-Kirchenschule. † 1818.
41. „ *Friedr. Peter Nuppnau,* Lehrer der St. Michaelis-Kirchenschule. † 1820.
42. 1792. *Joh. Hinr. Röding* (Lukas Rödings Sohn), Kaufmann. † 1815.
43. 1797. *Joh. Gottl. Nik. Rübcke,* Organist und Küster in Ham. *1800.*
44. 1800. *Heinrich Behrmann,* Schullehrer. † 1811.
45. „ *Johann Christ. Petersen,* Lehrer am Waisenhause. † 1818.
46. 1801. *Hans Christ. Friedr. Westphal,* Lehrer der Dunteschen Stiftungsschule. † 1821.
47. „ *Joh. Christoph Wedderihn,* Lehrer der St. Jakobi-Kirchenschule. † 1844.
48. 1802. *Pet. Joach. Wittgreffe,* Steinmetzmeister. † 1813.
49. 1804. *Heinr. Richard,* Ingenieur-Kapitän. † 1809.
50. 1805. *Johann Georg Repsold,* Mechaniker. † 1830.
51. 1806. *Joh. Dan. Jak. Grunendahl,* Lehrer an der St. Nikolai-Kirchenschule. † 1833.
52. 1808. *Jakob Kock,* Baukondukteur. *1811.*
53. 1812. *Peter Heinrich Lönse,* Schullehrer. † 1825.
54. 1816. *Joh. Jürgen Menck,* Schullehrer. † 1837.
55. „ *Joh. Phil. Wertheim,* Dr. phil., Hauptmann der hamburgischen Artillerie. † 1846.
56. 1811. *Reinhard Woltman,* Wasserbau-Direktor, war vorher ausw. M. seit 1790. † 1837.
57. 1816. *E. W. Schuback,* Inspektor der Staatspachtgüter auf den Elbinseln. † 1876.
58. 1817. *J. M. Müller,* Lehrer der Navigation. † 1819.

59. 1819. *H. L. Behrens,* Ingenieur. *1820.*
60. „ *Nik. Peter Krohn,* Schiffskapitän. † 1820.
61. „ *Chr. Karl Ludw. Rümker,* Direktor der Sternwarte, auch auswärtiges Mitglied. † 1862.
62. 1820. *Chr. Friedr. Lange,* Architekt. † 1833.
63. 1822. *Daniel Braubach,* Lehrer der Navigation. 1826.
64. „ *Karl von Stephani,* Oberst und Stadtkommandant. † 1842.
65. „ *Hektor Frd. Ernst Müller,* Lehrer der Mathematik. *1825.*
66. „ *Friedr. Luther,* Lehrer am Waisenhause. † 1853.
67. 1823. *Karl August Schwarz,* Ingenieur-Kapitän. † 1845.
68. „ *F. W. Hanemann,* Baukondukteur. *1825.*
69. 1824. *Ernst Gottl. Christiani,* Hauptmann der hamburgischen Artillerie. 1858.
70. „ *J. C. H. Gebauer,* Dr. phil., Schulvorsteher. † 1837.
71. 1825. *Joh. Friedr. Cramm,* Hauptmann und Adjutant im Generalstabe des Bürgermilitärs. † 1879.
72. „ *Johannes Holler,* Lehrer der Mathematik. † 1831.
73. 1826. *Ludw. Ernst John,* Lehrer der Mathematik. † 1864.
74. „ *Karl Friedr. Hipp,* Dr. phil., Professor der Mathematik am Gymnasium und Johanneum. † 1838.
75. 1827. *C. Adolf Koch,* Lehrer der Mathematik. 1839.
76. 1828. *Christ. Aug. Friedr. Peters,* Dr. phil., Astronom, auch auswärtiges Mitglied. † 1880.
77. 1830. *Heinrich Hübbe,* Wasserbau-Direktor, auch auswärtiges Mitglied. † 1871.
78. 1831. *Johannes Lohse,* Lehrer der Mathematik, später Fabrikant, auch auswärtiges Mitglied. † 1859.
79. 1833. *J. C. W. Meyer,* Schullehrer. *1840.*
80. 1834. *Nik. Ferd. Haller,* Dr. jur., Bürgermeister. † 1876.
81. „ *J. L. Köster,* Baukondukteur. † 1842.
82. „ *J. van der Smissen,* auch auswärtiges Mitglied. *1855.*
83. 1837. *Ad. Corn. Petersen,* Astronom. † 1853.
84. „ *Heinr. Kessels,* Chronometermacher. † 1849.
85. „ *Leop. von Nehus,* Königl. dänischer Ingenieur-Kapitän. † 1844.
86. „ *von Nyegaard,* Königl. dänischer Kapitän. † 1847.
87. „ *Adolf Repsold,* Mechaniker. † 1871.
88. „ *Georg Repsold,* Mechaniker und Aichinspektor. † 1885.
89. 1841. *Georg Heinr. Bubendey,* Professor der Mathematik. † 1889.
90 1843. *Peter Herm. Fersenfeldt,* Architekt. † 1853.
91. „ *Jakob Heinr. Ludolff,* Baupolizei-Inspektor. † 1873.
92. „ *G. F. C. Röbbelen,* Ingenieur, auch auswärtiges Mitglied. *1880.*
93. 1844. *Fricdr. Gullann,* Wasserbau-Inspektor. † 1859.
94. 1846. *Julius Prömmel,* Schiffsarchitekt, auch auswärtiges Mitglied. † 1870.
95. 1847. *Daniel August Schuback,* Deichinspektor.

96. 1847. *Christ. Schaumann*, Ingenieur. † 1858.
97. 1852. *Karl Ludwig Nagel*, Mühlenbaumeister. † 1882.
98. „ *Christian Wilhelm Plath*, Dr. phil., Oberingenieur a. D.
99. 1855. *Nikolaus Heinr. Schilling*, Gasanstalts-Direktor, auch auswärtiges Mitglied. 1880.
100. „ *Johann Hermann Maack*, Wasserbau-Inspektor. † 1868.
101. „ *Johannes Dalmann*, Wasserbau-Direktor. † 1875.
102. 1856. *Georg Ferd. Wilh. Rümker*, Direktor der Sternwarte.
103. „ *Theod. Libert Westphalen*, Ingenieur. 1860.
104. „ *Heinr. Wilhelm Clemens Hübbe*, Ingenieur, seit 1886 Ehrenmitglied.
105. „ *Friedr. Herm. Reitz jr.*, Ingenieur. † 1886.
106. 1857. *Heinr. Cornel. Jakob Reese*, Baupolizei-Inspektor, seit 1883 Ehrenmitglied.
107. „ *Karl Theod. Bernh. Niebour*, Direktor der Navigationsschule.
108. 1859. *G. L. Ulex*, Chemiker in Hamburg. 1863.
109. „ *Hugo Lentz*, Wasserbau-Inspektor, seit 1864 auswärtiges Mitglied.
110. „ *J. H. A. Reitz sen.*, Mechaniker. † 1879.
111. „ *A. C. Vermehren*, Ingenieur. † 1863.
112. „ *C. F. Gielmester*, Ingenieur. † 1871.
113. 1860. *Ferdinand Deppermann*, Ingenieur. 1875.
114. „ *Hans Otto Jessen*, Direktor der Gewerbeschule. 1870.
115. „ *Karl Ferdinand Steinhaus*, Schiffsarchitekt.
116. 1862. *G. A. Sieveking*, Kaufmann. † 1863.
117. 1864. *Alfred von Hartung*, Leutnant a. D., auch auswärtiges Mitglied. 1888.
118. „ *Heinr. Aug. Ludw. Stück*, Vorsteher des Vermessungsbureaus. 1882.
119. 1865. *H. L. D. F. Gravenhorst*, Geometer, auch auswärtiges Mitglied. 1880.
120. „ *Heinrich Wilhelm Meyn*, wird 1870 auswärtiges Mitglied.
121. 1867. *Herm. Amandus Wagner*, Dr. phil., Oberlehrer.
122. 1868. *Th. J. M. C. Jess*, Maschineningenieur, auch auswärtiges Mitglied. 1880.
123. 1869. *Wilhelm Lazarus*, Assekuradeur.
124. 1873. *Wilh. Bahnson*, Dr. phil., Professor.
125. „ *Karl F. Kerner*, sp. Hafenbau-Direktor, auch auswärtiges Mitglied. 1880.
126. „ *Joh. Friedr. Bubendey*, Wasserbau-Inspektor.
127. 1876. *G. Neumayer*, Dr. phil., Professor, Wirkl. Admiralitätsrat, Direktor der Seewarte.
128. „ *Theod. Knoblich*, Chronometermacher.
129. „ *Karl Koldewey*, Abteilungs-Vorsteher der Seewarte.
130. „ *Herm. Schubert*, Dr. phil., Professor.

131. 1876. *Theod. Sinram*, Lehrer der Mathematik.
132. „ *Karl Johann Kiefsling*, Dr. phil., Professor.
133. „ *Friedr. Schader*, Dr. phil., Professor.
134. „ *Hermann Ahlborn*, Oberlehrer.
135. 1877. *Hugo Krüfs*, Dr. phil., Optiker.
136. „ *A. Timm*, Schiffsbau-Ingenieur.
137. „ *Alfred Köpcke*, Dr. phil., Oberlehrer.
138. „ *Edmund Hoppe*, Dr. phil., Oberlehrer.
139. „ *A. Richter*, Dr. phil., Oberlehrer. 1884.
140. 1878. *C. Hildenbrandt*, Ingenieur.
141. „ *A. Sprung*, Dr. phil., wird 1878 auswärtiges Mitglied.
142. „ *Joh. Wilh. Bock*, Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
143. „ *Herm. Eylert*, Beamter der Seewarte.
144. „ *Otto Böddicker*, Dr. phil., Observator, wird 1880 auswärtiges Mitglied.
145. „ *Karl Wilh. Otto Schrader*, Dr. phil., auch auswärtiges Mitglied, zuletzt seit 1888.
146. 1879. *Egbert Hoff*, Lehrer der Mathematik. 1884.
147. 1880. *Franz Fischer*, Versicherungs-Techniker.
148. „ *Paul Reinmüller*, Direktor der Realschule der reformierten Gemeinde.
149. „ *F. A. L. Ambronn*, Dr. phil., wird 1888 auswärtiges Mitglied.
150. 1881. *Paul Järisch*, Dr. phil., Gymnasiallehrer.
151. „ *W. Köppen*, Dr. phil., Professor, Abteilungs-Vorstand der Seewarte. 1883.
152. „ *C. Freund*, Dr. phil., wird 1882 auswärtiges Mitglied.
153. „ *Emil Liebenthal*, Dr. phil.
154. 1882. *J. H. Kühl*, Lehrer der Mathematik an der Gewerbeschule.
155. „ *Joh. Heinrich Sieveking*, Beamter der Seewarte.
156. 1883. *Hans Battermann*, Dr. phil., Beamter der Seewarte. 1883.
157. „ *Karl Schulze*, Lehrer der Mathematik.
158. „ *F. Dencker*, Chronometermacher.
159. 1884. *Joh. Keferstein*, Dr. phil., Oberlehrer.
160. 1885. *O. Mügge*, Dr. phil., wird 1887 auswärtiges Mitglied.
161. „ *Aug. Voller*, Dr. phil., Direktor des Physikalischen Staatslaboratoriums.
162. „ *Rudolph Böger*, Dr. phil., Oberlehrer.
163. „ *E. Grimsehl*, Dr. phil., Realgymnasiallehrer.
164. „ *F. Boltc*, Dr. phil., Lehrer der Navigationsschule.
165. „ *A. W. Luther*, Dr. phil., Observator der Sternwarte.
166. 1886. *Max Möller*, Regierungsbaumeister. 1887.
167. „ *Theod. Koldewey* II., wird 1888 auswärtiges Mitglied.
168. „ *Paul Fehrmann*, Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
169. „ *S. Goldschmidt*, Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
170. „ *Ferd. Groscurth*, Dr. phil., Lehrer der Mathematik.

171. 1887. *Hugo Öltjen*, Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
172. „ *Otto Schlick*, Schiffsbauingenieur.
173. 1888. *Bernhard Schäffer*, Ingenieur.
174. „ *Max Schäffer*, Dr. jur., Ingenieur.
175. „ *Felix Bohnert*, Dr. phil., Gymnasiallehrer.
176. „ *J. A. Repsold*, Dr. phil., Mechaniker.
177. „ *Edmund Busche*, Dr. phil., Lehrer der Mathematik.
178. „ *C. Eichler*, Dr. phil., Oberlehrer, war seit 1878 auswärtiges Mitglied.
179. 1889. *H. Schröder*, Dr. phil., Realgymnasiallehrer.
180. „ *Ernst Glinzer*, Dr. phil., Lehrer der Mathematik an der Gewerbeschule.
181. „ *Mahlcke*, Realgymnasiallehrer.
182. „ *F. Bauch*, Lehrer der Mathematik.

III. Auswärtige Mitglieder.

1. 1690. *Paul Halcke* [der Haltende], Schreib- und Rechenmeister in Buxtehude. † 1731.
2. „ *Joh. Balthasar Remer* [der Reichende], Buchhalter in Braunschweig. † 1718.
3. „ *Joh. Halcke* [der Harrende], Schreib- und Rechenmeister in Ütersen. † 1735.
4. „ *Joh. Böckmann* [der Blühende], Buchhalter in Celle. † 1712.
5. „ *Hans Grimm* [der Gründende], Schreib- und Rechenmeister in Gothenburg. † 1692.
6. „ *Peter Tiedemann* [der Tragende], Schreib- und Rechenmeister in Lübeck. † 1748.
7. „ *Hinrich Cords* [der Continuierende], Lehrer am Waisenhause in Lübeck. † 1707.
8. „ *Cord Danxst* [der Denkende], Buchhalter zu Kopenhagen. † 1717.
9. „ *Ludw. Joh. Rust* [der Rüstende], Buchbinder zu Celle. † 1719.
10. 1691. *Andr. Georg Schütze* [der Schützende], Schreib- und Rechenmeister in Stockholm. † 1718.
11. „ *Joh. Henning Böhlke* [der Bringende], Buchhalter in Goslar. † 1708.
12. „ *Henrich Hönemann* [der Höhende], Schreib- und Rechenmeister in Klausthal. † 1708.
13. *1695. Dietrich Beyenburg* [der Bessernde], Schullehrer in Aalborg, Jütland. † 1734.
14. *1698. Wilhelm Benedict* [der Bahnende], Schreib- und Rechenmeister in Breslau. † 1705.
15. *1700. Joh. Leonh. Grafe* [der Geflissene], Schreib- und Rechenmeister zu Nürnberg. † 1729.

16. *1700.* *Joh. Georg Meckenhäuser* [der Märkende], Schullehrer zu Quedlinburg. † 1727.
17. „ *Christian Partite* [der Prüfende], Buchhalter in Lübeck, † 1729.
18. „ *Joh. Göttsche* [der Gönnende], Schreib- und Rechenmeister in Itzehoe. † 1731.
19. „ *Joachim Mich. Brandt* [der Bauende], Schreib- und Rechenmeister in Flensburg. † 1740.
20. *1711.* *Georg Refsler* [der Reizende], Schreib- und Rechenmeister in Breslau. † 1738.
21. „ *Adam Friedr. Müller* [der Mässende], Notar in Thüringen. † 1718.
22. „ *Gottfried Faber* [der Folgende], Buchhalter in Breslau. † 1729.
23. „ *Georg Heinr. Paricius* [der Praktizierende], Schreib- und Rechenmeister zu Regensburg. † 1725.
24. „ *Georg Ruhmbaum* [der Ratende], Schreib- und Rechenmeister in Breslau. † 1735.
25. „ *Joh. Herm. Westercamp* [der Wachende], Schreib- und Rechenmeister zu Osnabrück. † 1747.
26. „ *Nikolaus Rohlaffs* [der Ringende], Schreib- und Rechenmeister in Buxtehude. † 1751.
27. „ *Joh. Andresen* [der Arbeitende], Schreib- und Rechenmeister zu Horst in Holstein. † 1751.
28. „ *Joh. Christian Ferber jr.* [der Findende], Schreib- und Rechenmeister in Husum. † 1719.
29. *1721.* *Karsten Dose* [der Dienende], Schreib- und Rechenmeister in Crempe. † 1737.
30. „ *Joh. Nikolaus Lampe* [der Leuchtende], Schreib- und Rechenmeister in Lübeck. † 1754.
31. *1722.* *Sweder Harmsen* [der Hurtige], Schreib- und Rechenmeister in Lübeck. † 1778.
32. „ *Samuel Günther* [der Geltende], Schreib- und Rechenmeister in Embden. † 1742.
33. *1727.* *Joh. Karl Paricius* [der Probierende], Pädagogus in Regensburg. † 1760.
34. „ *Christian Stephan Remer* [der Rennende], Schreib- und Rechenmeister in Braunschweig. † 1745.
35. „ *Peter Lorentzen* [der Liebende], Schreib- und Rechenmeister in Tondern. † 1773.
36. „ *Joh. Daniel Böhlcken* [der Bewahrende], Buchhalter zu Torga. † 1771.
37. „ *Melchior Kohlmann* [der Könnende], Schreib- und Rechenmeister in Bremen. † 1737.
38. *1729.* *Joh. Bernhard Held* [der Heischende], Organist in Saltzupfeln. † 1747.
39. „ *Lüder Wehrmann* [der Wachsende], Schreib- und Rechenmeister in Bremen. † 1739.

40. *1729.* *Herm. Reimer* [der Rühmende], Schreib- und Rechenmeister in Bremen. † 1761.
41. „ *Albert Ahrent* [der Acceptierende], Schreib- und Rechenmeister im Amte Ritzebüttel. † 1750.
42. „ *Joh. Nikolaus Steding* [der Sammlende], Schreib- und Rechenmeister zu Stadthagen. † 1754.
43. 1734. *Adolf Friedrich Marci* [der Meritierende], Schreib- und Rechenmeister in Holland. † 1774.
44. 1737. *Joh. Daniel Intelmann* [der Inclinierende], Notar in Reval. † 1760.
45. „ *Christian Kruse* [der Kunstliebende], Schreib- und Rechenmeister in Amsterdam. † 1781.
46. *1743.* *Joh. Christian Poussette* [der Preisende], Schreiber in Lüneburg. † 1752.
47. „ *August Ernst Broyer* [der Bereitende], Schreib- und Rechenmeister in Dithmarschen. † 1756.
48. 1748. *Joh. Kaspar von Hoyer* [der Habende], Gubernialrat in Prag. † 1774.
49. „ *Anton von Friederich* [der Fruchtbringende], Buchhalter bei der Rektifikations-Kanzlei in Prag. † 1772.
50. 1749. *Hans Sievers* [der Siegende], Schreib- und Rechenmeister in Rendsburg. † 1760.
51. „ *Hinrich Goſs* [der Gebende], Kaufmann in Balje. † 1789.
52. 1750. *Jürgen Schröder* [der Sinnende], Kirchen- und Schulbedienter zu Wewelsfleth. † 1761.
53. 1751. *Karsten Schrumm* [der Spürende], Schreib- und Rechenmeister in Rendsburg. † 1794.
54. 1752. *Joseph Crummel* [der Critisierende], Banquier in Aachen. *1790.*
55. 1754. *Joh. Heinrich Hoecker* [der Habilitierende], Rektor in Herford. *1782.*
56. 1755. *Pater Simon Baum* [der Brechende], Professor im Kloster Marienforth bei Bonn. † 1786.
57. 1759. *Peter Nikolaus Svensen* [der Spekulierende], Schreib- und Rechenmeister in Husum. † 1805.
58. *1763.* *Joh. Erich Plate* [der Prangende], Schulmeister zu Sottrum. † 1779.
59. 1764. *Arost Hansen* [der Anhaltende], Lehrer zu Övenum auf Föhr. † 1803.
60. 1766. *Baltzer Berner* [der Beurteilende], Schreib- und Rechenmeister in Ritzebüttel. † 1783.
61. „ *Jakob Oostwoud* [der Occupierende], Leermeester in de Wiskonst tot Ostzaandam. † 1784.
62. 1769. *Hans Rübcke* [der Remarquierende], Schreib- und Rechenmeister in Moorburg. † 1800.
63. 1770. *Albert Vryer* [der Vigilierende], Pfarrer zu Wormerveer aan de Zaan. † 1800.
64. 1773. *Joh. Töpken* [der Temperierende], Oberlotse in Oldenburg. † 1790.

65. 1773. *Friedrich Kloppenburg* [der Konsiderierende], Liebhaber der Mathematik in Oldenburg. † 1776.
66. 1775. *Arnoldus Bastian Strabbe* [der Stabilierende], Leermeester te Amsterdam. † 1805.
67. 1776. *Marten Jellen Zuydhoff* [der Instruierende], Schulmeister in Ostfriesland. *1800.*
68. 1777. *Joh. Wilhelm von Stein* [der Strahlende], Lehrer in Dortmund. † 1811.
69. 1779. *Garrelt Jacobs Boumann* [der Bekrönende], Organist in Ostfriesland. † 1808.
70. „ *Jean Correch* [der Combinierende], Liebhaber der mathematischen Wissenschaft in Amsterdam. *1794.*
71. 1780. *Hermanns Rakers* [der Reflectierende], Leermeester te Amsterdam. *1794.*
72. „ *Gerrit von der Weyde* [der Wohlgesinnte], Liebhaber der mathematischen Wissenschaften im Haag. *1801.*
73. „ *Pieter Hegnis* [der Hülfreiche], Schoolmeester in Haarlem. † 1784.
74. 1781. *Jan Bolten* [de Bevruchtende], Architekt in Amsterdam. *1794.*
75. „ *Cornelis Brewil* [de Baatende], Schoolmeester in Nordholland. *1794.*
76. 1782. *Andreas Grüning* [der Grünende], Lehrer in Altona. *1791.*
77. 1784. *Broder Bahnsen* [der Bemühende], Assistent in Kopenhagen, † 1807.
78. 1786. *Joh. Peter Marchant* [der Marquierende], Kostschoolhouder te Bodegraven. *1794.*
79. „ *Joh. Isaak Berghaus* [der Beneficierende], Informator zu Cleve. *1794.*
80. „ *Johannes te Veltrup* [der Venerierende], Leermeester te Haarlem. † 1800.
81. „ *Gerrit Schut* [de Schynende], Schoolmeester te Sloterdyk. *1794.*
82. „ *Adr. Alblafs* [de Afmeetende], Schryf und Rekenmeester te Purmerende. *1794.*
83. 1787. *Konrad Werle* [de Welvaarende], Kostschoolhouder te Amsterdam. *1794.*
84. 1788. *Joh. Wilh. Klier* [der Kunstkennende], Kaufmann in Barmen. † 1822.
85. „ *Joh. Friedr. Johannsen* [der Intentierende], Schullehrer im Amt Gottorf. † 1829.
86. 1789. *Joh. Wilh. vom Stein jr.,* Schreib- und Rechenmeister zu Gemarke im Herzogtum Bergen. *1826.*
87. 1790. *Hinrich Wilh. Schröder,* Administrator zu Fedderwarden. † 1797.
88. 1791. *Gerrit Beeldemaker,* Liebhaber der Mathematik in Amsterdam. *1794.*
89. 1792. *Holste,* Lehrer in Stade. *1807.*

annes van der Pardt, Liebhaber der Mathematik in Amsterdam.

rik Gehle, Liebhaber der Mathematik in Amsterdam. *1794.*
... Ferd. Hoymann, Antwerpen. *1794.*
. Diedrich Uhlhorn, Mechanikus in Grevenbroich bei Düsseldorf. † 1837.
. Daniel Schürmann senr., Schullehrer zu Remscheid. *1836.*
„ *Daniel Schürmann jr.,* Hilfslehrer zu Remscheid. *1846.*
„ *R. Tobiesen,* Dr. phil., Direktor der Navigationsschule zu Danzig. † 1839.
97. 1817. *N. E. Egen,* Pfarrschullehrer zu Kronenberg bei Elberfeld. *1857.*
98. „ *J. P. Faſsbender,* Schullehrer zu Burg im Bergischen. *1837.*
99. „ *A. O. Meyer,* Rechenmeister zu Heide in Holstein. † 1817
100. 1819. *J. H. T. Haase,* Lehrer in Lübeck. *1860.*
101. „ *J. E. E. Nürnberger,* Dr. phil., Postmeister zu Sorau, wird 1847 Ehrenmitglied.
102. 1823. *K. F. T. Härtell,* Oberlehrer in Marienwärder. † vor *1869.*
103. 1828. *J. A. Hühn,* Wasserbau-Kondukteur in Cuxhaven. † 1831.
104. 1829. *Peter Christ. Biel,* Lehrer der Mathematik zu Schleswig. *1860.*
105. 1845. *G. A. Jahn,* Dr. phil., Privatdocent in Leipzig. † 1856.
106. 1846. *Warnstorff,* Dr. phil., Schulvorsteher in Harburg. 1850.
107. „ *Herm. Karsten,* Dr. phil., Professor in Rostock. † 1877.
108. 1847. *D. B. Römer,* Major in Oldenburg. † *1853.*
109. „ *J. H. Blohm,* Wasserbau-Inspektor in Harburg. † 1858.
110. 1857. *Reinhold Kerner,* Wasserbau Inspektor in Cuxhaven.. † 1858.
111. „ *E. Thiel,* Navigationslehrer in Lübeck. 1880.
112. 1858. *Moritz Krille,* Chronometermacher in Altona. † 1862.
113. „ *Karl Ferd. Pape,* Observator in Altona. † 1862.
114. 1861. *L. F. Ofterdinger,* Dr. phil., Professor in Ulm.
115. 1864. *Hugo Lentz,* Wasserbau-Inspektor in Cuxhaven.
116. 1868. *Max von Hartung,* Strafanstalts-Direktor in Berlin.
117. 1869. *Karl Friedr. Wilh. Peters,* Dr. phil., Direktor der Sternwarte in Königsberg.
118. 1870. *Heinrich Wilh. Meyn,* Direktor der Karlshütte in Rendsburg.
119. 1878. *Herm. Raydt,* Dr. phil., Oberlehrer in Ratzeburg. 1885.
120. 1880. *Otto Böddicker,* Dr. phil., Astronom in Parsonstown in Irland.
121. 1882. *C. Freund,* Dr. phil., Gymnasiallehrer in Lübeck. 1888.
122. „ Königliche Bibliothek in Berlin.
123. 1886. *A. Sprung,* Dr. phil., Sektionschef im Meteorol. Institut in Berlin.
124. 1887. *O. Mügge,* Dr. phil., Professor in Münster i. W.
125. 1888. *F. A. L. Ambronn,* Dr. phil., Assistent an der Sternwarte in Göttingen.
126. „ *Theod. Koldewey II,* Reg.-Bauführer in Berlin.
127. 1889. *Karl Wilh. Otto Schrader,* Dr. phil., Reichsprüfungs-Inspektor in Berlin.

Leges

Welche die Kunſt-Rechnungs-liebende Societät unter ſich unverbrüchlich zu halten beliebet.

1.

Es wird keiner in dieſe Societät ein- oder an-genommen / der nicht zum allerwenigſten Cossam quadratam & cubicam verſtehe / dabey aber auch die vornehmſten und nöhtigſten Fundamenta Euclidéa, nebſt ſattem Verſtande numerorum irrationalium & binomiorum &c: (ohn welcher gründliche Wiſſenſchafft keiner ein guter Rechner oder Mäß-Künſtler ſeyn kann) wohl gefaſſet habe: Dahero es auch bey der erſten Angeb- oder Anmeld-ung allerdings gebühren will / daß ein jeder beſonders ſeine Probe von einer Algebraiſchen / Geometriſchen und Polygonatiſchen Aufgabe / (die irrational oder binomiſche Facitte habe /) einſende: Und wer alſo ſein erfodertes Specimen eingeſandt / deme ſoll nicht zu wieder fallen / daß man ihm nochmahls zur Solution proponire eine ſolche Probe, die mit ſeinem eingereichten Specimine in gleichem Gradu ſtehe. Doch lebet man anbey der Zuverſicht / es werde ein jeder antretender hierin ſein Gewiſſen betrachten / und ſich keiner frembden Arbeit bedienen / damit man wiedrigen falls / da man nachmahls ſolches erfahren ſollte / ihn nicht mit Schimpf abweiſen möge.

2.

Ein jeder ſoll ſich vorher wohlbedächtlich erklären / und verſprechen / daß er nach allen Vermögen und Kräfften / (ſo viel ihm nemlich ſeine andere obliegende Affaires nur immer vergönnen wollen) die Kunſt möglichſt fort zu pflantzen ſich äuſſerſt wolle angelegen ſeyn laſſen: Welches dann nicht unfueglich geſchehen könnte / wann einige Glieder / ſo am näheſten beyſammen wohnen / ſich unter einander aufmunterten / bey vorfallenden etwan ledigen Stunden zuſammen kämen / unter ſich ein und andere Frage erörterten / und / wann einigen etwas mangelte / hierüber von andern beſſerwiſſenden ſich Rahts erhohleten / und alles wol annehmen; dann die Nachläßige und Laß-Dünkel dienen nicht hieher.

3.

Jeder Zunfft-Genoß ſoll nechſt dem / daß er ſich ſeiner redlichen Geburt zu erfreuen habe / einen Gottsfürchtigen / tugendhafften und ehrbaren Wandel führen / wie zumahl beſonders einem Chriſten / ſo dann einem rechtſchaffenen Kunſt-erfahrnen und redlichen Informanten geziemet: im Betracht / daß die meiſten unter uns vielen Kindern / ſelbige nicht allein in guten Künſten und Wisſenſchafften zu unterweiſen / ſondern vornehmlich auf alle mögliche Art und Weiſe zum Himmelreich zu erbauen / vorgeſetzt ſind; alle Kunſt aber ohne Gottesfurcht und Tugend wie ein Schwerd iſt in der Hand eines Unſinnigen / ein ſolcher auch dieſer Societät mehr Spott als Lob verurſachen würde.

4.

Was jeder ſelbſt erfindet / oder bißher- ungeſolvirtes außarbeitet / ſoll er der Societät mit dem termino oder dato, wann ſolches absolviret, anzeigen / damit / wann eine Arbeit einmahl von einem verrichtet / ſelbige von einem andern nicht nochmahls vergeblich vorgenommen werde / wie ſonſten woll ehermahls geſchehen. Wann aber ein ſchweres Werk zu solviren verhanden / könnten etliche zugleich Hand anlegen / und deſto leichter damit fortkommen / dann / in ſolchen Fällen kann die Societät / mit Gottes Hülffe / ein groſſes abgeben. Wobey die Jahr-Verwaltere oder Alten verſprechen / daß ſie allemahl / wann bey der Societät was neues zum Druck kommt / des ein- oder anderen Erfindung dabey notificiren wollen / damit auch andere den usum fructum ſolcher Societät erfahren / und etwa ein Verläger ſo viel bequemer des Authoris Schrifft zu ſeinem Verlag an ſich bringen könne.

5.

Ehren- und Wollſtändigkeit-halber iſt beliebet / daß / wer unter der Societät etwas von Arithmetiſchen / Algebraiſchen und andern Mathematiſchen Rechens-Werken zu ſchreiben oder zu publiciren willens / derſelbe ſeine eigene / und nicht ſolche Sachen zu Tage geben ſoll / welche auß andern Büchern nur abgeſchrieben / oder deren Solutiones, ſo denſelben beygefüget / er nicht verbeſſern kann: Aber unerklärte Sachen zu erklären / aufzulöſen / oder die übelgeſtellete Solutiones zu verbeſſern / iſt erlaub- und rühm-lich. Dahero hierbey außdrücklich verabredet / daß / wer unter ſeinem Zunfft-Namen etwas will unter die Preſſe kommen laſſen / derſelbe die Censur der Societät hierüber einhohlen ſolle / damit in keinem Druck etwas ungereimtes committiret werden möge.

6.

Weil alhier in Hamburg dieſe Kunſt-Rechnungs-liebende Societät den Anfang genommen / und zumahl die von hier und andern Oertern eingelieferte Proben / ſammt einem Memorial- oder Verzeichniß-Buch / wie auch einige zu Behuef dieſer Societät anfangs erforderte / und von denen Zunfft-Verwandten / bey ihrem Antritt dargeſchoſſene und ſonſten jährlichs behufige Zulags-Gelder / verwahrlich aufbehalten werden müſſen / (welches dann eine ordentliche Verwaltung nohtwendig erheiſchet): Als iſt beliebet worden / daß unter denen / die alhier in loco ſind / (angeſehen die bey der Genoſſenſchafft verwahrlich beigelegte Proben / Bücher / und was ſonſten dieſelbe von Zeit zu Zeit nohtwendig wird aufheben müſſen / ohne die äuſſerſte Noht nicht peregriniren können.) zweene Verwaltere oder Vorſtehere ſammt einem Adjuncto jährlich erwehlet werden / welcher Adjunctus allemahl übers Jahr / da einer von den Vorſtehern abtritt / deſſen Vacantz wieder erſetzen / und zugleich ein ander Adjunctus antreten / auch ſolcher Geſtalt nachmahls in ordentlicher Abwechſelung / von Jahr zu Jahr verfahren werden ſoll.

7.

Und / da gegen alles Vermuhten künfftighin durch des Todes Raub die Anzahl hieſiger Zunfft-Verwandten dermaſſen mögte verringert / oder auch einige von denenſelben etwan anderwertigen Vocationen, wegen hieſigen Orts Unachtbarkeit gegen gute Künſte / folgen / und demnach alhier von allen nur einige eintzige Perſon mehr übrig bleiben ſollte / und alſo ſolchen Falls weder ein neuer Vorſteher succediren, noch ein Adjunctus erwählet werden könnte: So ſoll alsdann auf Zuſtimmung der meiſten Zunfft-Verwandten / (denen allen der Zeit dieſer Zuſtand entdekket / und deren Vota darüber eingehohlet werden müſten /) eine oder zwo Perſonen auß dem zunegſt-angelegenen Orte oder Ortern dazu erwählet / und ihnen die Mitverwaltung dieſer Societät anvertrauet werden. Da aber alle hieſige Zunfft-Genoſſen abgehen ſollten / werden alsdann die anderer Orten nachbleibende auf ſothane Mittel bedacht ſeyn / wie ſo dann dieſe Societät beſter Maſſen zur Ehre Gottes und Dienſt des Nechſten beybehalten / und auf die Poſterität fortgeſetzet werden möge.

8.

Weil obbemeldte Jahr-Verwaltere wegen der Correſpondentz mit Außwärtigen entweder noch erwartenden oder ſchon eingetretenen Mit-Gliedern / nicht allein dann und wann ziemliche Mühe tragen / ſondern auch wegen Briefe-Ports / und was ſonſten vorfallen mögte / einige Unkoſten werden verwenden müſſen: Als wird hiermit beliebet / daß /

wie sie / (was die Mühe betrifft /) alles gerne auf sich nehmen / also dabey doch nicht verpflichtet seyn sollen / die zum Behuef / Befoder= und Erhalt=ung der Societät ohnumbgänglich erforderte Unkosten von ihrem eigenen zu tragen / besondern solche von dem Ducaten / den jedes Mit=glied bey seinem Antritt / in hiesiger vollgütigen Valuta oder guten Corrent=Gelde / nachmahls ebenfals jedes Jahr einen Rthlr. beyzutragen belieben wird / zu erheben / solche aber zu der Societät allmahligen Nachricht specificè in ein besonders hierzu beygelegtes Buch zu ver=zeichnen / und bey ihrem Abtritt cum reliquis denen Successoren einzureichen.

9.

Wer unter seinem Zunfft=Namen etwas publiciret, soll aber der alsdann befindlichen Societäts Glieder Namen / nach der Zeit ihres Eintritts / (massen hier allerdings kein Rang oder Praecedentz, son=dern nur eine Ordnung der Folge attendiret wird / und also so woll der eine sonder Praejuditz seiner Fam / und Verkleinerung seines etwan sonst tragenden Ambts / oder deren vor anderen von GOtt empfangenen grossen Gaben und Geschikklichkeit / folgen / als der andere ohne Ruhm=sucht vorgehen kann /) mit= und bey=drukken lassen / damit man jeder Zeit wissen möge / wie stark die Societät / und was vor Personen / als Mitglieder sich zu derselben bekannt. So will sich auch geziemen / daß der verstorbenen Glieder Namen nach Tode nicht gar weg gelassen / sondern nur mit dem Signo † und denatus Ao..... bemärket werden.

10.

Es ist vor gut angesehen und beliebet / daß / wann bey der Societät etwas zum Druk kommt / davon ein Exemplar zierlich gebunden bey=geleget und verehret werde / umb mit der Zeit eine Anzahl Bücher zu der Societät Aufnahm und Besten zusammlen / zu gleich aber denen Nachkommen zu benachrichtigen / was in der Societät vor Schrifften publicirt: Wie dann auch schon einige Genossen die Arithmetische Schrifften / so Sie vor stabilirung dieser Zunfft außgehen lassen / solcher Gestalt zum Angedenken eingereichet / in gewisser Hoffnung / daß nach=hin andere dergleichen zu thun nicht ungeneigt seyn werden. Würde auch jemand von denen Mit=Gliedern ein oder anders gutes Buch / oder sonsten was nützliches verehren: Item / da ein Liebhaber und Befoderer guter Stifftungen und Künste / (ob er schon sonsten dieser Zunfft nament=lich nicht beygethan /) sich dermassen geneigt bezeigen / und dieselbe mit einem Donativ (es seyn nützliche Bücher / Manuscripta oder Instru=menta) begünstigen wollte / der hat sich dessen gewiß zu versehen / daß er sothane rühmliche Liberalität nicht übel bestätigen / sondern die

Societät allerdings obligiren wird / ihm zu beständigen Nach-Ruhm desfals behörigen und unvergeßlichen Dank abzustatten.

11.

Damit auch dieser Societät gemeiner Nutz sich noch klärer aufthue / so hats denen Stifftern gefallen zu ordnen: Wann einer seines Orts jemanden antreffe / es sey eine erwachsene Person oder sonsten unter denen Schul-Knaben / bevorab / so jemand von denen Societäts Gliedern früh-zeitig mit Tode abginge / und einen hierzu inclinirten und capablen Sohn hinterliesse / (demselben aber die Mittel ermangelten /) daß man denen so woll umb ein leidliches / als nach berührter Beschaffenheit des Zustandes / umbsonst mit gutem Raht und getreuer Unterweisung an die Hand gehen wolle / massen dadurch / ohn allen Zweiffel / Gottes Ehr und vieler Menschen Nutz befordert werden kann / weil doch die Teutschen Schulen mehrentheils mit geringen Leuten bestellet / diese aber durch sothanes Beneficium desto geschikkter dazu können zubereitet werden.

12.

Und weil letztens alle gute Ordnungen durch Praemia & Poenas pflegen erhalten zu werden als wird hierbey außdrükklich verabredet: Wann jemand von denen Mit-Gliedern / wieder Verhoffen / auß dem Geschirr schlagen / sich von GOtt / von der Tugend und Fleiß / abkehren / denen Lastern und Mißiggang aber sich ergeben sollte: Imgleichen / da jemand aus blosser Hallsstarrigkeit / und wiederspänstigem Fried-häßigem Gemüht (da alles allein nach seinem Kopf gehen soll /) wieder die gnug- und reiflich, gepflogene Schlüsse der Societät / verdrießlich und unverständig zu arguiren, und immer Zank zu erregen trachtet: Dieses oder jenes Mit-Glied / (das gleichwoll beym Antritt seine unverwerffliche Proben bey der Societät abgeleget hat) schmählich verachtet und verkleinert / darumb / daß er seiner Phantasie nach / sich in den Künsten lange nicht so hoch / als er / verstiegen etc. So soll derselbe / nach gnugsamer Uberzeugung / auf ein- oder zwey-mahliger Verwarn- und nicht erfolgten Besser-ung / seines so übeln und liederlichen Verhaltnis halber / zur Straffe / auß dieser löblichen Societät gestossen / und dessen Name auß dem nechsten folgenden Drukk gelassen werden. Und wann also Jemand durch seine eigne und überführte Schuld außgesetzet worden / soll niemand der übrigen Glieder Macht haben mit demselben einige Correspondentz oder Conferentz, wegen der Societät gepflogener Schlüsse / zu haben / viel weniger deren Handlungen und Angelegenheiten zu übertragen / bey Straffe offentlicher Beschimpfung / oder aber / nach Befindung / gleichmäßiger Außstossung:

Massen man desfals Niemands schonen oder Person ansehen wird/ dann es heisset:

Qui parcit malis, nocet bonis.

Kann also / nach dem vorstehenden 9ten Punct der Tod selber so kräfftig nicht seyn / ein Mit-Glied dieser Societät gar auszustossen / als doch woll das übele Verhalten eines Zankſüchtigen Gliedes zu thun vermag.

13.

Dieses sind also die vors erste beliebte Leges, welche die Societät/ nach Vorfall der Umbständen / zu mehren / zu vermindern / auch woll gar zu verändern / sich hiermit vorbehält. Wer nun hierauf mit einzutreten / und das seinige zur Ehre Gottes / und gemeinem Nutze / möglichst zu contribuiren gesonnen / ungeachtet er in einer gewissen Schul-Bestallung lebet / ob er ein Informator in Arithm: seye / oder ob er sonsten sothane herrliche Wissenschaft zur Recreation treibe und darinn excellire, ob er hier oder anders wo wohne / allermassen solches an den vorhin specificirten Membris Societatis sich eräuget/ der kann sich allemahl bey denen p. t. jährlichen Alten oder Vorstehern zu Hamburg anmelden/ da ihnen dann mit mehrern verlangte Nachricht ertheilet werden kann.

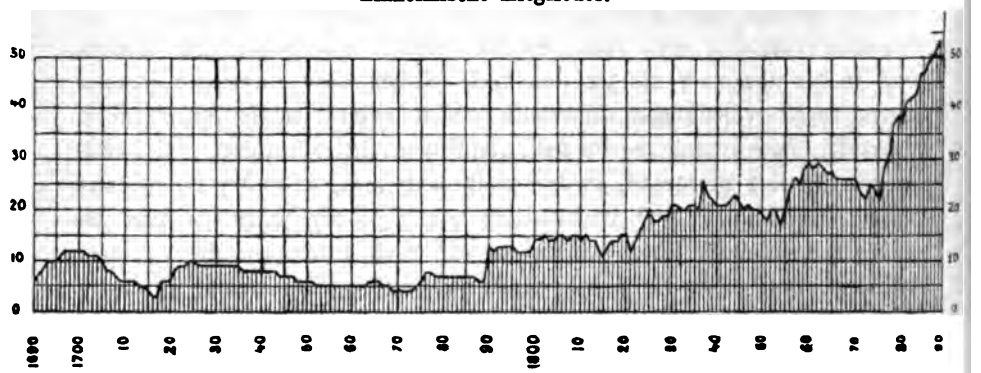
Privileg vom Jahre 1699.

Wür Leopoldus von gottes genaden erwöhlter römiſcher Kayßer, zu allen zeiten mehrer des reichs in Germanien, zu Hungarn, Böheimb, Dalmatien, Cratten und Schlavonien & könig, ertzhertzog zu Burgund und Öſterreich, Steyr, Kärndten, Crain und Wirtemberg, graff zu Tyroll & & Bekennen öffentlich mit diſſem brief und thuen kundt allermänniglich, daß uns unſere und des reichs liebe getreue die geſambte kunſt rechnungs übende ſocietet in unſer und des heil. reichs ſtadt Hamburg aller unterthänigſt zu vernemen gegeben, was maßen ſie die hochnöthig- und nutzbare rechen kunſt der geſtalten hoch getrieben, daß dergleichen noch ſchwerlich iemandt zu wegen gebracht habe, und dahero dem gemeinen Weeßen, ſonderlich der lieben jugendt zum beſten ihre ſo wohl bereits verfertigte alß noch ins künftig außarbeitende rechenbücher ohne weiteren aigenen nutz in truckh zu geben entſchloßen ſeien, mit gehorſambſter bitt, auß beyſorg ſothane ihre rechenbücher durch ein oder andere gewinnſichtige ihnen zu ſchaden nachgedruckht werden mögten, wie ihnen darüber nicht allein auf gedachte ihre ſchon wirkhlich verfertigte ſondern auch fürders hin im druck außgehen laßende rechenbücher auf ſechs jahr lang unſer kay. general privilegium impreſſorium, und zwar ſolcher geſtalten, daß ſo wohl die ſchon vorher gedruckte von dato an, als die noch ins künfftig zeit ſolcher ſechs jahren ausgehende rechenbücher vom jahr des ausgehenden trucys an zu rechnen 6 jahr hinaus gelten ſollen, allergnädigſt zu ertheilen geruheten, vermög deßen keiner als ſie in dem heiligen römiſchen reich weder ſothane gedruckte noch künftig außgehende ihre rechenbücher drucken vnd verkauffen laßen ſolle und dörffe: und wir nun gnädiglich angeſechen ſolche der ſamentlichen ſupplicanten ziembliche allerunderthänigſte bitt und alleinig zu beförderung des allgemeinen Weeßens abzüehlendes anlangen, ſo haben wir demnach offt erwehnter kunſt rechnung übender ſocietet die kay. gnad gethann und ihnen beſagtes privilegium impreſſorium generale auff 6 jahr obgedachter maßen allergnädigiſt bewilliget und ertheilet: thuen daß auch hiemit in krafft dieſes brieffs alßo und ſolcher geſtalt, daß ſie ſamentliche ſocietet ihre rechen bücher auf obige weis, ſo lang

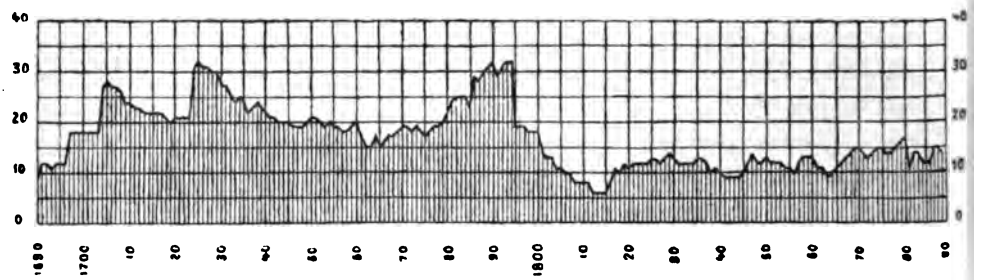
die zeit dießes unſers kay. general privilegii der ſechs jahren nicht exſpirieret, nach eigenen gefallen in offenen druck aufflegen, außgehen, hin und wieder außgeben, feyl haben und verkauffen laßen, auch ihnen ſolche niemand, wer der auch ſeye, ohne ihren conſens und wißen vor ausgang der obbeſtimpten zeit der 6 jahren im heil. römiſchen reich nachdrucken und verkaufen laßen ſolle und möge. und gebieten darauf allen und ieden unſeren und des heil. reichs underthanen und getreuen, in ſonderheit aber allen buechdruckeren, buchführern und buchverckauffern bey pen ſechs marck löthigen golds, die ein ieder, ſo offt er freventlich hierwider thete unß halb in unßer und des reichs camer und den andern halben theil vorgemelter ſocietet zu Hamburg unnachläßig zu bezahlen verfallen ſeyn ſolle, hiemit ernſtlich befelchende und wollen, daß weder ihr noch einiger aus euch ſelbſten oder eurtwegen iemand obengeregte rechenbücher innerhalb denen beſtimbten 6 jahren nachgedrucket, noch irgendswo im heil. römiſchen reich diſtrahiret, feyl habet, umtraget, oder verkauffet, in kein weiß noch weg, alles bey vermeidung unßer kay. ungnad und vorbemelter pen. Jedoch ſollen ſie von all und jeden ſo wohl ſchon gedruckhten alß noch druckenden ihren rechenbücheren von jeden fünff exemplaria zu unßer kay. reichshoffcantzley bey verluſt dießes unßers kay. privilegii einzuſchickhen ſchuldig und verbunden ſeyn. Mit urkundt dießes brieffs beſiglet mit unßern kay. aufgedruckten inſigl; der geben iſt in unßerer ſtadt Wien den fünffzehenden julii anno ſechzehenhundert neun und neuntzig, unßerer reiche des römiſchen im einen, des hungariſchen im fünff und des bohembiſchen im drey und viertzigiſten.

Kurve für die Mitglieder-Anzahlen von 1690 bis 1890.

Einheimische Mitglieder.



Auswärtige Mitglieder.



Inhaltsverzeichnis des ersten Teils.

	Seite
Vorrede	3
Bubendey in Hamburg, Geschichte der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg von 1690 bis 1890	8
Bierens de Haan in Leyden, Materialien für die Geschichte der Mathematischen Gesellschafts-Mitglieder in den Niederlanden	79
Mitglieder-Verzeichnis von 1690 bis 1890	84
Leges von 1690	96
Kaiserliches Privilegium impressorium vom Jahre 1699	102
Kurve für die Mitglieder-Anzahlen von 1690 bis 1890	104

Festschrift,

herausgegeben von der

Mathematischen Gesellschaft

in

Hamburg

anlässlich ihres

200jährigen Jubelfestes 1890.

Zweiter Teil:

Wissenschaftliche Abhandlungen,

zugleich Band II der „Mitteilungen".

Leipzig,

Commissionsverlag von B. G. Teubner.

1890.

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Note zur Störungstheorie.

(Von H. Bruns in Leipzig.)

Die nachstehend mitgeteilte Entwicklung der Störungsformeln für einen kleinen Planeten beruht im Grunde genommen auf demselben Gedanken wie die Hansenschen Formeln, nur dafs hier durchgehends die rechtwinkligen Koordinaten benutzt sind. Der Rechnungsgang ist allerdings etwas länger als bei Hansen, zeichnet sich jedoch dafür durch grofse Einfachheit und Ubersichtlichkeit aus.

Es seien ξ, η, ζ die gestörten heliocentrischen Koordinaten eines kleinen Planeten, dessen Masse gleich Null gesetzt wird, ϱ der Radiusvektor, k die Gaufsische Konstante, dann lassen sich, wenn die Ableitungen nach der Zeit t durch Accente bezeichnet werden, die Bewegungsgleichungen in der Form

$$(1)\qquad \frac{\xi''}{k^2} = -\frac{\xi}{\varrho^3} + \varepsilon X,\quad \frac{\eta''}{k^2} = -\frac{\eta}{\varrho^3} + \varepsilon Y,\quad \frac{\zeta''}{k^2} = -\frac{\zeta}{\varrho^3} + \varepsilon Z$$

schreiben, wo $\varepsilon k^2 X, \ldots$ die Komponenten der störenden Kraft sind. Die Gröfse ε ist ein konstanter „Ordnungsfaktor", der bei der numerischen Rechnung den Wert Eins erhält. Entwickelt man die ξ, η, ζ für die Epoche t_0 nach Potenzen von $t - t_0$ mittelst des Taylorschen Satzes, so werden unter Berücksichtigung der Bewegungsgleichungen die Koefficienten Funktionen von den für t_0 geltenden ξ, η, ζ, ξ', η', ζ' resp. von ε, und sind nach ε ganz rational. Man erhält mit anderen Worten eine gewöhnliche Potenzreihe von $t - t_0$ und ε, welche sicher für jeden beliebigen Wert von ε konvergiert, so lange $t - t_0$ unterhalb einer bestimmten angebbaren Grenze liegt. Wir wollen nun nach ε ordnen und ansetzen

$$(2)\qquad \begin{cases} \xi = x + x_1 \frac{\varepsilon}{1!} + x_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots, \\ \eta = y + y_1 \frac{\varepsilon}{1!} + y_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots, \\ \zeta = z + z_1 \frac{\varepsilon}{1!} + z_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots. \end{cases}$$

Die x, y, z sind offenbar die ungestörten Koordinaten, die x_α, y_α, z_α die Störungen von der Ordnung α. Die $x_\alpha \ldots$ werden erhalten, wenn

man $\xi \ldots$ α-mal nach ε partiell differentiiert und dann ε gleich Null setzt. Die zu dem elliptischen Orte x, y, z gehörenden Elemente osculieren zu der Epoche t_0, während die Störungen x_α, y_α, z_α und ihre ersten Ableitungen nach der Zeit für $t = t_0$ sämtlich verschwinden. Hätte man vor Bildung der Reihen (2) anstatt der für die Zeit t_0 geltenden ξ, η, ζ und ξ', η', ζ' Reihenentwicklungen von der Form

$$\xi_0 + \xi_1 \frac{\varepsilon}{1!} + \xi_2 \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots$$
$$\cdots$$
$$\xi_0' + \xi_1' \frac{\varepsilon}{1!} + \xi_2' \frac{\varepsilon^2}{2!} + \cdots$$

mit irgend wie gewählten konstanten Koefficienten eingeführt, so würden, nachdem wieder alles nach ε geordnet ist, in (2) die Anfangsterme x, y, z einer elliptischen Bahn entsprechen, welche für die Epoche t_0 die Koordinaten ξ_0, η_0, ζ_0 und die Geschwindigkeitskomponenten ξ_0', η_0', ζ_0' giebt, während gleichzeitig die x_α, y_α, z_α und x_α', y_α', z_α' in die ξ_α, η_α, ζ_α resp. ξ_α', η_α', ζ_α' übergehen.

Dies vorausgeschickt wollen wir jetzt die Gleichungen (1) wiederholt partiell nach ε differentiieren und nach der Differentiation ε gleich Null setzen. Der Kürze halber schreiben wir für den Augenblick

$$\frac{1}{\varrho} = \sigma, \quad x^2 + y^2 + z^2 = r^2, \quad \frac{1}{r} = s;$$

ferner sollen die partiellen Ableitungen nach den ξ, η, ζ resp. den x, y, z durch die Indices 1, 2, 3 und deren Wiederholungen bezeichnet werden. Dann ist zunächst

$$\frac{1}{k^2}\xi'' = \sigma_1 + \varepsilon X, \tag{3}$$

$$\begin{cases} \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial \xi}{\partial \varepsilon}\right)'' = \frac{\partial \sigma_1}{\partial \varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial X}{\partial \varepsilon} + X, \\ \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^2 \xi}{\partial \varepsilon^2}\right)'' = \frac{\partial^2 \sigma_1}{\partial \varepsilon^2} + \varepsilon \frac{\partial^2 X}{\partial \varepsilon^2} + 2\frac{\partial X}{\partial \varepsilon}, \\ \frac{1}{k^2}\left(\frac{\partial^3 \xi}{\partial \varepsilon^3}\right)'' = \frac{\partial^3 \sigma_1}{\partial \varepsilon^3} + \varepsilon \frac{\partial^3 X}{\partial \varepsilon^3} + 3\frac{\partial^2 X}{\partial \varepsilon^2}. \\ \cdots\cdots \end{cases} \tag{4}$$

Läfst man jetzt nach Ausführung der Differentiationen ε verschwinden, so erhält man aus (4) Gleichungen von der Form

$$\frac{1}{k^2}x_\alpha'' = s_{11}x_\alpha + s_{12}y_\alpha + s_{13}z_\alpha + U_\alpha,$$
$$\frac{1}{k^2}y_\alpha'' = s_{21}x_\alpha + s_{22}y_\alpha + s_{23}z_\alpha + V_\alpha,$$
$$\frac{1}{k^2}z_\alpha'' = s_{31}x_\alpha + s_{32}y_\alpha + s_{33}z_\alpha + W_\alpha,$$

wo die U, V, W sich aus den partiellen Ableitungen der X, Y, Z, s und aus den x_α, y_α, z_α zusammensetzen. Bedeutet (X) den Wert, in welchen X übergeht, wenn man für die ξ, η, ζ die x, y, z schreibt, so wird im Besondern

$$U_1 = (X),$$

$$U_2 = \frac{\partial}{\partial x}(s_{11}x_1^2 + 2s_{12}x_1y_1 + \cdots) + 2\{(X)_1x_1 + (X)_2y_1 + (X)_3z_1\},$$

$$\begin{aligned} U_3 = {} & 3\frac{\partial}{\partial x}\{s_{11}x_1x_2 + s_{12}(x_1y_2 + x_2y_1) + \cdots\} \\ & + \frac{\partial}{\partial x}\{s_{111}x_1^3 + 3s_{112}x_1^2y_1 + \cdots \quad\} \\ & + 3\{(X)_{11}x_1^2 + 2(X)_{12}x_1y + \cdots \quad\} \\ & + 3\{(X_1)x_2 + (X)_2y_2 + (X)_3z_2 \quad\}, \end{aligned}$$

u. s. w.

Diese Ausdrücke lassen sich für die Rechnung noch zusammenziehen; ich gehe jedoch darauf nicht ein, da es hier nur darauf ankommt, das Wesen der Methode auseinanderzusetzen. Berücksichtigt man die Relationen

$$s_1 = -\frac{x}{r^3}, \text{ etc.},$$

$$s_{11} = -\frac{1}{r^3} + \frac{3xx}{r^5}, \quad s_{12} + \frac{3xy}{r^5}, \text{ etc.},$$

so kommt die Lösung der Aufgabe darauf hinaus, wiederholt ein lineares System von der Form

$$(5) \qquad \begin{cases} \frac{1}{k^2}u'' = -\frac{u}{r^3} + \frac{3x}{r^5}(ux + vy + wz) + U, \\ \frac{1}{k^2}v'' = -\frac{v}{r^3} + \frac{3y}{r^5}(ux + vy + wz) + V, \\ \frac{1}{k^2}w'' = -\frac{w}{r^3} + \frac{3z}{r^5}(ux + vy + wz) + W, \end{cases}$$

zu integrieren, in welchem die U, V, W als bekannt anzusehen sind und die zu den Bestandteilen u, v, w der Störungen gehörigen Bestandteile der störenden Kraft bedeuten, während die x, y, z dem elliptischen Orte angehören, welcher mit irgend einem bestimmten Elementensystem gerechnet ist. Zur Integration führen wir jetzt die neuen Variabeln P, Q, R, T ein und setzen an

$$u = P - \tfrac{1}{2}xT' + x'T,$$

$$v = Q - \tfrac{1}{2}yT' + y'T,$$

$$w = R - \tfrac{1}{2}zT' + z'T,$$

wo offenbar eine der Gröfsen, z. B. T, ganz beliebig gewählt werden darf. Es ist nun wegen

$$x'' = -\frac{k^2 x}{r^3}, \text{ etc.}$$

$$u' = P' - x\left(\tfrac{1}{2}T'' + \frac{k^2}{r^3}T\right) + \tfrac{1}{2}x'T',$$

$$u'' = P'' - x\left(\tfrac{1}{2}T''' + \frac{3k^2}{2r^3}T' - \frac{3k^2 r'}{r^4}T\right) - x' \cdot \frac{k^2}{r^3}T.$$

Die Substitution in die Gleichungen (5) liefert nach einigen Reduktionen

$$0 = P'' + \frac{k^2}{r^3}P - k^2 U - x\left\{\tfrac{1}{2}T''' + \frac{k^2}{2r^3}T' + \frac{3k^2}{r^5}(xP + yQ + zR)\right\},$$

.....

Bestimmt man also jetzt T aus der Bedingung

$$T''' + \frac{k^2}{r^3}T' = -\frac{6k^2}{r^5}(xP + yQ + zR),$$

so erhält man für die P, Q, R die Gleichungen

$$(6) \qquad \begin{cases} P'' + \frac{k^2}{r^3}P = k^2 U, \\ Q'' + \frac{k^2}{r^3}Q = k^2 V, \\ R'' + \frac{k^2}{r^3}R = k^2 W. \end{cases}$$

Der Gang der Rechnung ist also folgender: aus den Gleichungen (6) bestimmt man zunächst P, Q, R; die Gröfse $S = -\frac{1}{2}T'$ folgt dann aus einer Gleichung derselben Form, nämlich

$$(7) \qquad S'' + \frac{k^2}{r^3}S = 3\frac{k^2}{r^5}(xP + yQ + zR);$$

weiter ergiebt sich T aus

$$(8) \qquad T = -2\int S dt,$$

und endlich

$$(9) \qquad \begin{cases} u = P + xS + x'T, \\ v = Q + yS + y'T, \\ w = R + zS + z'T. \end{cases}$$

Es ist hier nicht nötig, auf die Integration des Systems (6) und (7) näher einzugehen, da diese Gleichungen einem in der Störungstheorie vielfach behandelten Typus angehören. Die allgemeine Integration bringt offenbar in die Ausdrücke der u, v, w neun willkürliche Konstanten hinein, die jedoch nur in sechs voneinander unabhängigen Verbindungen auftreten. Diese sechs Verbindungen sind so zu bestimmen, *dafs* für eine gegebene Epoche t_0 die Gröfsen u, v, w; u', v', w' vor-

geschriebene Werte annehmen. Ist t_0 die Osculationsepoche für die zu der Ellipse (xyz) gehörigen Elemente, so wird man die Bedingungen

$$\left.\begin{array}{c} T = T' = T'' = 0 \\ P = P' = Q = Q' = R = R' = 0 \end{array}\right\} \text{für } t = t_0$$

ansetzen. Rechnet man mit mittleren Elementen, so wird man zweckmäfsig die Bedingung

$$T = T' = T'' = 0 \quad \text{für } t = t_0$$

festhalten, weil dann die für die Epoche t_0 geltenden Relationen

$$\begin{aligned} u &= P, \quad u' = P' \\ v &= Q, \quad v' = Q' \\ w &= R, \quad w' = R' \end{aligned}$$

die einfachste Bestimmung der Integrationskonstanten ergeben.

Bisher war die Lage der Koordinatenaxen unbestimmt gelassen worden. Läfst man jetzt das Axensystem mit den Bahnaxen der Ellipse (xyz) zusammenfallen und legt die z-Axe senkrecht zur Ebene der Ellipse, so wird zunächst

$$\begin{aligned} z = z' &= 0, \quad \text{also} \\ w &= R, \end{aligned}$$

d. h. R ist die Breitenstörung. Ist ferner f die elliptische wahre Anomalie, so wird

$$\begin{aligned} x &= r\cos f, \quad y = r\sin f, \\ u &= P + xS + x'T, \\ v &= Q + yS + y'T. \end{aligned}$$

Sind nun δr und δf die den Beträgen u und v entsprechenden Störungen des Radiusvektors und der wahren Anomalie, ferner p der halbe Parameter, n die mittlere Bewegung, M die mittlere Anomalie, so ist unter Vernachlässigung der Gröfsen zweiter Ordnung

$$\begin{aligned} \delta r &= u\cos f + v\sin f \\ &= P\cos f + Q\sin f + rS + r'T \\ &= P\cos f + Q\sin f + rS + \frac{dr}{dM}\cdot nT, \\ \delta f &= -u\frac{\sin f}{r} + v\frac{\cos f}{r} \\ &= -P\frac{\sin f}{r} + Q\frac{\cos f}{r} + f'T \\ &= -P\frac{\sin f}{r} + Q\frac{\cos f}{r} + \frac{df}{dM}\cdot nT. \end{aligned}$$

$$\delta r - \frac{dr}{df}\delta f = P\left(\cos f + \frac{\sin f}{r}\frac{dr}{df}\right) + Q\left(\sin f - \frac{\cos f}{r}\frac{dr}{df}\right) + rS,$$

$$\delta \log r - \frac{d\log r}{df}\delta f = \frac{P(r\sin f)' - Q(r\cos f)'}{k\sqrt{p}} + S.$$

Betrachtet man den Ausdruck

$$\delta M = \frac{dM}{df}\delta f = nT + \frac{dM}{rdf}(Q\cos f - P\sin f)$$

als eine Störung der mittleren Anomalie und berechnet mit der elliptischen Excentricität die zu $M + \delta M$ gehörige wahre Anomalie, so wird diese $f + \delta f$. Berechnet man ferner mit der elliptischen Excentricität und Halbaxe den zu $M + \delta M$ gehörigen natürlichen Logarithmus des Radiusvektors, so ist zu diesem, um den gestörten Wert zu erhalten, noch der Ausdruck

$$S + \frac{P(r\sin f)' - Q(r\cos f)'}{k\sqrt{p}}$$

hinzuzufügen. Wie man hieraus erkennt, besteht die Abweichung von Hansen nur darin, dafs die Gröfsen δM und $\delta \log r$ in etwas anderer Weise gespalten werden, und zwar so, dafs man zu einer möglichst einfachen Gestalt für die Störungen der rechtwinkligen Koordinaten gelangt.

Leipzig, 1889 Oktober 7.

Über einige Konstruktionen von Lionardo da Vinci.

(Von Moritz Cantor in Heidelberg.)

Es ist bekannt, dafs, als Lionardo da Vinci am 2. Mai 1519 starb, der ganze Nachlafs desselben an Schriften, Zeichnungen und Apparaten bei den Erben, Francesco Melzi und dessen Nachkommen, keineswegs die Beachtung fand, welche ihm gebührte. Aus Verwahrlosung, Verschleuderung und Diebstahl haben nur 13 Hefte handschriftlicher Notizen sich auf den heutigen Tag gerettet, von denen 12 in Paris, 1 in Mailand sich befinden. Die Pariser Hefte sind nachträglich mit den Buchstaben A bis M bezeichnet worden, das Mailänder Heft führt aus der Zeit, zu welcher es sich gleichfalls in Paris befand, die Bezeichnung N, wird aber meistens Codice atlantico genannt.

Alle 13 Hefte enthalten kunterbunt durcheinander gewürfelte Aufzeichnungen über alle Zweige der Künste wie der Wissenschaften, und da sie überdies in Spiegelschrift geschrieben, ohne gröfsere Vorbereitungen so gut wie nicht lesbar sind, [illegible] die Überzeugung bei

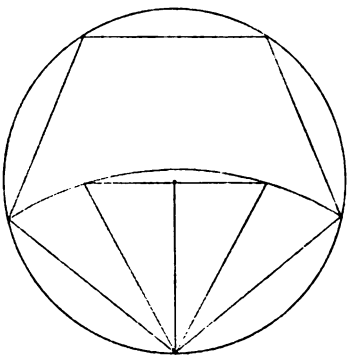
allen Sachkundigen Platz gegriffen, dafs nur eine photographische Wiedergabe jener Hefte möglich sei, damit verschiedene Fachmänner sich der Durchforschung gerade derjenigen Stellen, deren Verständnis sie gewachsen sind, in aller Mufse widmen mögen. Bisher sind unter der Leitung von Herrn Charles Ravaisson-Mollien in Paris vier stattliche Foliobände mit solchen Lichtdrucken erschienen, deren geradezu vollendete Ausstattung jede Lobeserhebung weit hinter sich läfst. Der I. Band von 1881 enthält Heft *A*. Der II. Band von 1883 enthält die Hefte *B*, *D*. Der III. Band von 1888 enthält die Hefte *C*, *E*, *K*. Der IV. Band von 1889 enthält die Hefte *F*, *I*. Mathematisches findet sich an verschiedenen Stellen dieser acht der allgemeinen Forschung zunächst dargebotenen Hefte. Hier soll nur auf wenige dem Inhalte nach zusammengehörige, wenn auch in den Heften *A* und *B* räumlich getrennt erscheinende Bruchstücke eingegangen werden, jetzt etwa 400 Jahre alte Zeugnisse dafür, wie ein genialer Mann, um dessen Zugehörigkeit Künste und Wissenschaften streiten dürfen, regelmäfsige Vielecke zu zeichnen lehrte.

Die Aufgaben sind nach zwei Grundgedanken unterschieden. Bald handelt es sich um die Teilung eines gegebenen Kreises in n gleiche Teile, bald um die Beschreibung eines Kreises, zu dessen n^{tem} Teile eine gegebene Strecke als Sehne gehört. Bei der Zeichnung bedient sich Lionardo da Vinci mit Vorliebe eines Zirkels mit unveränderlicher Zirkelöffnung. Diese Einschränkung war nicht neu, nicht vorübergehend. Seit Pappos von den *ἐνὶ διαστήματι γραφόμενα* [vergl. unsere Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I, 383] schrieb bis zur Zeit, als Steiner die Einschränkung noch weiter trieb und Anwendung nur eines einzigen Kreises gestattete, hat die geistvolle geometrische Spielerei sich Freunde zu erwerben gewufst, die zahlreichsten in Italien während des XVI. Jahrhunderts. Deren unmittelbarer, vielleicht sie beeinflussender Vorgänger dürfte Lionardo da Vinci gewesen sein. Wir beabsichtigen bei dieser unserer Veröffentlichung den Gang einzuschlagen, dafs wir von der steigenden Eckenzahl des Vielecks, welches immer als regelmäfsiges Sehnenvieleck gemeint ist, ohne dafs wir es besonders zu sagen brauchen, uns leiten lassen. Die Figuren nebst ihren Buchstaben sind den Zeichnungen der Hefte *A* und *B* nachgebildet. Wo wir zur Diskussion der Zeichnung Hilfslinien brauchten, sind diese immer punktiert gezeichnet. Die Diskussion selbst hat, wie wir kaum zu sagen haben werden, unsere Quelle nicht angestellt.

Ein einziges Vieleck werden wir nicht besonders zu diskutieren haben: das Sechseck. Dafs dessen Seite mit dem Halbmesser des

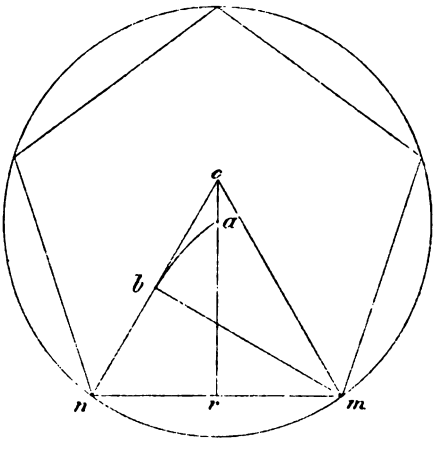
umschriebenen Kreises — wofür wir künftig schlechthin Kreis sagen werden — übereinstimme, war so allgemeines Eigentum, daſs dieser Satz allen übrigen Konstruktionen als Grundlage dient. Und bekannt ist demgemäſs auch, daſs zweimaliges Herumtragen des Halbmessers den Bogen von 120°, dreimaliges den von 180° oder einen Halbkreis gewinnen läſst.

Fig. 1.



Das Fünfeck ist dasjenige Vieleck, welches am häufigsten dem Künstler als Aufgabe gestellt sein kann und hat unseren Schriftsteller wiederholt beschäftigt. In *A* fol. 13ᵛ hat er Fig. 1 eingezeichnet und an einer daneben befindlichen Figur, eine Vereinigung von Fünfeck und Sechseck darstellend, einen Beweis für die Richtigkeit der Zeichnung zu führen gesucht, der ihm aber miſsglückte, was durch ein beigeschriebenes falso bezeugt ist. Gleichwohl findet sich *A* fol. 17ᵛ wieder Figur 2, den gleichen Gedanken einfach wiederholend. Über der gegebenen Seite *mn* ist das gleichseitige Dreieck *mnc* mit seinen beiden Höhen *cr* und *mb* gezeichnet. Von *m* als Mittelpunkt wird mit *mb* als Halbmesser der Bogen *ba* geschlagen, so ist *mb* Halbmesser, *a* Mittelpunkt des gesuchten Kreises. Nennen wir ein für allemal ϱ den Halbmesser des Kreises, σ die Vieleckseite, φ den halben Centriwinkel über σ (beim Fünfeck also $\varphi = 36^0$, wenn die Zeichnung richtig geführt ist), so ist hier $\varrho = \frac{\sigma}{2} \cdot \sqrt{3}$, und da immer $\sin \varphi = \frac{\sigma}{2\varrho}$, so ist hier $\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Fig. 2.



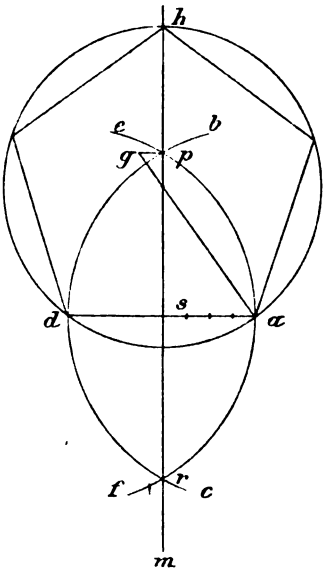
$= \frac{1.7320508}{3} = 0{,}5773503$, woraus

$$\varphi = 35^0\,15'\,53'', \qquad 2\varphi = 70^0\,31'\,46''.$$

Eine zweite Konstruktion finden wir *B* fol. 13ᵛ. Es wird Fig. 3 über $ad = \sigma$ die Spitze p des gleichseitigen Dreiecks gesucht und dessen Höhelinie *hpsm* gezeichnet. Dann wird *ps* in vier gleiche

Teile geteilt und $pg = as$ und $= \frac{as}{4}$ gezogen. Die ga schneidet alsdann ps in dem durch keinen Buchstaben gekennzeichneten Mittelpunkt des Kreises. Der zu Grunde liegende Gedanke ist offenbar der, dafs während ad im Kreise um p sechsmal herumgetragen wird, im gesuchten Kreise solches nur fünfmal möglich sein soll; der Mittelpunkt mufs also der ad sich nähern, und zwar beträgt, man weifs freilich nicht warum, die Näherung $\frac{ps}{5}$. Da $ps = \frac{\sigma}{2}\sqrt{3}$, so ist die Entfernung des neuen Mittelpunktes von s nur noch $\frac{2\sigma}{5}\sqrt{3}$, $as = \frac{\sigma}{2}$, also $\varrho^2 = \left(\frac{2\sigma}{5}\sqrt{3}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = 0{,}73\,\sigma^2$ und $\frac{\sigma}{2\varrho} = \frac{5}{\sqrt{73}}$. Aus $\sin\varphi = \frac{5}{8{,}5440037} = 0.5852056$ folgt aber

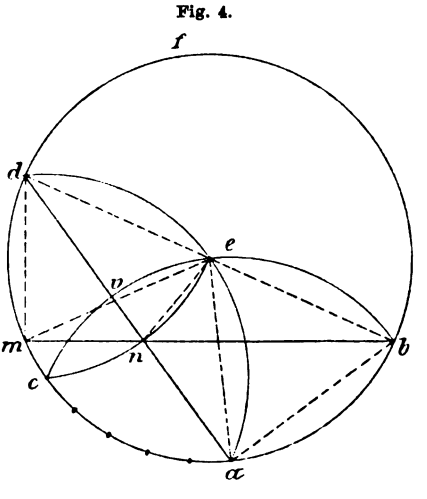
Fig. 3.



$$\varphi = 35^0\,49'\,3'' \qquad 2\varphi = 71^0\,38'\,6''.$$

Ein drittes Verfahren führt B fol. 27^v zu Fig. 4. Nachdem um e als Mittelpunkt der Kreis gezeichnet ist, wird mit unverändertem Halbmesser um einen beliebigen Peripheriepunkt a der Bogen bc, um c der Bogen ad, um d der Bogen ce beschrieben, welchen die Gerade ad in n schneidet. Dann verbindet man bn geradlinig und erhält durch Fortsetzung von bn den Peripheriepunkt m, welcher $\sphericalangle mea = 2\varphi$ macht. Zum Beweise dienen vier zwischen a und c auf der Peripherie in gleichen Entfernungen bemerkbar gemachte Punkte. Da arc $ac = 60^0$, ist jedes Fünftel $= 12^0$, und ist cm, wie es den Anschein hat, eben so grofs, so ist arc $am = 60^0 + 12^0 = 72^0$. Wir ziehen die Geraden eb, ea, en, em, dm. Weil arc ba = arc ac = arc cd = 60^0, mufs bed Durch[illegible] und die Winkel bei a und m über diesem Durch[illegible]Rechte. Aufserdem ist $\sphericalangle nba = ndm$, $\triangle nba \sim ndm$

Fig. 4.



und $\frac{dm}{dn} = \frac{ba}{bn}$, also $dm = \frac{dn}{bn} \cdot ba = \frac{dn}{bn} \cdot \varrho$. Ferner ist $\triangle edm$ gleichschenklig und in ihm $dm = 2\varrho \cdot \sin \frac{dem}{2}$, folglich

$$\sin \frac{dem}{2} = \tfrac{1}{2} \frac{dn}{bn},$$

$dn = da - na = 2\varrho \cdot \sin 60^0 - na$. Um auch na zu finden, benutze man $\triangle aen$, dessen Winkel gegeben sind. Im gleichschenkligen $\triangle den$ ist nämlich $\sphericalangle edn = 30^0$, $\sphericalangle den = dne = 75^0$, also $\sphericalangle ena = 105^0$; ferner $\sphericalangle nea = 180^0 - den - aeb = 180^0 - 75^0 - 60^0 = 45^0$. Daher $\frac{an}{ae} = \frac{an}{\varrho} = \frac{\sin aen}{\sin ane} = \frac{\sin 45^0}{\sin 105^0}$ und $na = \varrho \frac{\sin 45^0}{\sin 105^0} = \varrho \cdot \frac{\sin 45^0}{\cos 15^0}$. Mithin

$$dn = \varrho \left[2 \sin 60^0 - \frac{\sin 45^0}{\cos 15^0}\right],$$

$bn^2 = ab^2 + an^2 = \varrho^2 \left[1 + \left(\frac{\sin 45^0}{\cos 15^0}\right)^2\right]$, also $bn = \varrho \cdot \sqrt{\frac{(\sin 45^0)^2 + (\cos 15^0)^2}{(\cos 15^0)^2}}$

und endlich

$$2 \sin \frac{dem}{2} = \frac{2 \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - \sin 45^0}{\sqrt{(\sin 45^0)^2 + (\cos 15^0)^2}}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks vereinfacht sich sehr, indem man $45^0 = 60^0 - 15^0$ setzt. $2 \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - \sin 45^0 = 2 \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - [\sin 60^0 \cdot \cos 15^0 - \cos 60^0 \cdot \sin 15^0] = \sin 60^0 \cdot \cos 15^0 + \cos 60^0 \cdot \sin 15^0 = \sin 75^0 = \cos 15^0$. Überdies ist bekanntlich

$$\sin 45^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}, \qquad \cos 15^0 = \tfrac{1}{2}\sqrt{2 + \sqrt{3}}.$$

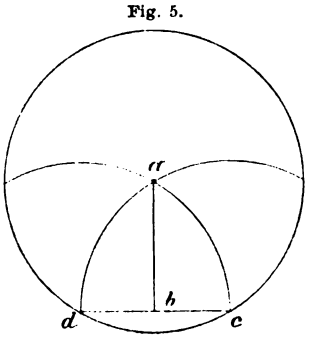
Folglich

$$\sin \frac{dem}{2} = \frac{\frac{1}{4}\sqrt{2 + \sqrt{3}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4}\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{5 + 2\sqrt{3}}{52}} = \sin 23^0\, 47'\, 38''.$$

Daraus folgt endlich

$$2\varphi = 120^0 - 2\,(23^0\, 47'\, 38'') = 72^0\, 24'\, 44''.$$

Fig. 5.



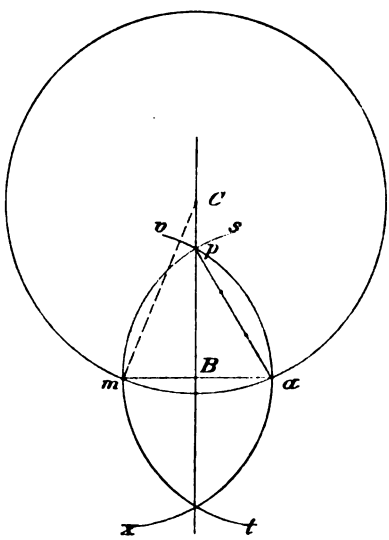
Zum Siebeneck führt *B* fol. 28r die in Figur 5 dargestellte Zeichnung. Von einem beliebigen Peripheriepunkt *c* aus als Mittelpunkt beschreibt man den Bogen *ad*, um *d* als Mittelpunkt den Bogen *ac* und zieht $ab \perp cd$, so ist $ab = \sigma$. Hier wird also $\sigma = \frac{\varrho}{2}\sqrt{3}$ und $\sin \varphi = \frac{\sigma}{2\varrho} = \frac{1}{4}\sqrt{3}$ $= 0{,}4330127$

$\varphi = 25^0\, 39'\, 32''$, $\quad 2\varphi = 51^0\, 19'\, 4''$.

Richtig wäre $2\varphi = 51^0\,25'\,43''$; die Genauigkeit dieser Zeichnung ist demnach eine sehr beträchtliche, wenn es auch nicht wahr ist, was Lionardo da Vinci dazu bemerkt, dafs arc *cd* auf den Punkt genau (apunto) $\frac{1}{7}$ des Kreisumfangs sein werde. Wer übrigens einigermafsen mit der Geschichte der Geometrie bekannt ist, weifs, dafs gerade diese Siebeneckszeichnung weit älter ist, als Lionardo da Vinci. Sie kommt gegen Ende des X. Jahrhunderts bei Abû'l Wafâ, am Anfange des XIII. Jahrhunderts bei Jordanus Nemorarius vor und wird von letzterem eine indische Regel genannt.

Das Achteck tritt zweimal auf. Zuerst *B* fol. 17^r (wenn man zur naheliegenden Annahme berechtigt ist, dafs in einem und demselben Hefte das räumlich früher Geschriebene auch der Zeit nach früher entstand) ist die Aufgabe behandelt, über einer gegebenen Seite *am* ein Achteck zu zeichnen, Fig. 6. Von *a* und von *m* aus als Mittelpunkten werden mit $am = \sigma$ als Halbmesser die Bögen *st* und *vx* beschrieben und deren Durchschnittspunkte geradlinig vereinigt, aufserdem der eine Durchschnittspunkt *p* mit *a* verbunden. Der dritte Teil von *ap* wird sodann der Mittelsenkrechten zu *am* jenseits *p* zugesetzt, so findet man den Mittelpunkt des Kreises. Ähnlich wie bei der zweiten Fünfeckskonstruktion ist also der Mittelpunkt für das Achteck weiter hinausgerückt als für das Sechseck, und die Dreiteilung der *ap* mag von der Thatsache beeinflufst sein, dafs 8 um den dritten Teil mehr als 6 ist. Die Rechnung giebt hier folgendes. Nennen wir *B* den Mittelpunkt von *am* und *C* den Kreismittelpunkt und ziehen $Cm = \varrho$, so ist $mB = \frac{\sigma}{2}$, $BC = \frac{\sigma}{2}\sqrt{3} + \frac{\sigma}{3}$,

Fig. 6.



also $\varrho^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\left[1 + \left(\sqrt{3} + \frac{2}{3}\right)^2\right] = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\left[\frac{40}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3}\right]$, $\frac{\sigma}{2\varrho} = \sqrt{\frac{1}{\frac{40}{9} + \frac{4}{3}\sqrt{3}}}$

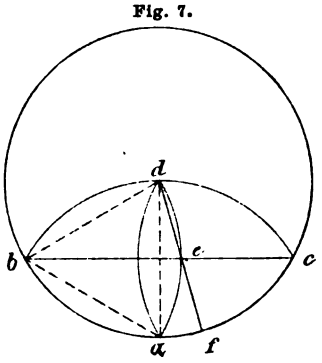
$= \sqrt{\frac{90 - \sqrt{2187}}{292}}$ und

$$\varphi = 22^0\,37'\,51'' \qquad 2\varphi = 45^0\,15'\,41''.$$

Später wird *B*, fol. 40^r die Aufgabe der Achtteilung des Kreises

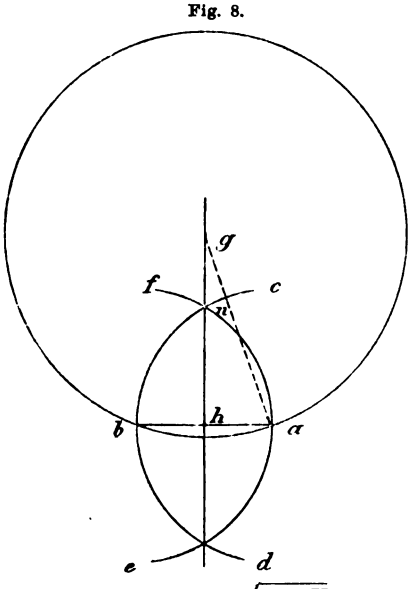
in vollkommen genauer Weise gelöst. Figur 7. Von einem beliebigen Peripheriepunkte a aus als Mittelpunkt wird mit ϱ als Halbmesser der Bogen bdc beschrieben; ebenso Bögen von b und c aus als Mittelpunkten. Dann zieht man bd und durch den so gewonnenen Durchschnittspunkt e die Gerade def. Der Bogen cf ist der achte Teil des Kreises. Man ziehe noch da, ab, bd. Leicht ersichtlich ist $\sphericalangle dbc = 30^0$ und $\triangle dbe$ gleichschenklig, folglich $\sphericalangle bdf = 75^0$ und arc $cf = 120^0 - 75^0 = 45^0$. Zugleich ist auch arc $af = 60^0 - 45^0 = 15^0$ oder $\frac{1}{24}$ des Kreises mit erhalten.

Fig. 7.



Beim Neuneck B fol. 29^r setzte der Verfasser offenbar die Schlufsfolgerung weiter fort, die wir beim Achteck vermuten durften. Weil $9 = 1\frac{1}{2} \cdot 6$, mufs der Mittelpunkt des Neunecks um einen halben Halbmesser weiter hinausrücken als der Mittelpunkt des Sechsecks. Figur 8 zeigt die Ausführung. Von den Endpunkten a und b der Seite $ab = \sigma$ als Mittelpunkten werden die in n sich schneidenden Bögen cd, ef geschlagen, $ng = \frac{ab}{2}$ genommen, so ist um g als Mittelpunkt der gewünschte Kreis zu beschreiben, der das Neuneck genau in sich schliefse: „e tera in se apunto 9 delle date linie!“ Der Halbmesser $ga = \varrho$ werde gezogen, so zeigt sich $\varrho^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\left[1+\sqrt{3}\right]^2 = \left(\frac{\sigma}{2}\right)^2\left[5+2\sqrt{3}\right]$,

Fig. 8.



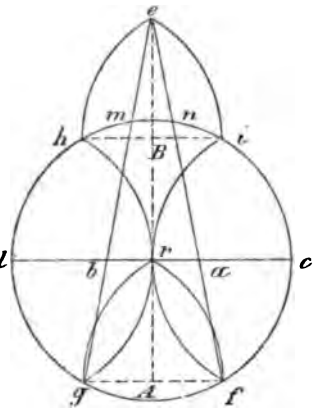
$\frac{\sigma}{2\varrho} = \sqrt{\frac{1}{5+2\sqrt{3}}} = \sqrt{\frac{5-\sqrt{12}}{13}}$. Folglich

$$\varphi = 20^0\ 6'\ 12'' \qquad 2\varphi = 40^0\ 12'\ 25''.$$

Das Achtzehneck ist ziemlich früher B fol. 13^r nach ähnlichem Grundgedanken gezeichnet, liefert aber einen Winkel 2φ, der von dem genauen Werte 20^0 weiter abweicht, als es bei den übrigen Vielecken der Fall war. Hier ist dem Erfinder auch die Mangelhaftigkeit zum Bewufstsein gekommen, ein beigefügtes falso be-

weist. Nach Figur 9 war folgende Konstruktion beabsichtigt. Nachdem von den Endpunkten c, d eines Durchmessers als Mittelpunkten die Bögen fi, gh, und dann von i und h aus als Mittelpunkten die Bögen he, ie beschrieben sind, zieht man die Geraden ef, eg, welche mn als $\frac{1}{18}$ des Kreisumfanges zwischen sich schliefsen. Die Bögen fr, gr sind für die Absicht des Zeichners überflüssig, wenn sie nicht die Entstehung einer als Zierat verwendbaren Gestaltung zeigen sollen. Zieht man die Hilfslinien gf, hi, $eBrA$, so ist sofort klar $eB = Br = rA$, also $eA = 3rA = \frac{3\varrho}{2}\sqrt{3}$, $Af = \frac{\varrho}{2}$, $\operatorname{tg} feA = \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{1}{9}\sqrt{3} = 0{,}1924501$ und $\sphericalangle feA = 10^0\,53'\,36''$. Folglich $\sphericalangle feg = 21^0\,47'\,12''$. Nun ist aber $\sphericalangle feg$ als von zwei Sekanten gebildet durch die halbe Differenz der Bögen fg, mn gemessen, oder 60^0 — arc $mn = 43^0\,34'\,24''$, arc $mn = 16^0\,25'\,36''$, wodurch die Verurteilung dieser Konstruktion sich vollauf rechtfertigt.

Fig. 9.



So die Vieleckskonstruktionen des Lionardo da Vinci. Richtig ist von ihnen allerdings nur eine einzige, aber ganz unbrauchbar auch nur eine einzige. Die übrigen liefern praktisch vollauf genügende Ergebnisse. Dafür aber, dafs Lionardo da Vinci eine Prüfung der Methoden nicht vollgültig vorzunehmen imstande war, darf man mit ihm nicht zu streng ins Gericht gehen. Noch war die Zeit nicht erschienen, in welcher ein Künstler solcher geometrischen Schärfe fähig war. Erst mit Albrecht Dürer brach sie an.

Die Knotenlinien der Atmo- und Hydrosphäre.

(Von S. Günther in München.)

Die neuere Meteorologie war, nachdem sie sich durch die Aufstellung des Buys-Ballotschen Gesetzes in den Besitz eines wirklich zuverlässigen Schlüssels zur Erschliefsung der Geheimnisse der atmosphärischen Veränderungen gesetzt sah, den Versuchen, alle Luftbewegungen als Bestandteile eines einheitlichen Zirkulationssystems der irdischen Lufthülle aufzufassen, einigermafsen abhold geworden. Die Dovesche Theorie, welche auf einer solchen Voraussetzung auf-

gebaut gewesen war, hatte zu augenfälligen Mifserfolgen geführt, und es erschien deshalb ungleich ratsamer, von Fall zu Fall an der Hand des obigen Lehrsatzes die einzelnen Erscheinungen zu erörtern, als sich gleich wieder zu Generalisationen zu erheben, die leicht zum Widerspruch mit den erfahrungsgemäfs feststehenden Thatsachen führen zu können schienen. Gleichwohl konnte auch dieser Standpunkt nicht auf die Dauer festgehalten werden. Durch die Arbeiten von Ferrel, Oberbeck und Werner Siemens, denen sich neuerdings die auf ein einigermafsen anderes Ziel gerichteten Untersuchungen von H. v. Helmholtz angeschlossen haben, wurde der von Dove gehegte Grundgedanke wieder aufgenommen, freilich in wesentlich veränderter Form und mit ungleich vollkommeneren Mitteln, infolge dessen auch mit ganz anderem Erfolge.

In der That konnte schon die Analogie in dem Verhalten der tropfbar- und der elastisch-flüssigen Umhüllung unserer Erde auf die Vermutung leiten, dafs die Bemühungen, die Bewegungen innerhalb dieser Sphären nach einheitlichen Gesichtspunkten aus gewissen allgemeinen Gesichtspunkten zu deduzieren, keine aussichtslosen sein können. Die Theorie der Gezeiten, wie sie Newton sofort nach der Konzeption des Wesens der allgemeinen Schwere aus diesem obersten Begriffe abgeleitet hatte (1), erwies sich als eine so durchaus richtige, dafs alle die zahllosen Neubearbeitungen des Problems gewissermafsen nur den weiteren Ausbau und die Verfeinerung der Newtonschen Lehre anstrebten. Insbesondere ward durch Laplace (2) und Airy (3) die sogenannte statische Theorie von Ebbe und Flut derart begründet, dafs die moderne harmonische Analyse[1]) von ihr als von einem festen Fundamente Gebrauch zu machen berechtigt erschien. Die statische Theorie entwirft ein generell richtiges Bild von der als Gleichgewichtsfläche betrachteten Aufsenseite des oceanischen Wassermantels; die zahllosen Details und Einzelzüge, ohne welche jenes Schema für die praktischen Bedürfnisse des Seefahrers nur wenig leisten würde, hat eben die der Wirkung jeder Konstellation im besonderen Rechnung tragende harmonische Analyse einzuzeichnen. Das Instrument, dessen sich beide Theorien bedienen, ist aber, wie es sich von selbst versteht, kein anderes als die Entwicklung nach trigonometrischen Reihen, und dieses Universalinstrument der mathematischen Physik mufs ebensogut zur Anwendung

1) Diese Disciplin ist bekanntlich zuerst in England ausgebildet worden; um ihre Übertragung nach Deutschland sowie auch um ihre rechnerische Vervollkommnung hat sich Börgen grofse Verdienste erworben. Eine vereinfachende *Darstellung* hat Krümmel (4) seinem wohlbekannten Handbuche einverleibt.

gelangen bei den entsprechenden Forschungen auf meteorologischem Gebiete. Ohne Rücksicht darauf, dafs die Bewegungsursachen beidemale sehr verschieden sind, dafs zumal die Anziehung der Himmelskörper aller Wahrscheinlichkeit nach für die atmosphärische Dynamik nur an untergeordneter Stelle in Betracht kommt, werden also doch von vornherein gewisse Analogien der grofsen in der Atmosphäre wie in der Hydrosphäre des Erdballes stattfindenden Bewegungen zu erwarten sein. Soviel uns bekannt, ist auf dieselben noch nicht ausdrücklich hingewiesen worden. Zweifellos giebt es solcher Analogien verschiedene; wir begnügen uns jedoch, eine derselben hervorgehoben zu haben: Es existieren auf der Erdkugel zwei symmetrisch zum Äquator gelegene Parallelkreise, in welchen die im einen Teile der wäfsrigen wie der gasförmigen Umhüllung der Erde vorherrschende Tendenz zur absteigenden Bewegung in eine Tendenz zur aufsteigenden Bewegung übergeht. Da längs dieser beiden Parallelen somit überhaupt keinerlei Radialbewegung stattfindet, so dürfen wir jene wohl mit vollem Rechte als hydrosphärische resp. atmosphärische Knotenlinien bezeichnen.

Für die Wasserhülle ergiebt sich die Lage der Knotenlinien einfach aus der statischen Gezeitentheorie, von welcher deshalb, vorwiegend nach Airy (s. o.), die wichtigsten Betrachtungen hier wiedergegeben werden müssen. Voraussetzend, dafs, wie erwähnt, die Oberfläche des von der Attraktion beeinflufsten Wassermantels eine Niveaufläche sei, verstehen wir unter q den Abstand eines beliebigen Punktes der letzteren von der Kugelfläche, als welche der Ocean ohne jede Störung sich darstellen würde. R sei der Halbmesser der festen Erdkugel, der die Dichte Δ zukommt, ferner sei r der Radius der (ungestörten) Wassersphäre, D die Entfernung des anziehenden Himmelskörpers vom Erdcentrum, S dessen Masse. Das rechtwinklige Achsensystem sei so gelegt, dafs sein Anfangspunkt in den Mittelpunkt der Erde fällt, die Z-Achse (Erdachse) durch den Schwerpunkt des anziehenden Körpers hindurchgeht; dann hat irgend ein Punkt der Hydrosphäre mit den Koordinaten x, y, z von dem Punkte, in welchem die anziehende Masse vereinigt gedacht werden kann, die Entfernung

$$\varrho = \sqrt{x^2 + y^2 + (D - z)^2}.$$

Die Gröfse der auf das Wasserteilchen ausgeübten Anziehung ist, wenn letzterem die Masse 1 zukommt, und wenn mit $\varkappa$ der bekannte Attraktionsfaktor bezeichnet wird, gleich $\frac{\varkappa S}{\varrho^2}$, und diese Kraft haben wir in ihre drei rechtwinkligen Komponenten dadurch zu zerlegen,

dafs wir sie mit den Richtungskosinus $-\frac{x}{\varrho}, -\frac{y}{\varrho}, -\frac{D-z}{\varrho}$ multiplizieren. Sind S_x, S_y, S_z die drei Komponenten, so wird mithin

$$S_x = -\frac{\varkappa S x}{[x^2+y^2+(D-z)^2]^{\frac{3}{2}}}, \quad S_y = -\frac{\varkappa S y}{[x^2+y^2+(D-z)^2]^{\frac{3}{2}}},$$

$$S_z = -\frac{\varkappa S(D-z)}{[x^2+y^2+(D-z)^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Wir entwickeln ϱ^{-3} nach dem binomischen Satze in eine Reihe, indem wir $D^{-m}\,(m>2)$ als sehr kleine Gröfsen aufser acht lassen, und erhalten

$$\varrho^{-3} = [x^2+y^2+(D-z)^2]^{-\frac{3}{2}} = \frac{1}{D^3}\left(1-\frac{2z}{D}+\frac{x^2+y^2+z^2}{D^2}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{1}{D^3}\left(1+\frac{3z}{D}+\frac{12z^2-3x^2-3y^2}{2D^2}\right).$$

Substituiert man oben diesen Wert und sieht wiederum von den höheren Potenzen von D ab, so wird

$$S_x = -\frac{\varkappa S x}{D^3} - \frac{3\varkappa S x z}{D^4}, \quad S_y = -\frac{\varkappa S y}{D^3} - \frac{3\varkappa S y z}{D^4},$$

$$S_z = \frac{\varkappa S}{D^2} + \frac{2\varkappa S z}{D^3} + \frac{\varkappa S(6z^2-3x^2-3y^2)}{2D^4} \equiv \frac{\varkappa S}{D^2} + N.$$

Was jedoch die Seitenkraft S_z anlangt, so ist noch die gegenseitige Attraktion zwischen der Erde und dem anziehenden Himmelskörper in Abzug zu bringen; es ist folglich $S_z = N$.

Nun mufs, damit die Eigenschaft einer Niveaufläche gewahrt werde, der Ausdruck $(Xdx + Ydy + Zdz)$, wo X, Y, Z die bekannte Bedeutung haben, ein vollständiges Differential sein; $U =$ Konst. sei die Gleichung dieser Gleichgewichtsfläche, dann ist $X = \frac{\partial U}{\partial x}$, $Y = \frac{\partial U}{\partial y}$, $Z = \frac{\partial U}{\partial z}$. Berücksichtigt man den Umstand, dafs die Gröfse der vom festen Erdkörper auf unser Wassermolekül geübten Anziehung durch $\frac{4}{3}\cdot\frac{R^3 \Delta \varkappa \pi}{\varrho_1^2}$ ausgedrückt wird, wo $\varrho_1^2 = x^2+y^2+z^2$ ist, so kann man die drei partiellen Differentialquotienten ohne weiteres anschreiben; man hat nämlich

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{4R^3\Delta\varkappa\pi x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\varkappa S x}{D^3} - \frac{3\varkappa S x z}{D^4}, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{4R^3\Delta\varkappa\pi y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\frac{\varkappa S y}{D^3} - \frac{3\varkappa S y z}{D^4}, \quad \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{4R^3\Delta\varkappa\pi z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{2\varkappa S z}{D^3} + \frac{\varkappa S(6z^2-3x^2-3y^2)}{2D^4}.$$

Die Funktion U, deren drei Differentialquotienten hier vorliegen, ist jetzt bestimmbar; am einfachsten führt man natürlich den Beweis dafür, dafs die Gleichung (C bedeutet eine Konstante)

$$U \equiv \frac{4R^3 \Delta \varkappa \pi}{3(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{\varkappa S(2z^2-x^2-y^2)}{2D^3} + \frac{\varkappa S(2z^3-3x^2z-3y^2z)}{2D^4} = C$$

diejenige der gesuchten Niveaufläche sei, durch unmittelbares Differentiieren. Jetzt greifen wir auf die vorhin eingeführte Gröfse q, die Fluthöhe, zurück und setzen, da das Quadrat dieser einen kleinen Bruchteil des Erdhalbmessers repräsentierenden Gröfse nicht ins Gewicht fallen kann,

$$\varrho_1 = (x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}} = r+q, \quad x^2+y^2+z^2 = r^2+2rq,$$
$$2z^2-x^2-y^2 = 3z^2-x^2-y^2-z^2 = 3z^2-r^2,$$
$$z(2z^2-3x^2-3y^2) = z(5z^2-3r^2)$$
$$\frac{1}{\varrho_1} = \frac{1}{r+q} = \frac{1}{r}\cdot\frac{1}{1+\frac{q}{r}} = \frac{1}{r}\left(1-\frac{q}{r}\right) = \frac{1}{r}-\frac{q}{r^2}.$$

Wir führen alle diese Werte oben ein und lösen die Gleichung nach q auf; so ergiebt sich

$$q = r - \frac{3Cr^2}{4R^3\Delta\varkappa\pi} + \frac{3r^2}{4R^3\Delta\pi}\left[\frac{S(3z^2-r^2)}{2D^3} + \frac{Sz(5z^2-3r^2)}{2D^4}\right].$$

Die beiden ersten Glieder sind konstant; setzen wir dafür C', so kann diese Konstante mittelst der Überlegung bestimmt werden, dafs die Gesamtmenge des vorhandenen Meerwassers durch die Gestaltsveränderung der Aufsenfläche keine andere geworden ist. Wenn wir beiderseits mit $2r\pi dz$ multiplizieren und zwischen $(+r)$ und $(-r)$ integrieren, so mufs der Ausdruck für die vom Wasser eingenommene Kugelschicht herauskommen; so findet sich $C' = 0$ und

$$q = \frac{3r^2}{4R^3\Delta\pi}\left[\frac{S(3z^2-r^2)}{2D^3} + \frac{Sz(5z^2-3r^2)}{2D^4}\right].$$

Unter φ die geographische Breite des Ortes verstehend, in welchem sich das fragliche Wasserteilchen befindet, müssen wir $z = r\sin\varphi$ und sohin

$$q = \frac{3r^4}{4R^3\Delta\pi}\left[\frac{S}{2D^3}(3\sin^2\varphi - 1) + \frac{r}{D}\cdot\frac{S}{2D^3}\cdot\sin\varphi(5\sin^2\varphi - 3)\right]$$

setzen. Der Bruch $\frac{r}{D}$ ist unter allen Umständen sehr klein; demgemäfs wird in erster Annäherung

$$q = \frac{9r^4S}{8R^3D^3\Delta\pi}\left(\sin^2\varphi - \tfrac{1}{3}\right).$$

Die Fluthöhe q wird in drei Fällen gleich Null sein; einmal, wenn $S = 0$, ein anziehendes Gestirn also überhaupt nicht vorhanden, sodann für $D = \infty$, wenn die Entfernung dieses Gestirnes eine unendlich grofse ist, und endlich für

$$\sin \varphi = \pm \tfrac{1}{3}\sqrt{3}.$$

Rechnet man aus, so ergiebt sich das bekannte Resultat: In der ungefähren Breite von $\pm 35^0\ 15'\ 53''$ nimmt der Ocean, welchen man als gleichmäfsig tief und die Erdkugel überall bedeckend angenommen hat, an der Gezeitenbewegung keinen Anteil. Wenigstens gilt dies von der sogenannten halbjährigen Flut.

Die blofs angenäherte Richtigkeit dieses Schlufssatzes ist einerseits durch den Umstand bedingt, dafs die physikalische Voraussetzung von der Wirklichkeit ziemlich weit abliegt[1]), andererseits dadurch, dafs die Reihenentwicklung nicht weit getrieben ward. Auch ward selbstverständlich, um einfache Formeln zu erhalten, der in der Natur selbst nicht vorkommende Fall eines in der verlängerten Rotationsachse gelegenen Attraktionskörpers zugrunde gelegt; das Glied $(3 \sin^2 \varphi - 1)$ ist auch bei einer andern Voraussetzung stets das erste. (Airy, S. 254.)

Wir treten nunmehr den Bewegungsverhältnissen der Atmosphäre näher. Eine ganz allgemein analytische Deduktion, welche die gesamte Luftbewegung einer Halbkugel als grofsen, durch Temperaturdifferenzen im Gange erhaltenen Wirbel darstellt, hat anscheinend zuerst Ferrel (6) geliefert, doch sind gegen seine Methode, die Gegend gröfsten Luftdruckes als mit dem Breitengrade von 35^0 zusammenfallend nachzuweisen, von Sprung (7) mehrfache Einwände erhoben worden.[2]) Soweit wir sehen, sind diese auch wohl begründet, denn der berühmte amerikanische Meteorologe sucht durch Räsonnement eine Thatsache als mechanisches, aus dem Prinzipe der Flächen entfliefsendes Gesetz darzuthun, welche eigentlich nur eine Konsequenz des angewandten Rechnungsverfahrens ist. Die Bewegungs-

1) Ein Weg zur Berücksichtigung der faktischen Umstände in der Rechnung ist von Auerbach (5) angedeutet worden. Wenn man mit δ eine gewisse von der Verteilung des Wassers und Landes abhängige Gröfse bezeichnet, so tritt an die Stelle von $\sin \varphi = \sqrt{\frac{1}{3}}$ die neue Gleichung $\sin \varphi = \sqrt{\frac{1+\delta}{3}}$, welche für $\delta = 0$, d. h. für eine reine Wasserkugel, mit der vorigen übereinstimmt.

2) Auch von Möller wird (8) gegen Ferrel geltend gemacht, dafs es nicht angehe, die Zustände der untersten Luftschicht, für welche nämlich die obige Beziehung nicht ebenfalls mafsgebend sein soll, von denen der darüber gelagerten Schichten zu trennen.

geschwindigkeit wird eben von Ferrel (9) als eine Funktion der geographischen Breite angesehen, und indem dann die uns bekannte Entwicklung nach Kugelfunktionen eintritt, ergiebt sich naturgemäfs, dafs für $\sin^2 \varphi = \frac{1}{3}$ diese Geschwindigkeit den Wert Null annimmt. Übrigens achtet Ferrel zunächst nicht, wie wir es eben bei der hydrosphärischen Aufgabe thaten, auf vertikale, sondern vielmehr auf horizontale Luftbewegungen; seine atmosphärischen Knotenlinien würden also die nach Westen gerichteten Strömungen einer mehr äquatorialen Zone von den ostwärts gerichteten Strömungen einer nördlichen und südlichen Polarkalotte trennen; sie würden den Ort bezeichnen, an welchem die parallel dem Äquator gerichtete Bewegung ihr Minimum erreicht hat.

Obwohl von teilweise sehr verschiedenen Gesichtspunkten ausgehend, ist doch Werner Siemens (10) in der Entwicklung seiner Ansichten über atmosphärische Cirkulation im grofsen und ganzen zu ähnlichen Ergebnissen wie Ferrel gekommen. Die Temperaturungleichheiten bewirken das Auftreten der bekannten beiden Hauptströmungen, einer Unterströmung zum Äquator hin und einer Oberströmung gegen die Pole hin; da aber zugleich die Erdrotation eingreift, so wird innerhalb einer — der strengen Theorie nach — zum Gleicher symmetrisch gelegenen Erdzone jeder der beiden grofsen Luftströme gegen die Umdrehung der Erde zurückbleiben, resp. eine gegen Westen gerichtete Bewegung anzunehmen scheinen, wogegen in den mehr polaren Gebieten umgekehrt die Eigenbewegung der Luft diejenige der Erde an Geschwindigkeit übertreffen und daraufhin als ein nach Osten wehender Wind auftreten mufs. Längs eines gewissen Parallelkreises der Nord- und Südhemisphäre hat sich der Ausgleich zwischen den beiden Strömungen entgegengesetzten Bewegungssinnes zu vollziehen, und dieser Parallelkreis ist eben auch nach Siemens derjenige von 35° lat. (ungefähr). Selbstredend geht auch Siemens lediglich darauf aus, eine in den Hauptzügen richtige Vorstellung von dem Wechselspiele der atmosphärischen Vorgänge zu geben, wie er denn auch ausdrücklich einräumt, dafs thatsächlich die mittlere Rotationsgeschwindigkeit in einem Parallel erreicht sein werde, welcher vom Äquator um weniger als um 35° abstehe.[1])

1) Eine nicht unwichtige Bestätigung der Siemensschen Schlüsse ergab sich, als Kiefsling (11) unter Zugrundelegung derselben die Verbreitung der von der Krakatau-Eruption in die Luft geschleuderten Aschen- und Rauchmassen über den ganzen Erdball hin verfolgte. Es wurde ermittelt, dafs die Termine des Eintreffens dieser Emissionsprodukte an verschiedenen Stellen der Erde sehr gut zu den Werten stimmten, welche Siemens für die Fortpflanzungsgeschwindig-

Es mufste jedenfalls sehr erwünscht erscheinen, die Siemensschen Ideen einer strengen analytischen Kontrolle unterworfen zu sehen, wie dies durch Oberbeck (12) geschehen ist. Derselbe tadelt an Ferrels Ausführungen die Vernachlässigung der Reibung; er selbst berücksichtigt sowohl diese als auch die Achsendrehung der Erde und erblickt als die letzte Ursache der atmosphärischen Bewegungen Dichtigkeitsdifferenzen in der der Erdanziehung unterworfenen Luft. Ferner wird angenommen, dafs bereits der stationäre Zustand erreicht, die Temperatur T sonach durch die Gleichung $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$ bestimmt sei. Die Geschwindigkeitskomponenten seien u, v, w, die Komponenten der Beschleunigung also, unter t, wie üblich, die Zeit verstanden, $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$; stellt dann wieder φ die geographische Breite, ψ die geographische Länge vor und zerlegt man die momentane Bewegungsrichtung in dem Sinne in drei Komponenten V, N, O, wie dies seit Gaufs' Theorie des Erdmagnetismus[1]) gewöhnlich geschieht, so wird

$$V = (u \cos \psi + v \sin \psi) \cos \varphi + w \sin \varphi,$$
$$N = -(u \cos \psi + v \sin \psi) \sin \varphi + w \cos \varphi,$$
$$O = -u \sin \psi + v \cos \psi.$$

Durch weitere Betrachtungen, denen wir hier natürlich nicht folgen können, gelingt es dem genannten Autor, sämtliche bestimmende Gröfsen auf vier Funktionen zurückzuführen, in denen als unabhängige Variable einzig der Abstand des betreffenden Luftteilchens vom Erdcentrum vorkommt. Ferner mufs die Temperaturverteilung am Grunde des Luftoceanes gegeben sein; es wird wiederum eine Darstellung durch Kugelfunktionen vorgenommen, und indem beim zweiten Gliede abgebrochen wird, kann man — r und R behalten ihre uns bereits bekannte Bedeutung bei, A und A' sind Konstante — die dem Parallelkreise von φ^0 lat. entsprechende Temperatur durch das Produkt

$$\left(Ar^2 + \frac{A'}{r^3}\right) \quad (1 - 3 \sin^2 \varphi)$$

ausdrücken. Sind dann C und D gewisse Funktionen der bezüglich am Äquator und an den Polen herrschenden Temperatur, ferner $f(\sigma)$,

---

keiten einzelner den verschiedenen atmosphärischen Höhenschichten angehöriger Luftströmungen hergeleitet hatte.

1) In sehr übersichtlicher Weise findet man diese Zerlegung in eine radiale, eine horizontal-nördliche und eine horizontal-östliche Komponente bei Airy (13) durchgeführt.

$f'(\sigma)$, $g(\sigma)$, $g'(\sigma)$ gewisse Funktionen von $\sigma = \frac{r-R}{R}$, so darf man endgültig

$$V = C(1 - 3\sin^2\varphi)\cdot f(\sigma),$$
$$N = -6\,C\sin\varphi\cos\varphi\cdot f'(\sigma),$$
$$O = D\cos\varphi\,[(1 - 3\sin^2\varphi)\cdot g(\sigma) + 6\sin^2\varphi\cdot g'(\sigma)]$$

setzen. Die Diskussion dieser Endgleichungen bekräftigt in der Hauptsache die von Siemens mehr auf dem Wege der Reflexion gewonnenen Anschauungen.

Was jedoch den Oberbeckschen Formeln ein besonderes Interesse zu verleihen geeignet ist, das scheint der Umstand zu sein, dafs sie uns einen Einblick sowohl in die senkrecht als auch in die parallel zur Erdoberfläche sich vollziehenden Luftbewegungen verstatten. Man erkennt, dafs bei dem bewufsten kritischen Parallel von etwas mehr als 35° lat. der Vertikalstrom seine Richtung ändert; vom Äquator bis zu jener Knotenlinie ist die Bewegung eine aufsteigende, jenseits (polwärts) von derselben eine abwärts gerichtete. Die horizontalen Bewegungen sind ebenfalls, wie das in den Ausdruck für O eingegangene Glied $(1 - 3\sin^2\varphi)$ ausweist, diesseits der Knotenlinie andere als jenseits, doch ist es natürlich nicht so leicht möglich, sich von dieser Beziehung eine Vorstellung zu machen, weil wir $g(\sigma)$ und $g'(\sigma)$ nicht explizit darzustellen imstande sind. Auch gilt dies nur für die ostwestlichen Bewegungen, während für die meridionalen leicht einzusehen ist, dafs sie das Maximum ihrer Intensität bei 45° (wenn $\frac{1}{2}\sin 2\varphi$ seinen gröfsten Wert $\frac{1}{2}$ erhält) erreichen.

Auch derjenige Parallelkreis, dessen Breite das Komplement zur Breite der Knotenlinie ist, besitzt eine gewisse Wichtigkeit. Wir bemerken nämlich, dafs O aus zwei Gliedern sich zusammensetzt, von denen das zweite, durch $6\sin^2\varphi\cdot g'(\sigma)$ dargestellte, einer stets nach Osten gerichteten Strömung entspricht. Dieselbe erreicht ihren gröfsten Intensitätswert, sobald der Ausdruck $\sin^2\varphi\cos\varphi$ seinen Maximalwert angenommen hat, also für $\cos^2\varphi = \frac{1}{3}$. Dem entspricht eine geographische Breite von rund 55°[1]) (genauer 54° 44′ 7″).

1) Wir können hier nicht umhin, einer sehr bemerkenswerten Wahrnehmung von Hann (14) zu gedenken, bei welcher dieser Parallel ebenfalls eine gewisse Rolle spielt. Der genannte Forscher hat das gesamte ihm zur Verfügung stehende Material hinsichtlich der täglichen Barometerschwankungen nach den Regeln der harmonischen Analyse (s. o.) bearbeitet und auf diesem Wege gefunden, dafs die Epoche der doppelten täglichen barometrischen Oscillation auf der ganzen Erde eine ganz auffallende Konstanz bethätigt, solange man nicht auch polwärts vom 55. Parallel gelegene Beobachtungsstationen mit in

Indem wir hiermit unsere Übersicht über die neueren Untersuchungen beschliefsen, welche direkt oder indirekt die Bedeutung gewisser Parallelkreise der Erdkugel[1]) ins Licht stellten, glauben wir zu der nachstehenden Schlufsfolgerung berechtigt zu sein[2]):

Jede analytische, auf die Entwicklung nach Kugelfunktionen in irgend einer Weise sich stützende Erörterung der Bewegungen, welche durch wie immer geartete Kräfte in einer den festen Erdball allseitig umschliefsenden Flüssigkeitshülle von beliebiger Beschaffenheit ausgelöst wurden, mufs dazu führen, den Parallelkreis von rund $\pm 35^0$ lat. als eine in verschiedenen Hinsichten mafsgebende Knotenlinie und denjenigen von rund $\pm 55^0$ lat. als eine solche von sekundärer Bedeutung nachzuweisen. Die Berücksichtigung weiterer Reihenglieder würde naturgemäfs eine Verschiebung dieser Knotenlinien von nicht erheblichem Betrage zur Folge haben. Jedenfalls stimmen auf diese Weise die Ergebnisse der neueren mathematischen Meteorologie mit einem schon seit geraumer Zeit von der statischen Gezeitentheorie aufgestellten Theoreme überein.

Betracht zieht. Es kann wohl keinem Zweifel unterliegen, dafs diese eigenartige Scheidewand irgendwie durch die oben dargelegten Normen der grofsen Cirkulation der Atmosphäre mit bedingt sein wird.

1) Für ein Ellipsoid würde lediglich die Rechnung sich verwickelter gestalten, ohne dafs sicherlich, der geringen Abplattung halber, eine namhafte Änderung des Resultates zu erwarten wäre. Nicht uninteressant ist übrigens, dafs, worauf erstmalig Epstein (15) aufmerksam gemacht zu haben scheint, derjenige Parallelkreis des Erdellipsoides, dessen Radius Vektor zugleich Halbmesser der dem Ellipsoide mit dem besten Rechte zu substituierenden Kugel ist, fast ganz genau mit unserem kritischen Parallel von oben sich deckt. Das Ellipsoid ist durch Umdrehung um die kleine Achse $2b$ der Meridianellipse entstanden, welch letztere demnach, wenn $2a$ die grofse Achse vorstellt, der Gleichung $a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2$ entspricht. Die Gleichung einer vom Centrum aus unter dem Winkel φ gegen die grofse Achse gezogenen Geraden ist $y = x \operatorname{tang} \varphi$; hieraus erhalten wir die Koordinaten des Durchschnittpunktes der Geraden mit der Ellipse $x_1 = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi + b^2}}$, $y_1 = \frac{ab \operatorname{tang} \varphi}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi + b^2}}$. Die mit dem fraglichen Radius Vektor konstruierte Kugel soll dem Ellipsoide inhaltsgleich sein; wir haben sonach zur Bestimmung von φ die Gleichung:

$$\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{ab\sqrt{1 + \operatorname{tang}^2 \varphi}}{\sqrt{a^2 \operatorname{tang}^2 \varphi + b^2}} = \sqrt[3]{a^2 b}.$$

Die Ausrechnung liefert $\varphi = 35^0\ 24'\ 6''$, also nur unbeträchtlich von der Knotenbreite verschieden. Dabei werden Clarkes Erddimensionen zugrunde gelegt.

2) Auch die meteorologische Praxis hat von den Knotenlinien bereits vor längerer Zeit Notiz zu nehmen Veranlassung gehabt. Wie Ferrel erwähnt

Litteratur.

1. Newtons Mathematische Prinzipien der Naturlehre, deutsch von Wolfers, Berlin 1872. S. 448ff.

2. Laplace, Traité de mécanique céleste, (2. Ausgabe) Paris 1829—39. Liv. IV. Liv. XIII.

3. Airy, Tides and Waves (separat aus der Londoner Encyclopaedia Metropolitana).

4. Krümmel, Handbuch der Oceanographie, 2. Band, Stuttgart 1887. S. 213ff.

5. Auerbach, Die theoretische Hydrodynamik nach dem Gange ihrer Entwicklung dargestellt, Braunschweig 1881. S. 52ff.

6. Ferrel-Waldo, The Motions of Fluids and Solids on the Earth's Surface. Professional Papers of the Signal Service, Nr. VIII, Washington 1882.

7. Sprung, Lehrbuch der Meteorologie, Hamburg 1885. S. 202.

8. Möller, Über Verluste an äufserer Energie bei der Bewegung der Luft, Meteorol. Zeitschr., 4. Jahrgang. S. 321.

9. Ferrel-Waldo, a. a. O., S. 35.

10. W. Siemens, Über die Erhaltung der Kraft im Luftmeere der Erde, Sitzungsber. d. preufs. Akad. d. Wissensch. v. 4. März 1886; Zur Frage der Luftströmung, Meteorol. Zeitschr., 4. Jahrgang. S. 425ff.

11. Kiefsling, Untersuchungen über Dämmerungserscheinungen, Hamburg-Leipzig 1888. S. 115ff.

12. Oberbeck, Über die Bewegungserscheinungen der Atmosphäre, Sitzungsber. d. preufs. Akad. d. Wissensch., 1888. S. 383ff. S. 1129ff.; Naturwissensch. Rundschau vom 9. Juni 1888; Meteorol. Zeitschr., 5. Jahrgang. S. 305ff.

13. Airy, Über den Magnetismus, deutsch von Tietjen, Berlin 1874. S. 81ff.

14. Hann, Untersuchungen über die tägliche Oscillation des Barometers, Denkschr. d. k. k. österr. Akad. d. Wissensch., 1889. S. 49ff.

15. Epstein, Geonomie, Wien 1888. S. 186.

München, im September 1889.

Über die Wurzeln einiger transcendenten Gleichungen.

(Von A. Hurwitz in Königsberg i. Pr.)

Bei der Untersuchung der Wurzeln von transcendenten Gleichungen kann man häufig den folgenden Satz mit Nutzen verwenden:

„Es mögen in einem Bereiche B der z-Ebene die Funktion $f(z)$ und jede der Funktionen $\varphi_1(z)$, $\varphi_2(z)$, ... den Charakter einer rationalen Funktion besitzen. Ferner sei in demselben Bereiche gleich-

(a. a. O.), war zuerst durch James Rofs, dem bald auch Wilkes und Schouw sich anschlossen, die Ausbuchtung der irdischen Lufthülle in der ungefähren Breite von 35° durch Barometermessungen erkannt und dadurch die Notwendigkeit nahe gelegt worden, die von Dove für das Wehen von Passat und Antipassat entworfene schematische Skizze der Natur entsprechend umzugestalten. Sogar durch die bekannten Rauchversuche von Vettin kann bis zu einem gewissen Grade die erwähnte Abweichung von der normalen Passatbewegung ersichtlich gemacht werden.

mäfsig $\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = f(z)$. Sucht man dann die Wurzeln der Gleichungen

$$\varphi_1(z) = 0, \quad \varphi_2(z) = 0, \ldots. \quad \varphi_n(z) = 0, \ldots. ,$$

so sind, in dem Bereiche B, die Häufungsstellen dieser Wurzeln identisch mit den Lösungen der Gleichung $f(z) = 0$. Und zwar liegen in einer noch so kleinen Umgebung einer r-fachen Wurzel der Gleichung $f(z) = 0$ genau r Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(z) = 0$, sobald n eine bestimmte (von der gewählten Umgebung abhängende) Zahl überschreitet."

Den Beweis dieses Satzes habe ich in einer Abhandlung[1]) über die Besselschen Funktionen $J_n(z)$ gegeben, wo derselbe bei der Untersuchung der Gleichung $J_n(z) = 0$ Verwendung findet. In den folgenden Zeilen will ich den genannten Satz auf einige andere transcendente Gleichungen anwenden.

1.

Eine Reihe von Problemen der mathematischen Physik führt auf transcendente Gleichungen, welche in der Form

$$g(z) \sin z + h(z) \cos z = 0 \tag{1}$$

enthalten sind. Hier bedeuten $g(z)$ und $h(z)$ ganze rationale Funktionen, welche reelle Koeffizienten und keinen gemeinsamen Teiler besitzen. Wenn man in der Gleichung (1) $\sin z$ und $\cos z$ durch die bekannten Ausdrücke für $\sin((z-\alpha)+\alpha)$ und $\cos((z-\alpha)+\alpha)$ ersetzt, so geht dieselbe über in

$$G(z) \sin(z-\alpha) + H(z) \cos(z-\alpha) = 0, \tag{2}$$

wo zur Abkürzung

$$\begin{cases} G(z) = g(z) \cos\alpha - h(z) \sin\alpha, \\ H(z) = g(z) \sin\alpha + h(z) \cos\alpha \end{cases} \tag{3}$$

gesetzt ist. Wir wählen für die Gröfse α irgend eine reelle Konstante, welche nur der Bedingung genügen soll, dafs die ganzen Funktionen $G(z)$ und $H(z)$ von gleichem Grade werden. Den gemeinsamen Grad dieser Funktionen, welche ebenso wie $g(z)$ und $h(z)$ keinen gemeinschaftlichen Teiler besitzen, bezeichnen wir mit m. Unsere Gleichung (2) möge nun durch r Wurzeln von der Form $\alpha + \varkappa_1\pi$, $\alpha + \varkappa_2\pi, \ldots \alpha + \varkappa_r\pi$ befriedigt werden. Abgesehen von diesen Wurzeln, für welche $\sin(z-\alpha)$ und daher auch $H(z)$ verschwindet, stimmen die Lösungen der Gleichung (2) mit den Nullstellen der Funktion

$$f(z) = \operatorname{cotg}(z-\alpha) + \frac{G(z)}{H(z)} \tag{4}$$

überein. Setzen wir nun

---

1) Mathem. Annalen, Bd. 33, p. 246.

$$(5) \qquad \varphi_n(z) = \sum_{-n}^{+n} \frac{1}{z - \alpha - \varkappa\pi} + \frac{G(z)}{H(z)},$$

so ist in jedem endlichen Bereiche der z-Ebene gleichmäfsig

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = f(z),$$

und wir können daher die Nullstellen der Funktion $f(z)$ durch Auflösung der Gleichungen $\varphi_n(z) = 0$ bestimmen.

Betrachten wir die unendlich vielen Intervalle, in welche die Achse der reellen Zahlen durch die Punkte

$$\alpha + \varkappa\pi \quad (\varkappa = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots\ldots)$$

eingeteilt wird, so giebt es unter ihnen höchstens $2r$ Intervalle, von welchen eine Grenze mit einem der Punkte $\alpha + \varkappa_1\pi$, $\alpha + \varkappa_2\pi, \ldots$ $\alpha + \varkappa_r\pi$ zusammenfällt. Aufser diesen möge es noch s Intervalle geben, in welchen Wurzeln der Gleichung $H(z) = 0$ liegen.

Wählen wir jetzt n so grofs, dafs die reellen Wurzeln von $H(z) = 0$ sämtlich zwischen $\alpha - n\pi$ und $\alpha + n\pi$ fallen! Dann giebt es unter den $2n$ Intervallen, welche von den Punkten

$$\alpha + \varkappa\pi \quad (\varkappa = -n, \ldots\ldots + n)$$

begrenzt werden, mindestens $2n - 2r - s$, in welchen die Funktion $H(z)$ nicht verschwindet. In jedem der letzteren Intervalle liegt nun mindestens eine Wurzel der Gleichung $\varphi_n(z) = 0$. Denn die Funktion $\varphi_n(z)$ geht von unendlich grofsen positiven zu unendlich grofsen negativen Werten über, wenn z eines dieser Intervalle durchläuft. Da $\frac{G(z)}{H(z)}$ für $z = \infty$ einen endlichen nicht verschwindenden Wert besitzt, so ergiebt sich auf ähnliche Weise, dafs $\varphi_n'(z)$ entweder zwischen $-\infty$ und $\alpha - n\pi$ oder zwischen $\alpha + n\pi$ und $+\infty$ mindestens einmal verschwindet. Die Gleichung $\varphi_n(z) = 0$ hat daher wenigstens $2n + 1 - 2r - s$ reelle Wurzeln. Hieraus folgt zunächst nach dem eingangs erwähnten Satze, dafs die Funktion $f(z)$ unendlich viele reelle Nullstellen besitzt, welche sich auf die Intervalle $\alpha + \varkappa\pi, \ldots$ $\alpha + (\varkappa + 1)\pi$ verteilen. Aber noch mehr: da die Gleichung $\varphi_n(z) = 0$ nach Entfernung der Nenner eine algebraische Gleichung vom Grade $2n + 1 - r + m$ wird, so besitzt sie höchstens

$$j = (2n + 1 - r + m) - (2n + 1 - 2r - s) = r + s + m$$

imaginäre Wurzeln. Die Anzahl der imaginären Nullstellen von $f(z)$ kann daher ebenfalls höchstens j betragen. Denn hätte die Gleichung $f(z) = 0$ z. B. $j + 1$ imaginäre Wurzeln, so würde man nach Annahme beliebig kleiner Umgebungen dieser Wurzeln n so grofs wähl[illegible]

können, dafs die Gleichung $\varphi_n(z) = 0$ ebenfalls $j + 1$ imaginäre, in jene Umgebungen fallende Wurzeln besäfse.

Die Zahl $r + s$ ist höchstens gleich der Anzahl a der reellen Wurzeln von

$$\lambda g(z) + \mu h(z) = 0,$$

wo $\lambda : \mu = \sin\alpha : \cos\alpha$ ist. Es besteht daher die Ungleichung

$$i \leqq m + a,$$

wenn i die Zahl der imaginären Nullstellen von $f(z)$ bezeichnet. Nach der über α getroffenen Festsetzung kann das Verhältnis $\lambda : \mu$ jeden Wert mit Ausnahme von zweien annehmen. Berücksichtigt man aber, dafs bei einer geeigneten Variation von λ und μ die Zahl a ungeändert bleibt oder abnimmt, so erkennt man, dafs die Ungleichung $i \leqq m + a$ auch für die beiden Ausnahmewerte des Verhältnisses $\lambda : \mu$ gültig bleibt. Wir können daher den folgenden Satz aussprechen:

Die transcendente Gleichung

$$(a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m) \sin z + (b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m) \cos z = 0$$

hat stets, aufser unendlich vielen reellen Wurzeln, nur eine endliche Anzahl von imaginären Wurzeln. Und zwar ist diese Anzahl höchstens gleich $m + a$, wo a angiebt, wie viele reelle Wurzeln die Gleichung

$$(a_0 + a_1 z + \cdots + a_m z^m) \lambda + (b_0 + b_1 z + \cdots + b_m z^m) \mu = 0$$

besitzt. Die Faktoren λ und μ bedeuten dabei willkürlich zu wählende reelle Konstanten.

Die oben eingeführte Voraussetzung, dafs die Faktoren von $\sin z$ und $\cos z$ keinen gemeinsamen Teiler besitzen, ist hier fallen gelassen, wie dies offenbar erlaubt ist.

Da die Zahl a höchstens gleich m ist, so kann unsere Gleichung (1) nie mehr als $2m$ imaginäre Wurzeln besitzen. Diese äufserste Zahl kann aber auch wirklich erreicht werden. Denn die Forderung, dafs die Gleichung (1) für m Paare konjugiert imaginärer Werte von z erfüllt sei, ergiebt $2m$ lineare Gleichungen zur Bestimmung der $2m + 2$ Koeffizienten von $g(z)$ und $h(z)$.

Bei besonderen Annahmen über die ganzen Funktionen $g(z)$ und $h(z)$ läfst sich noch weiteres über die Wurzeln unserer transcendenten Gleichung erschliefsen. Es möge genügen, dieses an einem Beispiele[1]) auszuführen.

---

1) Vgl. Cauchy, Exercices de Mathématiques, Bd. 1, Paris 1826. Es werden hier mehrere specielle Fälle der Gleichung (1) nach einer von Poisson herrührenden Methode behandelt.

Die Gleichung

$$\sin z - cz\cos z = 0 \tag{6}$$

hat die Wurzel $z = 0$; ihre übrigen Wurzeln sind die Nullstellen der Funktion

$$\operatorname{cotg} z - \frac{1}{cz},$$

welche ihrerseits die Grenze der rationalen Funktion

$$\varphi_n(z) = \frac{1}{z+n\pi} + \cdots + \frac{1}{z+\pi} + \frac{\left(1-\frac{1}{c}\right)}{z} + \frac{1}{z-\pi} + \cdots + \frac{1}{z-n\pi} \tag{7}$$

ist. Für rein imaginäre Werte des Argumentes läfst sich $\varphi_n(z)$ durch folgende Formel darstellen

$$\frac{i}{z}\varphi_n(iz) = \frac{2}{z^2+n^2\pi^2} + \cdots + \frac{2}{z^2+\pi^2} - \frac{\left(\frac{1}{c}-1\right)}{z^2}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) ergiebt sich nun durch einfache Schlüsse, welche ich Kürze halber übergehe, der Satz:

Die Gleichung

$$\sin z = cz\cos z$$

hat aufser unendlich vielen reellen Wurzeln noch zwei rein imaginäre Wurzeln oder überhaupt keine imaginären Wurzeln, je nachdem die Gröfse c zwischen die Grenzen 0 und 1 oder aufserhalb dieser Grenzen fällt.

Bezeichnet man im ersten Falle die imaginären Wurzeln mit $z = i\zeta$ und $z = -i\zeta$, so liegt ζ zwischen

$$\sqrt{3\left(\frac{1}{c}-1\right)} \text{ und } \frac{n\pi\sqrt{\frac{1}{c}-1}}{\sqrt{2n+1-\frac{1}{c}}},$$

wo n irgend eine ganze Zahl bedeutet, welche der Bedingung $2n+1-\frac{1}{c} > 0$ genügt. Um dieses zu beweisen, bemerken wir, dafs nach (8) die Gleichung

$$\frac{\left(\frac{1}{c}-1\right)}{\zeta^2} = \frac{2}{\zeta^2+\pi^2} + \frac{2}{\zeta^2+4\pi^2} + \cdots\cdots$$

besteht. Die rechte Seite dieser Gleichung ist aber offenbar kleiner als

$$\frac{2}{\pi^2} + \frac{2}{4\pi^2} + \frac{2}{9\pi^2} + \cdots = \frac{1}{3},$$

und gröfser als

$$\frac{2}{\zeta^2+\pi^2} + \frac{2}{\zeta^2+4\pi^2} + \cdots + \frac{2}{\zeta^2+n^2\pi^2} > \frac{2n}{\zeta^2+n^2\pi^2},$$

wo n eine beliebige ganze Zahl bedeutet. Hiernach ist

$$\frac{1}{3} > \frac{\frac{1}{c} - 1}{\zeta^2} > \frac{2n}{\zeta^2 + n^2\pi^2},$$

aus welchen Ungleichungen sofort die oben für ζ angegebenen Grenzen folgen.

2.

Die höhere hypergeometrische Reihe

$$(9) \qquad f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^\varkappa}{\Gamma(\varkappa+1)\,\Gamma(\alpha_1+\varkappa)\,\Gamma(\alpha_2+\varkappa)\cdots\Gamma(\alpha_r+\varkappa)}$$

ist die Grenze der ganzen Funktion

$$(10) \qquad \varphi_n(z) = \sum_0^n \binom{n}{\varkappa} \frac{z^\varkappa}{\Gamma(\alpha_1+\varkappa)\,\Gamma(\alpha_2+\varkappa)\cdots\Gamma(\alpha_r+\varkappa)}$$

für $n = \infty$. Da nun die Nullstellen der Funktion

$$\sum_0^n \binom{n}{\varkappa} \left(\frac{z}{n}\right)^\varkappa = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

sämtlich reell sind, so folgt aus einem Satze von Laguerre[1]), daſs auch die Gleichung $\varphi_n(z) = 0$ nur reelle Wurzeln besitzt, falls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ positive Gröſsen sind. Nach dem eingangs erwähnten Satze schlieſsen wir hieraus:

„Die transcendente Gleichung

$$\sum_0^\infty \frac{z^\varkappa}{\Gamma(\varkappa+1)\,\Gamma(\alpha_1+\varkappa)\cdots\Gamma(\alpha_r+\varkappa)} = 0,$$

in welcher $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_r$ reelle positive Konstante bedeuten, hat nur reelle Wurzeln."

Setzt man $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_r = 1$, so ergiebt sich insbesondere:

„Die Wurzeln der transcendenten Gleichung

$$1 + \frac{z}{(1!)^r} + \frac{z^2}{(2!)^r} + \cdots + \frac{z^\varkappa}{(\varkappa!)^r} + \cdots = 0$$

sind sämtlich reell."

Wenn die ganze Zahl r den Wert 2 besitzt, so lassen sich die Wurzeln unserer Gleichung auf Grund bekannter Sätze voneinander trennen. Es handelt sich in diesem Falle um die Besselsche Reihe

$$(11) \qquad f(z) = 1 + z + \frac{z^2}{(2!)^2} + \cdots + \frac{z^\varkappa}{(\varkappa!)^2} + \cdots,$$

1) Acta Mathematica, Bd. 4, [illegible]

welche wir als Grenze der ganzen Funktion

$$\varphi_n(z) = \sum_0^n \binom{n}{\varkappa}^2 \left(\frac{z}{n^2}\right)^\varkappa \tag{12}$$

ansehen können. Nun ist bekanntlich[1])

$$\varphi_n\left(n^2 \cdot \frac{z+1}{z-1}\right) = \frac{2^n}{(z-1)^n} P_n(z), \tag{13}$$

wo $P_n(z)$ die Kugelfunktion

$$P_n(z) = \frac{1}{2^n \cdot n!} \frac{d^n (z^2-1)^n}{dz^n} \tag{14}$$

bezeichnet. Ferner verteilen sich die Wurzeln der Gleichung $P_n(z) = 0$ auf die Intervalle[2])

$$\cos\frac{(2\varkappa-1)\pi}{2n} \cdots \cos\frac{2\varkappa\pi}{2n+2}, \quad (\varkappa = 1, 2, \ldots n).$$

Da nun $\frac{\cos\Theta + 1}{\cos\Theta - 1} = -\operatorname{tg}^2\frac{\Theta}{2}$ ist, so fallen die Wurzeln der Gleichung $\varphi_n(z) = 0$ einzeln in die Intervalle

$$-n^2\operatorname{tg}^2\frac{(2\varkappa-1)\pi}{4n}, \cdots -n^2\operatorname{tg}^2\frac{2\varkappa\pi}{4(n+1)},$$

welche sich in der Grenze $n = \infty$ auf die Intervalle

$$-\left(\frac{(2\varkappa-1)\pi}{4}\right)^2, \cdots -\left(\frac{2\varkappa\pi}{4}\right)^2$$

reduzieren. Ersetzen wir nun noch die Unbekannte z durch $-\left(\frac{z}{4}\right)^2$, so ergiebt sich:

„Die transcendente Gleichung

$$1 - \left(\frac{z}{4}\right)^2 + \frac{1}{(2!)^2}\left(\frac{z}{4}\right)^4 - + \cdots + \frac{(-1)^\varkappa}{(\varkappa!)^2}\left(\frac{z}{4}\right)^{2\varkappa} + \cdots = 0$$

besitzt nur reelle Wurzeln, und zwar liegt in jedem der Intervalle

$$\pi \ldots 2\pi, \quad 3\pi \ldots 4\pi, \quad 5\pi \ldots 6\pi, \ldots\ldots$$

je eine Wurzel der betrachteten Gleichung."

Hildesheim, den 28. September 1889.

---

1) Heine, Handbuch der Kugelfunktionen, Bd. 1, pag. 19 der zweiten Auflage.

2) Man vergleiche die Abhandlungen von Markoff in den Mathem. Annalen Bd. 27 pag. 177 und von Stieltjes in den Acta Mathematica Bd. 9 pag. 385.

Über die Dirichletsche Methode der Wertbestimmung der Gaufsschen Reihen.

(Von L. Kronecker.)

I. In der Dirichletschen Summenformel:

$$\tfrac{1}{2}f(0)+f(1)+\cdots+f(r-1)+\tfrac{1}{2}f(r)=\lim_{s=\infty}\int_0^r f(x)\sum_{n=-s}^{n=+s}\cos 2nx\pi dx,$$

welche unmittelbar aus der Fourierschen Reihenentwickelung von $f(x)$ hervorgeht, kann der Ausdruck auf der rechten Seite durch:

$$\text{(A)}\qquad \lim_{s=\infty}\int_0^r f(x)\sum_n e^{2nx\pi i}dx \qquad (-s-p\leqq n\leqq s+q)$$

ersetzt werden, wo p, q beliebige positive ganze Zahlen bedeuten. Denn hierbei ist nur das Aggregat:

$$i\int_0^r f(x)\sum_{n=-s}^{n=+s}\sin 2nx\pi dx$$

$$+\int_0^r f(x)\sum_m \cos 2mx\pi dx+i\int_0^r f(x)\sum_m \sin 2mx\pi dx$$

$$(-s-p\leqq m<-s,\quad s<m\leqq s+q)$$

hinzugefügt, dessen erster Teil an sich gleich Null ist, während jedes der Integrale:

$$\int_0^r f(x)\cos 2(s+h)x\pi dx,\quad \int_0^r f(x')\sin 2(s+h)x'\pi dx',$$

welche den zweiten und dritten Teil bilden, für wachsende Werte von s gleich Null wird. Führt man nämlich neue Integrationsvariabeln z, z' mittels der Substitutionen:

$$x=3rz-\frac{1}{4(s+h)},\quad x'=3rz'$$

ein und setzt zur Abkürzung $6r(s+h)=w$, so verwandeln sich die beiden Integrale in folgende:

$$\text{(B)}\qquad 3r\int_{\frac{1}{2w}}^{\frac{1}{2w}+\frac{1}{3}} f\Big(3rz-\frac{3r}{2w}\Big)\sin wz\pi dz,\quad 3r\int_0^{\frac{1}{3}} f(3rz')\sin wz'\pi dz'.$$

Nun ist aber nach jener berühmten Dirichletschen Abhandlung über die Konvergenz der trigonometrischen Reihen[1]):

$$\lim_{w=\infty} \int_0^{\zeta} F(z) \sin wz\pi dz = \tfrac{1}{2} \lim_{v=0} \sin v\pi F(v),$$

wenn $\zeta \leqq \frac{1}{2}$ ist, die Variable v sich von der positiven Seite her der Null nähert, und $\sin v\pi F(v)$ die a. a. O. von Dirichlet angegebenen Bedingungen erfüllt. Jene beiden Integrale (B) nähern sich daher mit wachsendem Werte von w der Null, wenn — wie hier vorausgesetzt werden soll — $f(x)$ für endliche Werte von x endlich bleibt und in jedem endlichen Intervalle nur eine endliche Anzahl von Maxima und Minima hat.

II. Nimmt man oben in (A) $p = 0$, $q = 2\lambda - 1$, $s = 2t\lambda$, wo λ eine beliebige ganze Zahl bedeutet, und setzt dann $n = 2k\lambda + h$, so erhält man den Ausdruck (A) in folgender Form:

$$\lim_{t=\infty} \int_0^{r} f(x) \sum_{h,\,k} e^{2(2k\lambda+h)x\pi i} dx \quad \begin{pmatrix} (h=0,1,2,\dots 2\lambda-1) \\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\dots \pm t) \end{pmatrix},$$

und wenn endlich hierin $x - kr$ für x gesetzt wird, so nimmt die Dirichletsche Summenformel die Gestalt an:

$$\text{(C)} \qquad \tfrac{1}{2}f(0) + f(1) + \cdots + f(r-1) + \tfrac{1}{2}f(r) = \lim_{t=\infty} \sum_{h,\,k} \int_{kr}^{(k+1)r} f(x - kr) e^{2(2k\lambda+h)x\pi i} dx,$$

$$(h=0,1,2,\dots 2\lambda-1;\ k=0,\pm 1,\pm 2,\dots \pm t)$$

in welcher sie sich am besten zur Benutzung bei Summierung der Gaufsschen Reihen eignet.

III. Wird für r eine gerade Zahl 2μ genommen, ferner jene Funktion $f(x)$ durch $e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}} f(x)$ ersetzt und hierbei $f(x)$ als periodisch mit der Periode 2μ angenommen, so resultiert unmittelbar aus der Gleichung (C) die Formel:

$$\text{(D)} \qquad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{k^2\lambda\pi i}{\mu}} f(k) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}} f(x) \sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{2hx\pi i} dx,$$

---

1) Crelles Journal Bd. 4, S. 157 und G. Lejeune Dirichlets Werke, Bd. I, S. 117.

und man erhält also, für ganz beliebige Werte von $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $\ldots f(2\mu-1)$ die Summe:

$$\sum_k e^{\frac{k^2\lambda\pi i}{\mu}} f(k) \qquad (k=0,1,2,\ldots 2\mu-1)$$

durch das Integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{x^2\lambda\pi i}{\mu}+(2\lambda-1)x\pi i} \cdot \frac{\sin 2\lambda x\pi}{\sin x\pi} f(x)dx$$

ausgedrückt, wenn nur die Funktion $f(x)$ aufserhalb des Intervalles $(0,\ 2\mu)$ gemäfs der Periodicitätsgleichung $f(x)=f(x+2\mu)$ bestimmt wird.

IV. Nimmt man in der Formel (D) $f(k)=1$ und führt auf der rechten Seite eine neue Integrationsvariable mittels der Substitution:

$$x = y\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}} - h\frac{\mu}{\lambda}$$

ein, wobei $\frac{\mu}{\lambda}$ und $\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}$ als positiv anzunehmen sind, so erhält man die fundamentale Relation:

$$\text{(E)} \qquad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi} = \left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right| \sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{\frac{\mu}{\lambda i}h^2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{y^2\pi i}dy,$$

welche eine Reciprocitätsbeziehung zwischen den zwei Gaufsschen Reihen:

$$\sum_{h=0}^{h=2\lambda-1} e^{\frac{\mu}{\lambda i}h^2\pi}, \qquad \sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}$$

darstellt. Diese Relation hat Dirichlet nur für den besonderen Fall $\lambda=2$ aus seiner Summenformel abgeleitet, und dies genügt auch zur Wertbestimmung der Gaufsschen Reihen $\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{2k^2\pi i}{\mu}}$. Aber die allgemeinere Relation (E) geht, wie sich hier gezeigt hat, ebenso einfach aus der Dirichletschen Summenformel hervor, wie die speciellere für $\lambda=2$, und sie gewährt überdies den Vorteil, ganz unmittelbar zur Wertbestimmung der allgemeinen Gaufsschen Reihen $\sum_{k=0}^{k=2\mu-1} e^{\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}$ zu führen.

V. Um dies näher darzulegen, bezeichne ich, wie in meinem Aufsatze „Über den vierten Gaufsschen Beweis des Reciprocitäts-

gesetzes für die quadratischen Reste“[1]), mit $(\sqrt{re^{2\vartheta i}})$ den durch die Gleichung:

$$(\sqrt{re^{2\vartheta i}}) = |\sqrt{r}|\, e^{\vartheta i} \qquad \left(-\tfrac{1}{2}\pi < \vartheta \leqq \tfrac{1}{2}\pi\right)$$

definierten Wert der Quadratwurzel aus einer komplexen Gröfse $re^{2\vartheta i}$ und mit $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right)$ die durch die Gleichung:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = \sum_{k=0}^{k=2\mu-1}{}' e^{-\frac{\lambda i}{\mu}k^2\pi}$$

definierte Gaufssche Reihe. Alsdann stellt sich die Relation (E), wenn darin $-i$ für i gesetzt wird, in folgender Weise dar:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = \left|\sqrt{\frac{\mu}{\lambda}}\right| G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right) \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2\pi i}\, dy,$$

und da sich hieraus der Wert des Integrals, indem man $\lambda = 2$, $\mu = 1$ setzt, gleich $\frac{|\sqrt{2}|}{1+i}$ bestimmt, so resultiert die Hauptgleichung:

$$\text{(F)} \qquad \left(\sqrt{\frac{\lambda i}{\mu}}\right) G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = G\left(\frac{\mu}{\lambda i}\right).$$

Diese Gleichung ist allerdings nur unter der Voraussetzung, dafs $\frac{\lambda}{\mu}$ positiv sei, abgeleitet worden, aber sie gilt offenbar auch für den Fall, dafs $\frac{\lambda}{\mu}$ negativ ist; denn, um dies einzusehen, braucht man nur i in $-i$ zu verwandeln.

Da $G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) = 0$ ist, wenn λ und μ beide ungerade sind, so bedarf es allein der Betrachtung der Gaufsschen Reihen:

$$G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right), \quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right),$$

und hierbei kann noch angenommen werden, dafs $\mu \equiv 1 \pmod 4$ ist, da ja gleichzeitig das Vorzeichen von λ und μ verändert werden kann, ohne den Wert des Arguments von G zu verändern. Setzt man nun:

$$\text{(G)} \qquad G\left(\frac{2\lambda i}{\mu}\right) = (\sqrt{\mu})\left(\frac{\lambda}{\mu}\right), \quad G\left(\frac{\mu}{2\lambda i}\right) = (\sqrt{2\lambda i})\left(\frac{\mu}{\lambda}\right),$$

so stimmen die Zeichen $\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)$, $\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)$ mit den Legendre-Jacobischen Zeichen überein, welche sich auf diese Weise analytisch dargestellt finden.

---

1) Monatsbericht der Berliner Akademie vom Juli 1880.

Der Beweis dieser Übereinstimmung läfst sich genau so, wie ich es in dem erwähnten Aufsatze ausgeführt habe, aus den folgenden, fast evidenten Grundeigenschaften der Gaufsschen Reihen G:

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu} + 2i\right) = G\left(\frac{\lambda i}{\mu}\right) \qquad (\lambda, \mu \text{ beliebige ganze Zahlen}),$$

$$G(2\lambda i) = 1, \quad G\left(\frac{\mu}{2i}\right) = 1 + i \qquad (\lambda, \mu \text{ ganze Zahlen und } \mu \equiv 1 \pmod 4),$$

$$G\left(\frac{\lambda i}{\mu\nu}\right) = G\left(\frac{\lambda\nu i}{\mu}\right) G\left(\frac{\lambda\mu i}{\nu}\right) \qquad (\lambda, \mu, \nu \text{ ganze Zahlen und zu einander prim}),$$

in Verbindung mit jener durch die Gleichung (F) dargestellten Haupteigenschaft derselben herleiten, und diese Gleichung (F) liefert alsdann direkt die Reciprocitätsbeziehung für das allgemeinere Legendre-Jacobische Zeichen in der bemerkenswerten Form:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = \frac{(\sqrt{\mu})}{(\sqrt{2\lambda i})}\left(\sqrt{\frac{2\lambda i}{\mu}}\right),$$

oder:

$$\left(\frac{\lambda}{\mu}\right)\left(\frac{\mu}{\lambda}\right) = (-1)^{\frac{1}{4}(1-\operatorname{sgn}.\lambda)(1-\operatorname{sgn}.\mu)},$$

wenn, wie vorausgesetzt worden, $\mu \equiv 1 \pmod 4$ ist.

Über den gröfsten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Funktionen.

Vortrag, gehalten auf der Naturforscher-Versammlung zu Heidelberg am 21. September 1889.

(Von Eugen Netto in Giessen.)

Wir betrachten zwei ganze Funktionen gleicher Ordnung der Variabeln x mit unbestimmten Koeffizienten

$$f = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n, \quad g = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n.$$

Für das Bestehen eines gröfsten gemeinsamen Teilers von f, g der Ordnung $(n - \varkappa)$ ist es notwendig und hinreichend, dafs aus einer Reihe von Determinanten der Ordnungen $2n$, $2n-2$, $2n-4$, ..., welche in bestimmter Weise aus den a, b gebildet sind, nämlich aus der Reihe

$$T_{2n}, \; T_{2n-2}, \; \ldots \; T_{2\varkappa+2}, \; T_{2\varkappa}, \; \ldots \; T_2$$

die ersten $(n - \varkappa)$ verschwinden, während die nächste, $T_{2\varkappa}$, von Null verschieden ist. Der gröfste gemeinsame Teiler kann dann bis auf einen konstanten Faktor durch

(1) $$\varphi = \tau_0 x^{n-\varkappa} + \tau_1 x^{n-\varkappa-1} + \cdots + \tau_{n-\varkappa}$$

ausgedrückt werden, wobei die τ Determinanten der Ordnung $2\varkappa$ sind, und τ_0 insbesondere gleich $T_{2\varkappa}$ wird.

Es handelt sich nun um die Beantwortung der folgenden Frage: Besitzt die durch (1) definierte Funktion φ auch dann noch eine bestimmte charakteristische Bedeutung, wenn jene Bedingungen

(2) $$T_{2n} = 0, \quad T_{2n-2} = 0, \ldots, \quad T_{2\varkappa+2} = 0$$

wegfallen? Es läfst sich leicht eine, von jenen Bedingungen unabhängige Gleichung

$$\varphi = f \cdot G + g \cdot F$$

herstellen, aus welcher hervorgeht, dafs φ unter allen Umständen ein Vielfaches des gröfsten gemeinsamen Teilers von f, g darstellt. Durch die Erfüllung von (2) wird φ wirklich dieser Teiler; was bedeutet φ, abgesehen von dem Systeme (2)?

Die Beantwortung dieser Frage führt einerseits tiefer in die Natur des gröfsten gemeinsamen Teilers ein, andererseits liefert sie rein arithmetische Beweise für Determinantensätze, die bisher entweder indirekt erschlossen wurden, oder noch unbekannt waren.

Die Vorbereitungen zur Beantwortung habe ich in meiner Arbeit: ‚Anwendung der Modulsysteme auf eine elementare algebraische Frage" gegeben; das daselbst noch nicht berührte Hauptproblem dagegen erst auf Anregung des Herrn Kronecker hin behandelt. Eine Anzahl der l. c. abgeleiteten Resultate werde ich direkt übernehmen, die eingeführten Bezeichnungen aber hier nochmals erläutern. —

Die Resultante T_{2n} von f, g schreibe ich folgendermafsen

$$T_{2n} = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \ldots a_n & \cdot & \ldots \\ b_0 & b_1 & b_2 \ldots b_n & \cdot & \ldots \\ \cdot & a_0 & a_1 \ldots a_{n-1} & a_n & \ldots \\ \cdot & b_0 & b_1 \ldots b_{n-1} & b_n & \ldots \\ \cdot & \cdot & \cdot \ldots \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}^{(2n)}$$

Aus dieser Determinante der Ordnung $2n$ bilde ich die Schar von Determinanten der Ordnung 2μ, indem ich die letzten $2(n-\mu)$ Zeilen von T_{2n} wegstreiche und aus der übrig bleibenden Matrize die willkürlich gewählten Kolonnen der Indices

$$i_1 < i_2 < i_3 < \cdots < i_{2\mu}$$

zu einer Determinante zusammenstelle. Nur wenn $i_{2\mu} \leqq n + \mu$ ist, wird die Determinante von Null verschieden sein können, da für

$i_{2\mu} > n + \mu$ die letzte Kolonne nur Nullen enthält. Die so entstehende Determinante ist unzweideutig durch die Bezeichnung

$$| i_1, i_2, \ldots i_{2\mu-1}, i_{2\mu} |$$

bestimmt; die ganze Schar der so bestimmten Determinanten bezeichnen wir durch

$$D_{2\mu},$$

diejenigen Determinanten aus $D_{2\mu}$, für welche $i_1 = 1$ ist, mit

$$D'_{2\mu}.$$

Es wird in der eingeführten Bezeichnung

$$T_{2n-2} = | 1, 2, \ldots 2n-2 |, \quad T_{2n-4} = | 1, 2, \ldots 2n-4 |, \ldots$$

Wir führen endlich noch folgende Bezeichnung ein:

$$| 1, 2, \ldots \lambda, \ \lambda + 1 + \alpha, \ n - \varkappa + \lambda + 2, \ldots n + \varkappa | = \tau_\alpha^{(2\varkappa-\lambda-1)};$$
$$(\alpha = 0, 1, \ldots n - \varkappa)$$

die so herausgehobenen Determinanten τ treten gewissermafsen als die Bausteine der ganzen Schar $D_{2\varkappa}$ auf; es wird

$$\tau_0 = | 1, \ldots 2\varkappa - 1, \ 2\varkappa |,$$
$$\tau_1 = | 1, \ldots 2\varkappa - 1, \ 2\varkappa + 1 |, \ldots \tau_{n-\varkappa} = | 1, \ldots 2\varkappa - 1, \ n + \varkappa |$$
$$\ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots$$
$$\tau_0^{(2\varkappa-1)} = | 1, \ n - \varkappa + 2, \ldots n + \varkappa |,$$
$$\tau_1^{(2\varkappa-1)} = | 2, \ n - \varkappa + 2, \ldots n + \varkappa |, \ldots \tau_{n-\varkappa}^{(2\varkappa-1)} = | n - \varkappa + 1, \ldots n + \varkappa |$$

Dann stellt sich die zu untersuchende Funktion so dar:

$$(1) \qquad \varphi = \tau_0 x^{n-\varkappa} + \tau_1 x^{n-\varkappa-1} + \tau_2 x^{n-\varkappa-2} + \cdots + \tau_{n-\varkappa}.$$

Unsere Frage ist im Grunde identisch mit derjenigen nach den Eigenschaften der Determinanten $D_{2\varkappa}$, betrachtet hinsichtlich des Modulsystems $D'_{2\varkappa+2}$, so dafs sie aufs engste mit der Forderung zusammenhängt: es sollen Funktionen der $D_{2\varkappa}$ gefunden werden, welche lineare Aggregate der $D'_{2\varkappa+2}$ sind. Ich habe nun l. c. S. 329 auf einfache Weise eine Formel abgeleitet, von der ein specieller Fall durch die Kongruenz

$$(3) \qquad \tau_\alpha^{(\lambda)} \tau_\beta^{(\lambda+1)} - \tau_\beta^{(\lambda)} \tau_\alpha^{(\lambda+1)} \equiv 0 \ (\text{mod. } D'_{2\varkappa+2})$$

gegeben ist; sie ist die Grundlage für alles Folgende. Aus ihr ergeben sich z. B. leicht die Formeln

$$\tau_\alpha \tau'_\beta \tau''_\gamma \equiv \tau_\beta \tau'_\gamma \tau''_\alpha \equiv \tau_\gamma \tau'_\alpha \tau''_\beta,$$
$$\tau_0 \tau'_\alpha - \tau'_0 \tau_\alpha \equiv 0, \quad \tau'_0(\tau_\alpha \tau''_\beta - \tau''_0 \tau_\alpha) \equiv 0, \quad \tau'_0 \tau''_0 (\tau_0 \tau'''_\alpha - \tau'''_0 \tau_\alpha) \equiv 0, \ \ldots$$

immer hinsichtlich [redacted] *des Modulsystems* $D'_{2\varkappa+2}$. Aus der letzten Reihe

von Resultaten folgt rein arithmetisch, dafs wenn die Bedingungen (2) erfüllt sind, aufser (1) auch noch die Funktionen

$$\tau_0^{(\lambda)} x^{n-\varkappa} + \tau_1^{(\lambda)} \cdot x^{n-\varkappa-1} + \tau_2^{(\lambda)} x^{n-\varkappa-2} + \cdots + \tau_{n-\varkappa}^{(\lambda)}$$

bis auf einen konstanten Faktor den gröfsten gemeinsamen Teiler von f, g darstellen. Bei der letzten Reihe von Resultaten ist ferner zu bemerken, dafs die auf den linken Seiten auftretenden Faktoren $\tau_0', \tau_0'\tau_0'', \ldots$ nicht weggehoben werden dürfen, da es sich ja stets um Kongruenzen handelt.

Die oben über die Bedeutung der τ gemachte Bemerkung läfst sich durch den Umstand begründen, dafs jede der Determinanten $|i_1, i_2, \ldots i_{2\varkappa}|$ mod. $D'_{2\varkappa+2}$ durch die $\tau_0, \tau_1, \ldots \tau_{n-\varkappa}$ dargestellt werden kann. In der schon oben angeführten Arbeit habe ich die Formel in etwas anderer Form gegeben, welche dies zeigt; sie lautet

$$\tau_0^{2(2\varkappa-\lambda-2)} \cdot \{\tau_0^{2\varkappa-\lambda-1} \cdot |\, 1, \ldots \lambda,\ \lambda+1+m_1, \ldots \lambda+1+m_{2\varkappa-\lambda}\,| - \begin{vmatrix} \tau_{m_1}, & \tau_{m_1-1}, & \cdots \tau_{m_1-(2\varkappa-\lambda-1)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \tau_{m_{2\varkappa-\lambda}}, & \tau_{m_{2\varkappa-\lambda}-1}, & \cdots \tau_{m_{2\varkappa-\lambda}-(2\varkappa-\lambda-1)} \end{vmatrix} \} \equiv 0. \tag{4}$$

Am einfachsten wird dieselbe durch Induktion bewiesen. Es braucht kaum bemerkt zu werden, dafs auch hier die Potenzen von τ_0, die als Faktoren auftreten, nicht weggehoben werden können. Nebenbei erwähne ich, dafs alle

$|\, i_1, i_2, \ldots i_{2\varkappa-1}, n+\varkappa\,|$ durch die $\tau_0', \tau_1', \ldots \tau'_{n-\varkappa}$

$|\, i_1, i_2, \ldots i_{2\varkappa-2}, n+\varkappa-1, n+\varkappa\,|$ durch die $\tau_0'', \tau_1'', \ldots \tau''_{n-\varkappa}$

. . . . . .

in ähnlicher Weise ausgedrückt werden können, woraus sich dann interessante Kongruenzen folgern lassen.

Aus (4) ergiebt sich für $\lambda = 2\varkappa - 2$, dafs

$$\tau_\alpha \tau_\beta \equiv \tau_{\alpha-1}\tau_{\beta+1} \equiv \tau_{\alpha-2}\tau_{\beta+2} \equiv \cdots \text{ (modd. } \tau_0,\ D'_{2\varkappa+2})$$

und also, dafs

$$\tau_\alpha \tau_\beta \equiv 0 \quad \text{(modd. } \tau_0,\ D'_{2\varkappa+2}) \tag{5}$$

wird. So ist z. B.

$$\tau_1\tau_\alpha \equiv \tau_0\{\tau_{\alpha+1} + |\, 1, 2, \ldots 2\varkappa-2,\ 2\varkappa,\ 2\varkappa+\alpha\,|\,\}$$

$$\tau_2\tau_\alpha \equiv \tau_0\{\tau_{\alpha+2} + |\, 1, 2, \ldots 2\varkappa-2,\ 2\varkappa,\ 2\varkappa+\alpha+1\,| + |\, 1, 2, \ldots 2\varkappa-2,\ 2\varkappa+1,\ 2\varkappa+\alpha\,|\,\}$$

. . . . . .

Ebenso ergiebt sich aus (4) für $\lambda = 2\varkappa - 3$, mit Berücksichtigung von (5),

(6) $$\tau_0(\tau_{a_1}\tau_{a_2}\tau_{a_3}) \equiv 0 \pmod{\tau_0^3,\ D'_{2\varkappa+2}}$$

und ebenso weiter

(7) $$\tau_0^4(\tau_{a_1}\tau_{a_2}\tau_{a_3}\tau_{a_4}) \equiv 0 \pmod{\tau_0^7,\ D'_{2\varkappa+2}}$$

u. s. f. Bedeutet p eine hinlänglich hohe, übrigens ihrer unteren Grenze nach leicht bestimmbare Zahl, dann ist

(8) $$\tau_0^p \cdot (\tau_{a_1}\tau_{a_2} \dots \tau_{a_\nu}) \equiv 0, \pmod{\tau_0^{p+\nu-1},\ D'_{2\varkappa-2}}$$

so lange ν nicht gröfser wird als $2\varkappa$. Wird dagegen ν gröfser als $2\varkappa$, etwa $\nu = 2\varkappa r + s$, so entsteht

(8*) $$\tau_0^p \cdot (\tau_{a_1}\tau_{a_2} \dots \tau_{a_\nu}) \equiv 0 \pmod{\tau_0^{p+\nu-(r+1)},\ D'_{2\varkappa+2}}.$$

Die aus (4) abgeleiteten Formeln führen, ihrerseits auf (4) angewendet, zu neuen Resultaten. Ich schreibe jene Formel in der Gestalt

$$\tau_0^{p+2\varkappa-\lambda-1} \cdot |\ 1, \dots \lambda,\ \ \lambda+1+m_1, \dots \lambda+1+m_{2\varkappa-\lambda}\ | \equiv \tau_0^p \cdot \Sigma \pm \tau_{i_1}\tau_{i_2} \dots \tau_{i_{2\varkappa-\lambda}}$$

und erhebe diese Kongruenz jetzt in die Potenz mit dem Exponenten

$$q = E\left(\frac{2\varkappa}{\lambda}\right) + 1, \qquad (\lambda > 0)$$

dann entsteht vermöge (8) und (8*) bei veränderter Bedeutung von p

(9) $$\tau_0^p \cdot |\ 1, \dots \lambda,\ \ \lambda+1+m_1, \dots \lambda+1+m_{2\varkappa-\lambda}\ |^q \equiv 0 \pmod{\tau_0^{p+1},\ D'_{2\varkappa+2}}.$$

Man erkennt hieraus, dafs, wenn sämtliche Elemente von $D'_{2\varkappa+2}$ gleich Null werden, die $q$te Potenz von $|\ 1, \dots \lambda,\ \lambda+1+m_1, \dots\ |$ durch τ_0 teilbar wird, so dafs dann also mit τ_0 zugleich alle Elemente von $D'_{2\varkappa}$ verschwinden.

Die benutzte Gedankenfolge läfst sich auch in folgender Weise noch verwerten: aus (4) folgt

$$\tau_0^p \cdot |\ 1, \dots \lambda,\ \lambda+1+m_1, \dots\ | \cdot |\ 1, \dots \mu,\ \mu+1+n_1, \dots\ |\ \tau_0^{4\varkappa-\lambda-\mu-2} \equiv \tau_0^p \cdot \Sigma \pm \tau_{i_1}\tau_{i_2} \dots \tau_{i_{4\varkappa-\lambda-\mu}};$$

ist $2\varkappa \leqq \lambda + \mu$ also $4\varkappa - \lambda - \mu \leqq 2\varkappa$, so ergiebt dies bei veränderter Bedeutung von p die Kongruenz

(10) $$\tau_0^p \cdot |\ 1, \dots \lambda,\ \lambda+1+m_1, \dots\ | \cdot |\ 1, \dots \mu,\ \mu+1+n_1, \dots\ | \equiv 0 \pmod{\tau_0^{p+1},\ D'_{2\varkappa+2}};\quad (\lambda+\mu \geqq 2\varkappa).$$

Die Kongruenz (9) wurde für $\lambda \geqq 1$ abgeleitet, und sie gilt auch nur

hierfür. Wird $\lambda = 0$ angenommen, so ist ein Ergänzungssatz nötig; derselbe ergiebt gewisse Beziehungen von a_0, b_0 zu den τ. Diese folgen aus der Betrachtung der identisch verschwindenden Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_{2\varkappa}} \\ b_0 & b_{i_1} & b_{i_2} & \dots & b_{i_{2\varkappa}} \\ \cdot & a_{i_1-1} & a_{i_2-1} & \dots & a_{i_{2\varkappa-1}} \\ \cdot & b_{i_1-1} & b_{i_2-1} & \dots & b_{i_{2\varkappa-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0 & a_{i_1} & a_{i_2} & \dots & a_{i_{2\varkappa}} \end{vmatrix}^{(2\varkappa+1)};$$

entwickelt man dieselbe nach den Elementen ihrer letzten Zeile, so entsteht

$$a_0 \,|\, i_1, i_2, \dots i_{2\varkappa} \,| = a_{i_1} \,|\, 1, i_2, \dots i_{2\varkappa} \,| - a_{i_2} \,|\, 1, i_1, i_3, \dots i_{2\varkappa} \,| + \cdots,$$

und erhebt man dies in eine hinlänglich hohe Potenz, so folgt

$$(11) \qquad \tau_0^{p} \cdot \{a_0 \,|\, i_1, \dots i_{2\varkappa} \,|\}^{q} \equiv 0 \quad (\text{modd. } \tau_0^{p+1},\ D'_{2\varkappa+2}).$$

Hier darf auch i_1 gröfser als 1 sein, was oben nicht anging. Aus (11) folgt, dafs, wenn alle Elemente von $D'_{2\varkappa+2}$ verschwinden, während a_0 oder b_0 nicht gleich Null ist, mit τ_0 gleichzeitig alle Elemente von $D_{2\varkappa}$ zu Null werden.

Wendet man denselben Satz auf $D'_{2\varkappa+4}$ und $D_{2\varkappa+2}$ an u. s. f., so erkennt man, dafs für

$$(2) \qquad T_{2n} = 0, \quad T_{2n-2} = 0, \ \dots \ T_{2\varkappa+2} = 0$$

jede Determinante D_{2k} zugleich mit $T_{2\varkappa}$ verschwindet, und dafs alle $a_0\tau_1$, $a_0\tau_2$, $\dots$ $a_0\tau_{n-\varkappa}$ sowie die $b_0\tau_1$, $b_0\tau_2$, $\dots$ $b_0\tau_{n-\varkappa}$ durch τ_0 teilbar werden.

Mit Hilfe der abgeleiteten allgemeinen Resultate ist es nun leicht, die aufgeworfenen Fragen zu erledigen.

Zunächst erschliefst man aus der bekannten Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{2\varkappa-2} & x^{\varkappa-1} \cdot f \\ b_0 & b_1 & \dots & b_{2\varkappa-2} & x^{\varkappa-1} \cdot g \\ \cdot & a_0 & \dots & a_{2\varkappa-3} & x^{\varkappa-2} \cdot f \\ \cdot & b_0 & \dots & b_{2\varkappa-3} & x^{\varkappa-2} \cdot g \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{vmatrix}^{(2k)}$$

die schon oben erwähnte Beziehung

$$(12) \qquad \varphi = f \cdot G(x) + g \cdot F(x);$$

in ihr bedeuten F, G ganze Funktionen von x des Grades $(\varkappa - 1)$.

Sie zeigt, dafs für jedes Modulsystem, in welchem φ nicht verschwindet, diese Funktion ein Vielfaches des auch für das Modulsystem geltenden gröfsten gemeinsamen Teilers werden wird.

Um aber φ völlig zu charakterisieren, betrachte ich in zweiter Linie die Determinante

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_\varkappa & f \\ \tau_0 & \tau_1 & \tau_2 & \dots & \tau_\varkappa & \varphi \cdot x^\varkappa \\ \cdot & \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_{\varkappa-1} & \varphi \cdot x^{\varkappa-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \dots & \tau_0 & \varphi \end{vmatrix}^{(\varkappa+2)}.$$

Entwickelt man diese nach den Elementen der letzten Kolonne und setzt dabei

$$(13)\quad \begin{cases} a_0 \cdot |\, 1, \dots 2\varkappa \,| & = d_0 \\ a_1 \cdot |\, 1, \dots 2\varkappa \,| - a_0 \cdot |\, 1, \dots 2\varkappa-1,\ 2\varkappa+1 \,| & = d_1 \\ a_2 \cdot |\, 1, \dots 2\varkappa \,| - a_1 \cdot |\, 1, \dots 2\varkappa-1,\ 2\varkappa+1 \,| & \\ \qquad + a_0 \cdot |\, 1, \dots 2\varkappa-2,\ 2\varkappa,\ 2\varkappa+1 \,| & = d_2 \\ \cdot & \end{cases}$$

sowie

$$d_0 x^\varkappa + d_1 x^{\varkappa-1} + d_2 x^{\varkappa-2} + \dots = f_1,$$

dann wird die obige Determinante nach dem Modulsystem $D'_{2\varkappa+2}$ dem Ausdrucke

$$\tau_0^{\varkappa-1} \cdot \{\tau_0^2 \cdot f - \varphi \cdot f_1\}$$

kongruent. Wenn man andererseits die höchsten Potenzen von x in der letzten Kolonne der obigen Determinante durch Kolonnensubtraktion tilgt, dann ergiebt sich für dieselbe der Ausdruck

$$(14)\quad \sum_{i=1}^{n-\varkappa} x^{n-\varkappa-i} \cdot \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_\varkappa & a_{\varkappa+i} \\ \tau_0 & \tau_1 & \dots & \tau_\varkappa & \tau_{\varkappa+i} \\ \cdot & \tau_0 & \dots & \tau_{\varkappa-1} & \tau_{\varkappa+i-1} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \end{vmatrix}.$$

Jede Determinante der Summe denke man sich nach den Elementen der ersten Zeile zerlegt. Dann hat jeder der Faktoren der a_μ die in (4) auftretende Determinantenform und läfst sich also nach Multiplikation mit einem τ_0^p gemäfs (4) umgestalten (modd. $D'_{2\varkappa+2}$). Dadurch tritt dann jede der Determinanten aus (14) in einer anderen Determinantenform auf, welche zwei gleiche Zeilen enthält und also identisch verschwindet. Es ist also (14) nach unserem Modulsysteme der Null kongruent, d. h. es wird

$$\tau_0^{\varkappa-1+p} \cdot \{\tau_0^2 \cdot f - [redacted] D'_{2\varkappa+2}).$$

Eine entsprechende Formel ergiebt sich für

$$(13^*)\quad \begin{cases} b_0 \cdot |\,1, \ldots 2\varkappa\,| & = e_0 \\ b_1 \cdot |\,1, \ldots 2\varkappa\,| - b_0 \cdot |\,1, \ldots 2\varkappa-1,\ 2\varkappa+1\,| & = e_1 \\ b_2 \cdot |\,1, \ldots 2\varkappa\,| - b_1 \cdot |\,1, \ldots 2\varkappa-1,\ 2\varkappa+1\,| & \\ \qquad + b_0 \cdot |\,1, \ldots 2\varkappa-2,\ 2\varkappa,\ 2\varkappa+1\,| & = e_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}$$

und

$$e_0 x^\varkappa + e_1 x^{\varkappa-1} + e_2 x^{\varkappa-2} + \cdots = g_1;$$

somit erhält man bei veränderter Bedeutung von p

$$(15)\quad \tau_0^p \cdot \{\tau_0^2 \cdot f - \varphi \cdot f_1\} \equiv 0,\quad \tau_0^p \cdot \{\tau_0^2 \cdot g - \varphi \cdot g_1\} \equiv 0 \quad (\text{modd. } D'_{2\varkappa+2}).$$

Die Formeln (12), (15) entsprechen genau denjenigen, durch welche der gröfste gemeinsame Teiler von f, g definiert wird. Sie geben also die Beantwortung der aufgeworfenen Frage.

Es ist endlich auch noch von Interesse, die Resultante der beiden Funktionen f_1, g_1 zu berechnen. Die Koefficienten dieser Funktionen sind durch (13), (13*) gegeben. Schreibt man die Resultante in der gewöhnlichen Form auf, so ist eine Reduktion durch Kolonnensubtraktion sehr naheliegend. Das Schlufsresultat dieser Operationen ist, dafs die gesuchte Resultante den Wert

$$\tau_0^{2\varkappa+1}$$

besitzt.

Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurven, übersichtlich dargestellt.

(Von Th. Reye in Strafsburg i./E.)

Unter den algebraischen Kurven sind die Raumkurven dritter Ordnung nächst den Kegelschnitten die einfachsten und wichtigsten. Sie haben für die Geometrie des Raumes eine ähnliche Bedeutung, wie die Kurven zweiter Ordnung für die Ebene. Seit etwa dreifsig Jahren haben ihnen die Mathematiker der leitenden Kulturvölker ein lebhaftes Interesse zugewendet, angeregt durch zahlreiche Sätze, welche Chasles 1857 ohne Beweis über die kubischen Raumkurven veröffentlichte;[1]) schon besitzen wir über sie eine reichhaltige Litte-

1) Chasles in den Comptes Rendus 1857 und in Liouville, Journal de Math. 1857, p. 397. Schon 1837 stellte Chasles in der Note 33 seines „Aperçu [illegible]“ über die kubischen Raumkurven und deren Erzeugung wichtige [illegible]

ratur.[1]) Vielleicht ist deshalb die nachfolgende Übersicht über unsere gegenwärtige Kenntnis der kubischen Raumkurven, in welche ich einige neue Sätze einreihe, manchem nicht unwillkommen. Der Fachmann wird darin den inneren Zusammenhang der mannigfaltigen Eigenschaften dieser Kurven ohne Schwierigkeit erkennen, obwohl ich mich wegen der Beweise meistens auf die Quellenschriften beziehen und darauf beschränken mufs, etwaige analoge Eigenschaften der Kegelschnitte und Flächen zweiter Ordnung hervorzuheben. Bei gewissen, insbesondere metrischen Eigenschaften füge ich die Begründung hinzu.

Schon 1827 gab Möbius[2]) eine analytische Darstellung der kubischen Raumkurve k^3 und bewies, dafs die Tangenten derselben von einer beliebigen Krümmungsebene in den Punkten eines Kegelschnittes getroffen werden. Chasles stellte 1837 den Satz auf, dafs diese Tangenten auf einer abwickelbaren Fläche vierter Ordnung liegen, und Cayley[3]) bewies 1845, dafs durch jeden Punkt des Raumes eine Sehne der Kurve geht. Diese wie die meisten bekannteren Eigenschaften der kubischen Raumkurve sind sogenannte projektive und beziehen sich nicht auf Mafsverhältnisse. Zu den projektiven Eigenschaften der Kegelschnitte nun giebt es durchweg analoge bei den kubischen Raumkurven, die allerdings viel reichhaltiger sind als jene.

Wie ein Kegelschnitt aus je zwei seiner Punkte durch projektive Strahlenbüschel, so wird eine kubische Raumkurve aus je zwei ihrer Sehnen durch projektive Ebenenbüschel projiziert; zugleich aber werden aus je zwei Punkten der Raumkurve ihre übrigen Punkte durch homologe Strahlen und ihre Sehnen durch homologe Ebenen kollinearer Bündel projiziert. Jede kubische Raumkurve k^3 kann demnach einerseits durch drei projektive Ebenenbüschel erzeugt werden, deren Achsen drei beliebige Sehnen von k^3 sind (Chasles), andrerseits zugleich mit

---

1) Hervorzuheben sind die betr. Abhandlungen von Cremona (Annali di Matematica I. Serie T. 1. 2. 5; Crelles Journal für Math. 58, 60, 63; Nouvelles Annales de Math. II. Sér. T. 1), Schröter (Crelles Journal 56), v. Staudt (Beiträge zur Geometrie der Lage, 3. Heft, Nürnberg 1860), R. Sturm (Crelles Journal 79, 80, 86; Math. Annalen 26), Schubert (Kalkül der abzählenden Geometrie, Lpz. 1879), Voss (Math. Annalen 13), Franz Meyer (Apolarität und rationale Kurven, Tüb. 1883), Hnr. Krüger (Die Fokaleigenschaften der kub. Raumkurven, Inaug.-Diss. Breslau 1885). Die Untersuchungen der erstgenannten Autoren hat Schröter in seiner „Theorie der Oberflächen zweiter Ordnung und der Raumkurven dritter Ordnung“ (Lpz. 1880) und habe ich in meiner „Geometrie der Lage“ (II. Abtlg., Hann. 1868; 2. Aufl. 1880) systematisch bearbeitet und weiter geführt.

2) Möbius, Der barycentrische Kalkul, §. 98, S. 120.

3) Liouville, Journal de Math. 10.

allen ihren Sehnen durch zwei kollineare Bündel, deren Mittelpunkte beliebig auf k^3 liegen (Seydewitz[1])).

Die Raumkurve k^3 kann mit je zwei ihrer Sehnen durch eine geradlinige Fläche F^2 zweiter Ordnung verbunden werden, welche eine Schar von Sehnen enthält. Diese Fläche ist ein Kegel, wenn die beiden Sehnen sich schneiden; und zwar liegt der Schnittpunkt auf k^3, weil keine Ebene mehr als drei Punkte mit k^3 gemein hat, und ist der Mittelpunkt des Kegels. Die kubische Raumkurve wird demnach aus jedem ihrer Punkte durch einen Kegel zweiter Ordnung projiziert (Chasles). Derselbe enthält die Tangente des Punktes und wird in ihr von der Krümmungs- oder Schmiegungsebene des Punktes berührt. Zwei beliebige solche Kegel schneiden sich in k^3 und der Sehne s, welche ihre beiden Mittelpunkte verbindet; sie werden durch den Ebenenbüschel s projektiv so aufeinander bezogen, dafs je zwei homologe Strahlen in einem Punkte von k^3 sich schneiden.

Die Raumkurve k^3 besteht hiernach aus einem einzigen Linienzuge; sie hat mit jeder Ebene drei Punkte gemein, von denen mindestens einer reell ist, und welche alle oder zu zweien zusammenfallen, wenn k^3 die Ebene oskuliert oder berührt; sie hat mindestens eine und höchstens drei reelle Asymptoten, die sie in unendlich fernen Punkten tangiert. Mit jeder ihrer Asymptoten kann k^3 durch einen Cylinder zweiter Ordnung verbunden werden. Nach Seydewitz (a. a. O.) heifst die kubische Raumkurve eine räumliche Hyperbel, wenn sie drei verschiedene reelle Asymptoten hat, eine räumliche Ellipse, wenn von ihren drei Asymptoten zwei imaginär sind, eine parabolische Hyperbel bezw. eine räumliche Parabel, wenn zwei resp. alle drei Asymptoten im Unendlichen zusammenfallen, wenn also die Kurve von der unendlich fernen Ebene berührt resp. oskuliert wird.

Die reellen Sehnen von k^3 sind teils eigentliche, welche reelle, teils uneigentliche, welche je zwei konjugiert imaginäre Punkte der Raumkurve verbinden; die Tangenten bilden den Übergang von den eigentlichen Sehnen zu den uneigentlichen und trennen diese von jenen. Jede geradlinige Fläche zweiter Ordnung, welche k^3 mit zwei Tangenten verbindet, wird durch letztere in zwei Streifen geteilt, von denen der eine nur eigentliche, der andere nur uneigentliche Sehnen der Raumkurve, und zwar unendlich viele, enthält. In einer beliebigen Ebene liegen ebenso viele reelle Sehnen wie reelle Punkte von k^3, also mindestens eine und höchstens drei; die Sehnen von k^3 bilden eine Strahlenkongruenz dritter Klasse erster Ordnung.

---

1) Grunerts Archiv für Math. 10, 1847.

Durch die kubische Raumkurve k^3 gehen zweifach unendlich viele Flächen zweiter Ordnung, die sich büschelweise noch in je einer Sehne von k^3 schneiden und einen speciellen Flächenbündel bilden. Durch zwei beliebige Punkte geht allemal eine dieser Flächen, und zwar verbindet sie die beiden durch die Punkte gehenden Sehnen mit k^3. Auch mit jeder sie schneidenden Geraden und mit jedem ihr in drei Punkten begegnenden Kegelschnitte kann die Raumkurve durch eine Fläche zweiter Ordnung verbunden werden; dieselbe enthält eine Schar von Sehnen, welche die Gerade bezw. den Kegelschnitt treffen. Die Punkte von k^3 werden durch die Sehnen einer solchen Schar involutorisch gepaart, und je nachdem die Doppelpunkte der Punktinvolution auf k^3 imaginär oder reell sind, besteht die Schar aus lauter eigentlichen Sehnen oder teils aus eigentlichen teils aus uneigentlichen Sehnen. Eine beliebige Fläche zweiter Ordnung hat mit k^3 i. a. sechs Punkte gemein.

Wenn an einem Kegel zweiter Ordnung, dessen Mittelpunkt auf k^3 liegt, eine bewegliche Sehne von k^3 tangierend hingleitet, so beschreibt sie eine Fläche vierter Ordnung, welche k^3 zur Doppellinie hat. Die Geraden dieser Fläche berühren unendlich viele Kegel zweiter Ordnung, deren Mittelpunkte auf k^3 liegen, und sind nach einem Satze von Clebsch[1]) in einem linearen Komplexe enthalten. Auch die Tangenten der kubischen Raumkurve k^3 liegen auf einer so erzeugten Fläche vierter Ordnung; desgleichen die Sehnen von k^3, welche eine beliebige Gerade schneiden.

Eine kubische Raumkurve ist eindeutig bestimmt und durch drei projektive Ebenenbüschel oder durch zwei kollineare Bündel leicht zu erzeugen, wenn von ihr sechs Punkte, oder fünf Punkte und eine Sehne, oder drei resp. zwei Punkte und drei resp. vier Sehnen beliebig gegeben sind. Sie ist als partieller Schnitt von Kegeln zweiter Ordnung eindeutig bestimmt, wenn von ihr 6, 5, 4, 3 Punkte und bezw. 0, 1, 2, 3 Tangenten derselben gegeben sind. Zwei verschiedene kubische Raumkurven können höchstens fünf Punkte gemein haben, und liegen, wenn dieser Fall eintritt, auf einer geradlinigen Fläche zweiter Ordnung. Ist diese Fläche ein Kegel, so projiziert sie beide Kurven aus einem der fünf gemeinsamen Punkte; ist sie dagegen eine Regelfläche, so besteht ihre eine Regelschar aus Sehnen der einen, die andere aber aus Sehnen der anderen Raumkurve.

Einem räumlichen Fünfeck können zweifach unendlich viele kubische Raumkurven umschrieben werden. Eine durch keinen Eck-

1) Math. Annalen 2.

punkt gehende Ebene α schneidet diese Kurven in Poldreiecken eines polaren Feldes, die zehn Kanten des Fünfecks aber und deren Gegenebenen in zehn Punkten und deren Polaren.[1]) Dieser Satz enthält eine Eigenschaft von acht beliebigen Punkten einer kubischen Raumkurve und ist dem Lehrsatze des Desargues analog. Der Ordnungskegelschnitt des polaren Feldes ist der Ort der Punkte, in denen die Ebene je eine der Raumkurven berührt. Unter den ∞^2 kubischen Raumkurven giebt es i. a. fünf, welche zwei gegebene Gerade treffen, sechs, welche die Ebene α oskulieren, zehn, welche eine Gerade a treffen und durch einen Punkt A oder in eine Ebene α eine Tangente schicken, und zwanzig, welche zwei beliebige Ebenen α, α' berühren (Sturm).[2]) — Die ∞^3 Flächen zweiter Ordnung, welche durch beliebige sechs Punkte einer kubischen Raumkurve k^3 gehen, werden von deren Sehnen in Punktinvolutionen geschnitten.[3]) Von jeder dieser Involutionen liegen zehn Punktenpaare in den zehn paar Gegenebenen des Sechsecks der sechs Punkte, und ein elftes liegt auf k^3; aus den Doppelpunkten der Involutionen werden die sechs Punkte durch je sechs Strahlen eines Kegels zweiter Ordnung projiziert.

Gleichwie zwei einem Kegelschnitte eingeschriebene Dreiecke als Poldreiecke ein polares Feld bestimmen und zugleich einem anderen Kegelschnitt umschrieben sind, so bestimmen zwei einer k^3 eingeschriebene Tetraeder als Poltetraeder ein räumliches Polarsystem, und zugleich oskulieren ihre acht Ebenen eine andere kubische Raumkurve. Die Raumkurve k^3 und ein ihr eingeschriebenes Tetraeder werden von einer Ebene in einem Dreieck und einem Vierseit geschnitten, welche einem Kegelschnitt umschrieben sind (Chasles); diese Eigenschaft von sieben beliebigen Punkten der k^3 ist gleichfalls der soeben vom Kegelschnitte angeführten analog.

Zwei kubische Raumkurven haben i. a. nur zehn gemeinsame Sehnen. Wenn sie eine Schar windschiefer Sehnen gemein haben, so liegen sie mit diesen auf einer Fläche zweiter Ordnung und schneiden sich in vier Punkten. Letztere können paarweise konjugiert imaginär sein; sie fallen teilweise oder alle zusammen, wenn die beiden Kurven sich berühren, oskulieren oder hyperoskulieren. Der Satz läfst sich auf den bekannten zurückführen: In vier projektiven Ebenenbüscheln giebt es i. a. vier Gruppen homologer Ebenen, die durch je einen Punkt gehen. Auf einer Regelfläche zweiter Ordnung giebt es un-

1) Reye in der Ztschr. f. Math. und Physik, 1868, S. 523.

2) Über die Anzahlen kubischer Raumkurven, welche gegebenen Bedingungen genügen, giebt Schubert a. a. O. S. 163—184 den reichsten Aufschluſs.

3) Reye in den Annali di Matematica, II. Serie, T. 2, p. 130.

endlich viele kubische Raumkurven, die vier beliebige Punkte der Fläche und eine Schar von Sehnen gemein haben; sie schneiden diese Sehnen in Punktinvolutionen. — Es giebt i. a. sechs kubische Raumkurven, die sechs gegebene Gerade zu Sehnen haben (Sturm).

Wie ein Kegelschnitt ein polares ebenes Feld bestimmt, so bestimmt eine kubische Raumkurve k^3 ein sogenanntes Nullsystem, in welchem nach Möbius[1]) jeder Ebene ein in ihr liegender Pol oder „Nullpunkt" und umgekehrt jedem Punkte eine durch ihn gehende Polarebene oder „Nullebene" zugeordnet ist. Der Schnittpunkt S zweier Tangenten des Kegelschnittes hat die Verbindungslinie s der beiden Berührungspunkte zur Polare, und wenn S eine Gerade beschreibt, so dreht sich s um deren Pol. Der Schnittpunkt P dreier Schmiegungsebenen der Raumkurve k^3 hat analog die Verbindungsebene π der drei Anschmiegungspunkte zur Nullebene; er liegt in ihr (Chasles), und wenn P eine Ebene beschreibt, so dreht sich π um deren Nullpunkt. Die beiden Tetraeder, welche von vier Punkten der Kurve und von deren Schmiegungsebenen gebildet werden, sind also jedes dem anderen um- und zugleich eingeschrieben (Schröter). Die Schmiegungsebenen von k^3 haben ihre eigenen Anschmiegungspunkte zu Nullpunkten.

Die Raumkurve k^3 heifst eine Nullkurve des durch sie bestimmten Nullsystemes. Letzteres hat übrigens siebenfach unendlich viele kubische Nullkurven, denn durch drei beliebige Punkte gehen einfach unendlich viele solche (v. Staudt a. a. O. Nr. 486). Diese ∞^1 Nullkurven liegen perspektiv auf einem kubischen Kegel, welcher die drei Nullebenen der Punkte oskuliert; ihre homologen Tangenten und Schmiegungsebenen schneiden die Ebene der drei Punkte in je einem Punkte resp. einer Tangente einer Kurve vierter Ordnung dritter Klasse.

Jeder Geraden g ist in dem Nullsysteme oder durch die kubische Raumkurve k^3 eine Gerade g_1 als Polare zugeordnet; durch g_1 gehen die Nullebenen aller Punkte von g, und auf g_1 liegen zugleich die Nullpunkte aller Ebenen von g. Ein beliebiger Ebenenbüschel g liegt demnach perspektiv zu der ihm zugeordneten Punktreihe g_1. Wenn zwei Gerade sich schneiden, so liegen auch ihre Polaren in einer Ebene, nämlich in der Nullebene des Schnittpunktes jener Geraden.

Jede durch einen Punkt gehende und in dessen Nullebene liegende Gerade fällt mit ihrer Polare zusammen und heifst ein Leitstrahl

---

1) Vgl. Möbius in Crelles Journal 10, S. 317 (1833) und in seiner „Statik" (Lpz. 1837), sowie Chasles im „Aperçu historique" (1837; 2. Aufl. 1865, S. 674).

des Nullsystemes. Wenn ein Leitstrahl eine Gerade schneidet, so liegt er auch mit deren Polare in einer Ebene. Der Komplex der Leitstrahlen ist ein linearer, d. h. seine durch einen beliebigen Punkt gehenden oder in irgend einer Ebene liegenden Strahlen bilden einen Büschel erster Ordnung. Der Komplex enthält jeden Strahl, welcher zwei einander zugeordnete Gerade schneidet, jeden Strahlenbüschel erster Ordnung, welcher zwei, und jede Regelschar, welche drei seiner Strahlen verbindet. Zwei beliebige Gerade liegen mit ihren Polaren i. a. in einer Regelschar, deren Leitschar dem Komplexe angehört. Die Regelschar ist involutorisch, da ihre Strahlen in dem Nullsysteme einander paarweise zugeordnet sind; sie hat mit einer Ebene i. a. einen involutorischen Kegelschnitt gemein, dessen Involutionscentrum der Nullpunkt der Ebene ist (v. Staudt).

Der lineare Komplex der Leitstrahlen enthält alle Tangenten und alle „Schmiegungsstrahlen" der kubischen Raumkurve k^3, d. i. alle Strahlen, welche durch je einen Punkt von k^3 gehen und in dessen Schmiegungsebene liegen. Jeder andere Komplexstrahl schneidet die Tangentenfläche von k^3 in vier äquianharmonischen imaginären Punkten und liegt in vier äquianharmonischen Berührungsebenen von k^3 (Vofs, Sturm). Der Komplex und das Nullsystem sind bestimmt durch zwei einander zugeordnete windschiefe Gerade g, g_1 und einen zu g und g_1 windschiefen Leitstrahl; ebenso durch fünf beliebige Leitstrahlen.

Weil in dem Nullsysteme den Punkten der kubischen Raumkurve k^3 ihre Schmiegungsebenen zugeordnet sind, so bilden letztere einen kubischen Ebenenbüschel $\varkappa^3$. Jeder Sehne von k^3 ist eine „Achse" von $\varkappa^3$, d. h. eine Schnittlinie zweier Schmiegungsebenen, zugeordnet. Durch jeden Punkt P gehen drei Schmiegungsebenen von k^3, von denen mindestens eine reell ist; dieselben fallen alle oder teilweise zusammen, wenn P auf k^3 oder auf einer Tangente von k^3 liegt. In einer beliebigen Ebene liegt eine Achse und durch einen beliebigen Punkt gehen drei Achsen von $\varkappa^3$, von denen mindestens eine reell ist. Die kubische Raumkurve wird aus jedem nicht auf ihr liegenden Punkte durch einen Kegel dritter Ordnung vierter Klasse projiziert, welcher einen Doppelstrahl und drei in der Nullebene des Punktes liegende Wendestrahlen hat.

Der kubische Ebenenbüschel $\varkappa^3$ wird von seinen Achsen in projektiven Punktreihen geschnitten und kann durch beliebige drei dieser Reihen erzeugt werden. Je zwei seiner Ebenen werden von den übrigen in homologen Geraden und von seinen Achsen in homologen Punkten kollinearer Felder geschnitten. Diese Sätze ergeben sich

mittelst des Nullsystemes ohne weiteres aus den reciproken Sätzen über die Raumkurve k^3; sie sind bekannten Sätzen über die Tangenten der Kegelschnitte analog. Wie die Punkte und Tangenten von k^3 aus jedem Punkte dieser Raumkurve durch die Strahlen und Berührungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung projiziert werden, so werden die Schmiegungsebenen und Tangenten von k^3 von jeder Schmiegungsebene der Kurve in den Tangenten und Punkten einer Kurve zweiter Ordnung geschnitten. Die Tangenten und Schmiegungsebenen einer räumlichen Parabel sind zu den Strahlen und Berührungsebenen eines Kegels zweiter Ordnung parallel, weil diese kubische Raumcurve eine unendlich ferne Schmiegungsebene hat. Die Achsen der räumlichen Parabel werden von den Schmiegungsebenen in projektiv ähnlichen Punktreihen geschnitten, also proportional geteilt; sie schneiden zwei beliebige Schmiegungsebenen in homologen Punkten affiner Felder.

Die abwickelbare Tangentenfläche einer kubischen Raumkurve k^3 schneidet eine beliebige Ebene in einer Kurve dritter Klasse vierter Ordnung mit einer Doppeltangente und drei Rückkehrpunkten. Hat die Ebene drei reelle Punkte mit k^3 gemein, so geht sie durch eine uneigentliche Axe von $\varkappa^3$, und ihr Nullpunkt liegt auf einer uneigentlichen Sehne von k^3; und umgekehrt (Cremona). Durch die Punkte der eigentlichen Sehnen von k^3 geht nur je eine reelle Schmiegungsebene, und in den Ebenen der eigentlichen Achsen von $\varkappa^3$ liegt nur je ein reeller Punkt der Raumkurve (Joachimsthal).[1]) Die beiden parallelen Schmiegungsebenen von k^3, welche durch die unendlich ferne Axe von $\varkappa^3$ gehen, sind reell oder imaginär, je nachdem k^3 eine räumliche Ellipse oder eine räumliche Hyperbel ist; sie fallen zusammen mit einer Asymptoten-Ebene bei der parabolischen Hyperbel; bei der räumlichen Parabel rückt die eine in das Unendliche, und die andere wird unbestimmt.

Durch zwei beliebige Achsen des kubischen Büschels $\varkappa^3$ geht eine Fläche Φ^2 zweiter Klasse, welche eine Schar von Achsen desselben enthält und alle Ebenen von $\varkappa^3$ berührt. Schneiden sich die beiden Achsen, so reduziert sich Φ^2 auf einen Kegelschnitt, welcher in einer Ebene des Büschels $\varkappa^3$ von dessen übrigen Ebenen umhüllt wird. Dem kubischen Ebenenbüschel $\varkappa^3$ sind zweifach unendlich viele Flächen zweiter Klasse eingeschrieben, welche eine specielle Scharschar bilden und scharenweise noch je eine Achse von $\varkappa^3$ gemein haben; zwei beliebige Ebenen berühren allemal eine dieser Flächen. Zu der Scharschar

1) Crelles Journal 56, p. 45.

gehören auch die Kegelschnitte, welche die Tangentenfläche der Raumkurve k^3 mit deren Schmiegungsebenen, also mit den Ebenen von $\varkappa^3$ gemein hat.

Eine kubische Raumkurve ist bestimmt u. a. durch sechs Schmiegungsebenen oder durch 5, 3, 2 Schmiegungsebenen und bezw. 1, 3, 4 Achsen. Wenn zwei kubische Ebenenbüschel fünf Ebenen gemein haben, so sind sie einer Fläche zweiter Klasse umschrieben und haben je eine Schar von Geraden dieser Fläche zu gemeinsamen Achsen. Zwei kubische Ebenenbüschel haben i. a. nur zehn Achsen gemein. Wenn sie eine Schar gemeinsamer Achsen haben, so sind sie einer die Schar enthaltenden Fläche zweiter Klasse umschrieben und haben vier Ebenen gemein.

Im Nullsysteme heifsen die Ebenen, deren Nullpunkte unendlich fern liegen, Durchmesser-Ebenen; ihre Schnittlinien haben unendlich ferne Polaren und heifsen Durchmesser. Die Nullpunkte paralleler Ebenen liegen auf einem Durchmesser, und die Polaren paralleler Gerader in einer Durchmesserebene. Alle Durchmesser sind zu einander und zu den Durchmesserebenen parallel; sie gehen nämlich durch den Nullpunkt der unendlich fernen Ebene. Die in einer Durchmesserebene liegenden Leitstrahlen des Nullsystemes sind parallel, ihr Strahlenbüschel wird durch eine Verschiebung in der Richtung der Durchmesser nicht geändert. Auch der lineare Komplex der Leitstrahlen und das Nullsystem bleiben bei dieser Verschiebung ungeändert, während die kubische Nullkurve k^3 i. a. einen kubischen Cylinder beschreibt. Die Asymptotenebenen, welche der Kurve in ihren unendlich fernen Punkten sich anschmiegen, sind Durchmesserebenen des Nullsystemes und oskulieren diesen Cylinder im Unendlichen. Der Cylinder ist ein parabolischer zweiter Ordnung, wenn k^3 eine räumliche Parabel ist.

Die Nullpunkte der zu den Durchmessern normalen Ebenen liegen auf der „Hauptachse" des Nullsystemes. Diese Hauptachse h ist ein Durchmesser, welcher alle ihn treffenden Leitstrahlen rechtwinklig schneidet. Sie liegt mit einer beliebigen Geraden g und deren Polare g_1 auf einem gleichseitigen Paraboloide und schneidet die Gerade des kürzesten Abstandes von g und g_1 rechtwinklig. Das Nullsystem ist bestimmt durch seine Hauptachse h und einen beliebigen, nicht zu h normalen Leitstrahl. Es ändert sich weder durch eine Drehung um h noch durch eine Verschiebung in der Richtung von h. Der Abstand eines Leitstrahles l oder eines Punktes P von der Hauptachse ist proportional der Kotangente des Winkels, welchen l resp. die Nullebene von P mit der Hauptaxe bildet (Möbius.) — Von einer

kubischen Nullkurve k^3 schneidet die Hauptachse h i. a. vier Tangenten rechtwinklig. Die Schmiegungsebene eines beliebigen Punktes P von k^3 enthält das von P auf h gefällte Lot. Die zu h parallele Sehne von k^3 verbindet die beiden Kurvenpunkte, deren Schmiegungsebenen parallel sind.

Zwei einer kubischen Raumkurve k^3 eingeschriebene Tetraeder bestimmen, wie gesagt, als Poltetraeder ein räumliches Polarsystem. Von diesem und seiner Ordnungsfläche ist k^3 eine „kubische Polkurve", d. h. es können der k^3 unendlich viele Poltetraeder des Polarsystemes eingeschrieben werden; jeder Punkt von k^3 ist Eckpunkt von einem derselben.[1]) Die Ebenen der ∞^1 Tetraeder bilden einen zu k^3 reciprok-polaren kubischen Ebenenbüschel $\varkappa_1^3$; ihre ∞^1 Kanten sind Sehnen von k^3 und zugleich Achsen von $\varkappa_1^3$. Ich nenne $\varkappa_1^3$ einen kubischen Polarbüschel des Polarsystemes, weil seine Ebenen ∞^1 Poltetraeder desselben bilden. Eine kubische Raumkurve ist Polkurve von sechsfach unendlich vielen Polarsystemen und Flächen zweiter Klasse; sie steht zu ∞^6 kubischen Ebenenbüscheln in dieser von Hurwitz[2]) entdeckten Beziehung, welche einer bekannten invarianten Beziehung zweier Kegelschnitte analog ist.

Bezüglich einer kubischen Raumkurve k^3 ist jedem Punkte A ein Punkt A' der durch A gehenden Sehne konjugiert; und zwar schneiden sich in A' die Polarebenen von A bezüglich aller durch k^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung, so dafs A' mit Hilfe von drei dieser Flächen konstruiert werden kann. Verbindet die Sehne AA' zwei reelle Punkte von k^3, so trennen diese die beiden konjugierten Punkte A, A' harmonisch; berührt AA' die Raumkurve, so fällt einer der Punkte A, A' mit dem Berührungspunkte zusammen, und der andere ist ein beliebiger Punkt der Tangente. Ein Analogon zu diesen konjugierten Punkten giebt es bei Kegelschnittbüscheln. Die Polarebenen des Punktes A bezüglich der ∞^1 durch k^3 gehenden Kegel zweiter Ordnung bilden einen Ebenenbüschel zweiter Ordnung mit dem Mittelpunkte A'; derselbe umhüllt, wenn A die Sehne AA' durchläuft, eine Fläche zweiter Ordnung, welche k^3 und die Polaren der Sehne bezüglich jener ∞^1 Kegel enthält (Cremona).

Den Punkten einer Geraden g sind bezüglich der Raumkurve k^3 im allgemeinen die Punkte einer kubischen Raumkurve g^3 konjugiert; dieselbe hat mit k^3 vier Punkte gemein und ihre Sehnen sind die Polaren von g bezüglich der durch k^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung. Die Polarebenen beliebiger Punkte von g bezüglich dieser

1) Vgl. Reye in Crelles Journal 82, S. 67.

2) Hurwitz in den Math. Annalen 20; vgl. Frz. Meyer a. a. O.

Flächen bilden kollineare Bündel, welche die Raumkurve g^3 nebst ihren Sehnen erzeugen. Hat die Gerade g mit k^3 einen Punkt P gemein, so sind ihren übrigen Punkten i. a. diejenigen eines durch P gehenden Kegelschnittes konjugiert. Jedoch den Punkten eines Schmiegungsstrahles s von k^3 sind diejenigen eines anderen Schmiegungsstrahles s' konjugiert; die Punkte von k^3 sind paarweise harmonisch getrennt durch s und s', und jeder dieser beiden Strahlen schneidet die Schmiegungsebene, in welcher der andere liegt, in einem Punkte der zugehörigen Tangente von k^3. Auf jeder Sehne von k^3 bilden die konjugierten Punkte eine Involution, deren Doppelpunkte auf k^3 liegen.

Den Punkten einer Ebene φ sind bezüglich der Raumkurve k^3 die Punkte einer Fläche F^3 dritter Ordnung konjugiert. Diese Fläche F^3 berührt in den Punkten von k^3 deren Schmiegungsstrahlen und -Ebenen, hat also k^3 zur Haupttangentenkurve. Sie hat die drei Schnittpunkte von φ und k^3 zu Doppelpunkten und enthält u. a. die Tangenten und die Verbindungslinien dieser Punkte. Sie ist der Ort der Pole von φ bezüglich der ∞^2 durch k^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung. Sie wird geradlinig und kann durch einen Schmiegungsstrahl beschrieben werden, wenn φ der Raumkurve sich anschmiegt, und hat in diesem Falle die Tangente in φ zur Doppelpunktsgeraden.

Bezüglich des kubischen Ebenenbüschels $\varkappa^3$, welcher der Raumkurve k^3 sich anschmiegt, ist jeder Ebene α eine Ebene α' konjugiert (Cremona); und zwar sind α und α' konjugiert bezüglich aller dem Büschel $\varkappa^3$ eingeschriebenen Flächen Φ^2 zweiter Klasse, und ihre Schnittlinie $\alpha\alpha'$ ist eine Achse von $\varkappa^3$. Die Paare konjugierter Ebenen, welche durch eine beliebige Achse von $\varkappa^3$ gehen, bilden eine Involution, deren Doppelebenen in $\varkappa^3$ liegen. Einer beliebigen Ebene von $\varkappa^3$ sind alle Ebenen ihrer Tangente konjugiert. Wenn zwei Punkte in Bezug auf k^3 konjugiert sind, so sind ihre Nullebenen in Bezug auf $\varkappa^3$ konjugiert, und umgekehrt. Dreht sich eine Ebene α um eine Gerade, so beschreibt die ihr konjugierte Ebene α' i. a. einen kubischen Ebenenbüschel; dreht sich α um einen Punkt, so umhüllt α' eine Fläche dritter Klasse. Die Pole von α bezüglich der $\varkappa^3$ eingeschriebenen Kegelschnitte liegen in α' auf einer Kurve zweiter Ordnung; dieselbe beschreibt, wenn α um die Achse $\alpha\alpha'$ sich dreht, eine $\varkappa^3$ eingeschriebene Fläche zweiter Klasse, welche die Polaren der Achse bezüglich jener ∞^1 Kegelschnitte enthält (Cremona). Jeder der drei Schnittpunkte von k^3 und α ist durch die beiden übrigen von einem der drei Punkte harmonisch getrennt, welche k^3 mit α' gemein hat (Cremona).

Aus diesen projektiven Eigenschaften der kubischen Raumkurve k^3 ergeben sich die folgenden metrischen, wenn die Gerade g oder die Ebene φ oder α unendlich fern rückt. Die Halbierungspunkte aller zu einer Ebene γ parallelen Sehnen von k^3 liegen i. a. auf einer kubischen Raumkurve g^3, und nur dann auf einem Kegelschnitte resp. auf einem Schmiegungsstrahle, wenn γ zu einer Asymptote oder Asymptotenebene von k^3 parallel ist. Die Halbierungspunkte aller Sehnen von k^3 liegen auf einer Fläche dritter Ordnung, dem Orte der Mittelpunkte aller durch k^3 gehenden Flächen zweiter Ordnung. Diese „Centralfläche" hat k^3 zur Haupttangentenkurve; sie enthält u. a. die drei Asymptoten und die drei unendlich fernen Sehnen von k^3, die drei Hauptachsen der durch k^3 gehenden Cylinder zweiter Ordnung und drei durch einen Punkt gehende und in einer Ebene δ liegende Schmiegungsstrahlen von k^3. Sie wird geradlinig, wenn k^3 eine räumliche Parabel ist.

Die Mittelpunkte der ∞^2 Flächen zweiter Klasse, welche dem Schmiegungs-Ebenenbüschel $\varkappa^3$ der Raumkurve k^3 eingeschrieben werden können, liegen in der Ebene δ, welche der unendlich fernen Ebene in Bezug auf $\varkappa^3$ konjugiert ist. Diese „Centralebene" δ ist den beiden parallelen Schmiegungsebenen parallel und halbiert deren Abstand. Die Mittelpunkte der $\varkappa^3$ eingeschriebenen Kegelschnitte, welche die Schmiegungsebenen mit der Tangentenfläche von k^3 gemein haben, liegen in der Centralebene δ auf einer Ellipse, Hyperbel oder Parabel, jenachdem k^3 eine räumliche Hyperbel oder eine räumliche Ellipse oder eine parabolische Hyperbel ist, oder mit anderen Worten, jenachdem die beiden parallelen Schmiegungsebenen von k^3 imaginär oder reell sind oder zusammenfallen. Die Centralebene einer parabolischen Hyperbel ist die Asymptotenebene des Kurvenpunktes, dessen Tangente unendlich fern liegt. Die Kegelschnitte der Tangentenfläche sind lauter Hyperbeln bei der räumlichen Hyperbel, teils Ellipsen teils Hyperbeln, und diese von jenen durch zwei Parabeln getrennt, bei der räumlichen Ellipse, lauter Hyperbeln bis auf eine Parabel bei der parabolischen Hyperbel, und lauter Parabeln bei der räumlichen Parabel (Cremona). Letztere hat keine bestimmte Centralebene; einem parabolischen kubischen Ebenenbüschel lassen sich ja auch keine Hyperboloide, sondern nur Paraboloide einschreiben. —

Eine Fläche F^2 zweiter Ordnung nenne ich[1]) „apolar" zu einer Fläche Φ^2 zweiter Klasse, wenn ihr ein Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben, oder wenn der Φ^2 ein Poltetraeder von F^2 umschrieben

1) Vgl. Crelles Journal 78 p. 104 und 345, 79 p. 165.

ist; der F^2 können in diesem Falle ∞^3 Poltetraeder von Φ^2 eingeschrieben, der Φ^2 aber ∞^3 Poltetraeder von F^2 umschrieben werden. Nach einem Satze von Faure[1]) bilden die zu einer Fläche Φ^2 zweiter Klasse apolaren Kugeln einen linearen Komplex, ein sog. Kugelgebüsch, indem sie im Centrum von Φ^2 gleiche Potenz haben. Die mit Φ^2 koncentrische Orthogonalkugel dieses Gebüsches ist der Ort eines Punktes, in welchem sich Tripel rechtwinkliger Berührungsebenen von Φ^2 schneiden, und heifst die Orthogonalkugel von Φ^2; sie artet in eine Ebene aus, wenn Φ^2 ein Paraboloid ist.

Wenn eine Kugel zu beliebigen zwei oder drei Flächen zweiter Klasse apolar ist, so ist sie zu allen Flächen der durch letztere bestimmten Schar resp. Scharschar apolar. Zu den ∞^2 Flächen Φ^2 einer Scharschar sind demgemäfs die Kugeln eines Kugelbüschels apolar. Die Orthogonalkugeln dieser Flächen schneiden die Kugeln des Büschels rechtwinklig und bilden einen Bündel, ihre Mittelpunkte sind zugleich die der ∞^2 Flächen Φ^2 und liegen in der Potenzebene der Kugeln des Büschels. Sind die Flächen der Scharschar einem kubischen Ebenenbüschel $\varkappa^3$ eingeschrieben, so hat jede zu ihnen apolare Kugel ∞^1 Poltetraeder, deren Ebenen in $\varkappa^3$ liegen; von jedem Poltetraeder einer Kugel aber gehen die vier Höhen durch den Mittelpunkt, und seine Gegenkanten kreuzen sich rechtwinklig. Für die kubischen Raumkurven erhalte ich demnach die folgenden Sätze.

Die Schmiegungsebenen einer kubischen Raumkurve k^3 bilden i. a. ∞^2 Tetraeder, deren vier Höhen sich schneiden und deren Gegenkanten sich folglich rechtwinklig kreuzen. Die Höhenpunkte dieser Tetraeder liegen auf einer zu der Centralebene δ normalen Geraden g; jeder Punkt von g ist Höhenpunkt von ∞^1 derselben, welche Poltetraeder einer Kugel sind und deren Eckpunkte auf einer zu k^3 reciprok-polaren kubischen Raumkurve liegen. Die so bestimmten Kugeln bilden einen Büschel, und δ ist ihre gemeinsame Potenzebene; sie sind normal zu den Orthogonalkugeln der ∞^2 Flächen zweiter Klasse, welche die Schmiegungsebenen von k^3 berühren. Diese Orthogonalkugeln schneiden sich i. a. in zwei Punkten O, O', den Punktkugeln des Büschels. Die beiden „Orthogonalpunkte“ O, O' liegen auf g symmetrisch zu δ, und in ihnen schneiden sich je drei Schmiegungsebenen von k^3 rechtwinklig (Krüger); sie sind imaginär, wenn der Büschel einen reellen Grundkreis hat. Letzterer liegt in δ, hat g zur Achse und ist der Ort verschwindend kleiner Orthogonalkugeln

1) Vgl. Nouv. Annales de Math., I. Série 19 p. 234, 294, 347; Crelles Journal 78 p. 345.

von ∞^1 jener Flächen zweiter Klasse; die Asymptotenkegel dieser ∞^1 Flächen aber werden von je ∞^1 Tripeln normaler Ebenen berührt. Die Dreiflache von Schmiegungsebenen, deren Scheitel auf g liegen, haben g zum gemeinsamen Höhenstrahle; denn sie bilden mit jeder der beiden zu δ parallelen Schmiegungsebenen Tetraeder, deren Höhen auf g sich schneiden.

Ist k^3 eine räumliche Parabel, so arten die ∞^2 Orthogonalkugeln aus in Ebenen, die zu den Ebenen der unendlich fernen Parabeltangente normal sind. Die räumliche Parabel hat i. a. keine, in einem Specialfalle jedoch unendlich viele eigentliche Orthogonalpunkte, in denen je drei Schmiegungsebenen sich rechtwinklig schneiden. Diese Punkte liegen auf einer Geraden, durch welche alle jene Orthogonalebenen der speciellen Parabel gehen (Böklen[1]), und sind die Höhenpunkte von je ∞^2 aus Schmiegungsebenen bestehenden Tetraedern, deren Gegenkanten sich rechtwinklig kreuzen.

Auch die Punkte einer kubischen Raumkurve k^3 bilden ∞^2 Tetraeder, deren Gegenkanten sich rechtwinklig kreuzen; und zwar liegen die Höhenpunkte dieser Tetraeder i. a. auf einer Sehne von k^3, in welcher alle durch k^3 gehenden gleichseitigen Hyperboloide sich schneiden. Aus den beiden Schnittpunkten von k^3 mit s wird die Raumkurve durch gleichseitige Kegel projiziert. Jeder Punkt von s ist Höhenpunkt von ∞^1 jener Tetraeder, welche Poltetraeder einer Kugel sind. Die ∞^1 so bestimmten Kugeln haben k^3 zur kubischen Polkurve, bilden übrigens keinen Büschel. Die zu s normalen Ebenen schneiden k^3 in den Eckpunkten von Dreiecken, deren Höhenpunkte auf s liegen; jedes dieser Dreiecke bestimmt mit den beiden auf s liegenden Punkten von k^3 zwei der Raumkurve eingeschriebene Tetraeder, deren Höhen auf s sich schneiden. Eine Ausnahme tritt ein, wenn k^3 eine gleichseitige räumliche Hyperbel ist, d. h. drei zu einander normale Asymptoten hat; denn diese Hyperbel ist von jeder Kugel, deren Mittelpunkt auf ihr liegt, eine kubische Polkurve, und ihr sind ∞^3 Tetraeder eingeschrieben, deren Gegenkanten sich rechtwinklig kreuzen. — Zum Beweise dieser Sätze diene folgendes.

Wie schon erwähnt, ist k^3 von sechsfach unendlich vielen Flächen zweiter Klasse eine kubische Polkurve; unter diesen Flächen aber giebt es einfach unendlich viele Kugeln. Verbindet man k^3 mit dem Mittelpunkte M einer solchen Kugel durch Flächen F^2 zweiter Ordnung, so sind diese zu der Kugel apolar. Jede dieser F^2 ist auch solchen Poltetraedern der Kugel umschrieben, welche M zum Eck-

1) Zeitschrift für Math. und Physik. 29.

punkte haben, enthält also Tripel normaler Strahlen, welche zu konjugierten Durchmessern der Kugel parallel sind, und ist mithin ein gleichseitiges Hyperboloid. Da die Raumkurve k^3 mit je zwei zu einander und zu einer Asymptote normalen Sehnen auf einem gleichseitigen Hyperboloide liegt, so geht i. a. durch k^3 ein Büschel gleichseitiger Hyperboloide; dieselben schneiden sich in einer Sehne s von k^3, welche die Mittelpunkte der zu k^3 apolaren Kugeln enthält.

Zu den Mittelpunkten, den Achsen und Brennpunkten und den hierauf bezüglichen Eigenschaften der Kegelschnitte giebt es kein Analogon bei der kubischen Raumkurve. Wohl aus diesem Grunde sind bis jetzt nur wenige metrische Eigenschaften der Raumkurve k^3 bekannt, diese wenigen aber betreffen meistens, wie die soeben bewiesenen, die Beziehungen von k^3 zu normalen Geraden und Ebenen oder zu dem unendlich fernen imaginären Kugelkreise k^2_∞. Beispielsweise liegen die Schnittlinien normaler Schmiegungsebenen von k^3 i. a. auf einer Fläche sechster Ordnung, welche eine Doppellinie neunter Ordnung und zwei dreifache Punkte hat (Krüger). — Der Kreis k^2_∞ kann definiert werden als Ordnungskurve des polaren Feldes, in welchem der rechtwinklig polare Durchmesserbündel einer beliebigen Kugel von der unendlich fernen Ebene geschnitten wird, oder auch als der Kreis, in welchem die Kugel ihren imaginären Asymptotenkegel tangiert. Zwei Ebenen oder Gerade sind hiernach zu einander normal, wenn sie in Bezug auf k^2_∞ konjugiert sind, und umgekehrt. Jede rechtwinklige Ebenen-Involution hat zwei imaginäre Doppelebenen, welche k^2_∞ berühren.

Als singuläre Fläche zweiter Klasse bestimmt der unendlich ferne Kugelkreis k^2_∞ bekanntlich mit einer beliebigen Fläche Φ^2 zweiter Klasse die Schar der zu Φ^2 konfokalen Flächen zweiter Klasse; die übrigen singulären Flächen dieser Schar sind die Fokalkegelschnitte von Φ^2 und liegen in den Symmetrie- oder Hauptebenen dieser Fläche. Wenn Φ^2 die Scharschar beschreibt, welche von den Schmiegungsebenen der kubischen Raumkurve k^3 umhüllt wird, so beschreiben die zu Φ^2 konfokalen Flächen eine lineare Mannigfaltigkeit $|M_3|$ von dreifach unendlich vielen Flächen zweiter Klasse. Alle Flächen von $|M_3|$ aber berühren die sechs imaginären Schmiegungsebenen von k^3, welche den Kugelkreis k^2_∞ tangieren, und $|M_3|$ ist deshalb das Reciproke eines Gebüsches von Flächen F^2 zweiter Ordnung, die einem räumlichen Sechsecke umschrieben sind. Den besonderen Fall der räumlichen Parabel, in welchem zwei der sechs Ebenen mit der unendlich fernen Schmiegungsebene sich vereinigen, übergehen wir.

Das einem Sechsecke umschriebene F^2-Gebüsch enthält bekanntlich[1]) ∞^2 singuläre Flächen oder Kegel zweiter Ordnung, und zwar liegen deren Mittelpunkte auf der „Kernfläche“ vierter Ordnung und sind paarweise konjugiert bezüglich aller Flächen des Gebüsches. Die Kernfläche K_1^4 geht, wie leicht einzusehen, durch die 15 Kanten des Sechsecks und durch die 10 Geraden, in welchen je zwei Gegenebenen des Sechsecks sich schneiden; aufserdem durch die kubische Raumkurve k_1^3, welche dem Sechseck umschrieben werden kann. Sie hat die Eckpunkte des Sechsecks zu Doppelpunkten. Zwei konjugierte Punkte der Kernfläche K_1^4 liegen, weil sie auch bezüglich der Raumkurve k_1^3 konjugiert sind, auf einer Sehne von k_1^3 und sind durch zwei Punkte der Raumkurve harmonisch getrennt. Die Sehnen von k_1^3 haben also mit K_1^4 je vier harmonische Punkte gemein, und die Tangenten von k_1^3 oskulieren K_1^4 in ihren Berührungspunkten, so dafs k_1^3 eine Haupttangentenkurve der Kernfläche K_1^4 ist. Die Punkte jeder Kante des Sechsecks sind paarweise konjugiert und bilden eine Involution, deren Doppelpunkte zwei Eckpunkte sind. Durch die beiden Kegelschnitte, welche zwei Gegenebenen des Sechseckes mit einer beliebigen Fläche des F^2-Gebüsches gemein haben, geht ein Büschel von Flächen desselben. Die beiden Gegenebenen trennen je zwei konjugierte Punkte der Kernfläche K_1^4 harmonisch; denn sie bilden eine singuläre Fläche des Gebüsches, in Bezug auf welche jene Punkte konjugiert sind.

Übertragen wir nunmehr diese Sätze auf die lineare Mannigfaltigkeit $|M_3|$ der ∞^3 einem Sechsflache eingeschriebenen Flächen zweiter Klasse unter der Voraussetzung, dafs die sechs Ebenen des Sechsflaches in einem reellen kubischen Ebenenbüschel $\varkappa^3$ liegen und den unendlich fernen Kugelkreis k^2_∞ berühren, also paarweise konjugiert imaginär sind. Die ∞^2 Flächen Φ^2 zweiter Klasse, welche dem Büschel $\varkappa^3$ eingeschrieben sind, bilden mit ihren konfokalen Flächen die Mannigfaltigkeit $|M_3|^2$), ihre ∞^2 Fokalkurven aber sind die singulären Flächen von $|M_3|$ und liegen in den Symmetrie-Ebenen der Flächen Φ^2. Diese Symmetrie-Ebenen umhüllen eine Fläche vierter Klasse, die „Kernfläche“ K^4 von $|M_3|$; sie sind paarweise konjugiert bezüglich aller Flächen von $|M_3|$ und insbesondere in Bezug auf k^2_∞ und $\varkappa^3$. Zwei konjugierte Ebenen von K^4 schneiden sich deshalb rechtwinklig in einer Achse von $\varkappa^3$; sie halbieren die Winkel der beiden durch die Achse gehenden Ebenen von $\varkappa^3$. Je zwei nor-

1) Vgl. Reye, Geometrie der Lage, 2. Aufl. 1880, Abth. II, S. 237, 251.

2) Herr Heinrich Krüger hat a. a. O. diese lineare Flächen-Mannigfaltigkeit, *ihre Kernfläche* und das zugehörige Sechsflach zuerst und ausgiebig benutzt.

male Ebenen, die in Bezug auf $\varkappa^3$ konjugiert sind, berühren die Kernfläche K^4.

Die Kernfläche K^4 enthält 15 Achsen f von $\varkappa^3$, nämlich die 15 Kanten des Sechsflaches, und 10 Gerade r, welche je zwei Gegeneckpunkte des Sechsflaches verbinden. Sie hat die Ebenen des Sechsflaches zu singulären Berührungsebenen und die kubische Raumkurve k^3, welcher die Ebenen von $\varkappa^3$ sich anschmiegen, zur Haupttangentenkurve. Durch die Achsen von $\varkappa^3$ gehen an K^4 je vier harmonische Berührungsebenen, von denen zwei reelle oder imaginäre in $\varkappa^3$ und zu jeder der beiden reellen und normalen übrigen symmetrisch liegen. Auch die Centralebene δ und die ihr konjugierte unendlich ferne Ebene berühren K^4.

Die Ebenen einer beliebigen Kante f des Sechsflaches sind paarweise konjugiert bezüglich aller Flächen von $|M_3|$ und zugleich normal; die Kante f ist demnach Achse einer rechtwinkligen Involution konjugierter Ebenen, oder mit anderen Worten eine gemeinsame Fokalachse der ∞^3 Flächen von $|M_3|$. Die ∞^2 Flächen Φ^2 zweiter Klasse, welche dem kubischen Ebenenbüschel $\varkappa^3$ eingeschrieben sind, haben also 15 gemeinsame Fokalachsen f; doch sind nur die drei Fokalachsen reell, in denen je zwei konjugiert imaginäre Ebenen des Sechsflaches sich begegnen (Krüger). Die projektiven Punktreihen, in welchen der kubische Büschel $\varkappa^3$ von je zwei seiner Achsen geschnitten wird, werden aus jeder reellen Fokalachse f durch zwei gleiche und gleichlaufende Ebenenbüschel projiziert. Mit den drei reellen Fokalachsen f sind auch die drei Paar Ebenen des Sechsflaches als Doppelebenen rechtwinkliger Involutionen gegeben; durch diese aber ist der kubische Ebenenbüschel $\varkappa^3$ bestimmt. Jede der drei reellen Fokalachsen enthält vier Eckpunkte des Sechsflaches, welche paarweise konjugiert imaginär, jedoch keine Gegenpunkte sind.

Die beiden imaginären Kegel durch k^2_∞, welche zwei Gegenpunkte des Sechsflaches zu Mittelpunkten haben, sind einer Schar konfokaler Flächen von $|M_3|$ umschrieben; die beiden Punkte aber sind Brennpunkte dieser Flächen, weil je zwei durch einen von ihnen gehende normale Ebenen bezüglich der Schar konjugiert sind. Aus demselben Grunde ist die Verbindungslinie r der beiden Gegenpunkte Rotationsachse dieser konfokalen Flächen, von denen eine dem kubischen Büschel $\varkappa^3$ eingeschrieben ist. Unter den $\varkappa^3$ eingeschriebenen Flächen zweiter Klasse giebt es sonach zehn Rotationshyperboloide R^2 (Krüger). Die imaginären Brennpunkte derselben sind die zehn paar Gegenpunkte des Sechsflaches, und die Rotationsachsen sind deren zehn Verbindungslinien r. Doch sind nur vier dieser Rotations-

achsen und Hyperboloide reell, weil nur vier paar Gegenpunkte aus konjugiert imaginären Punkten bestehen.

Jede der vier reellen Rotationsachsen r schneidet die Paare normaler und in Bezug auf $\varkappa^3$ konjugierter Ebenen in Punktenpaaren einer elliptischen Involution, deren Mittelpunkt in der Centralebene δ liegt und deren Doppelpunkte von dem zugehörigen Rotations-Hyperboloide R^2 die Brennpunkte sind (Krüger). Je drei durch einen Punkt der Rotationsachse r gehende Ebenen von $\varkappa^3$ bilden mit r gleiche Winkel; sie berühren einen Tangentialkegel von R^2, welcher r zur Rotationsachse hat. Die rektifizierende Fläche der kubischen Raumkurve k^3 sendet je vier Berührungsebenen durch die zehn Rotationsachsen r; sie enthält die Tangenten einer Raumkurve siebenter Klasse und ihre Berührungsebenen sind zu je einer Schmiegungsebene von k^3 in deren Tangente normal, mithin den Ebenen von $\varkappa^3$ konjugiert bezüglich der Flächen von $|M_3|$ (Krüger).

Durch die kubische Raumkurve k^3 gehen i. a. vier Rotations-Hyperboloide, und zwar vier reelle, wenn k^3 eine räumliche Hyperbel, zwei reelle und zwei imaginäre, wenn k^3 eine räumliche Ellipse ist (Cremona). Legt man zu den Asymptoten einer räumlichen Hyperbel durch einen Punkt drei Parallelen, so können diese durch vier Rotationskegel verbunden werden; die Sehnen von k^3, welche auf den vier Rotations-Hyperboloiden liegen, sind den Strahlen dieser vier Kegel parallel. Durch eine parabolische Hyperbel gehen nur zwei (reelle) Rotations-Hyperboloide, durch eine räumliche Parabel geht nur ein solches.

Über die Krümmung und die Torsion der kubischen Raumkurven, ihre Krümmungskreise, die sie doppelt berührenden und hyperoskulierenden Kugeln, über ihre Normalebenen, Haupt- und Binormalen, ihre Evoluten und Evolventen wissen wir so gut wie nichts. Überhaupt hat die Infinitesimal-Geometrie zu der Kenntnis dieser einfachsten algebraischen Raumkurven meines Wissens bislang nicht das geringste beigetragen; ihre grofsen Entdeckungen beziehen sich ja wesentlich auf die transcendenten Kurven und Flächen. Selbst den Satz, dafs die Binormalen einer kubischen Raumkurve auf einer Fläche sechster Ordnung liegen (Krüger), verdanken wir der synthetischen Geometrie, deren Forschungsmethoden gerade bei diesen Kurven als überaus fruchtbar sich erwiesen haben.

Strafsburg i./E., 29. Juli 1889.

Über die sogenannten Strahlenkongruenzen ohne Brennfläche.

(Von Rudolf Sturm in Münster i. W.)

Eine allgemeine Formel für die Ordnung der Brennfläche einer Strahlenkongruenz, welche ich vor einiger Zeit fand, ergab das unerwartete Resultat, dafs die Ordnung nicht null wurde bei denjenigen Kongruenzen, welche „nur Brennkurven haben". Die weitere Untersuchung zeigte, dafs man in der That nicht, wie man bisher allem Anscheine nach geglaubt hat, berechtigt ist, diesen Kongruenzen die Brennfläche abzusprechen; nur wenige einfache Kongruenzen dieser Art, wie die lineare Kongruenz und die Kongruenz der Doppelsekanten einer kubischen Raumkurve, besitzen in der That keine Brennfläche.

1. Neben der Ordnung (Bündelgrad) m und der Klasse (Feldgrad) n einer Kongruenz empfiehlt es sich, noch eine dritte Zahl r, die ich den Rang der Kongruenz nennen möchte, einzuführen, die Zahl nämlich, welche angiebt, wie oft eine beliebige Gerade des Raums mit zwei Strahlen der Kongruenz zusammen zu demselben Strahlenbüschel gehört[1]).

In dem Ebenenbüschel um die beliebige Gerade l sollen zwei Ebenen als entsprechend angenommen werden, welche zwei von demselben Punkte von l ausgehende Kongruenzstrahlen enthalten. Dadurch entsteht in dem Büschel eine offenbar involutorische (oder symmetrische) Korrespondenz, in welcher jeder Ebene $n(m-1)$ andere Ebenen entsprechen. Die r Ebenen der Strahlenbüschel, in denen l mit zwei Kongruenzstrahlen sich befindet, sind Koincidenzen dieser Korrespondenz, und zwar doppelte, weil jede dieser Ebenen sich mit zwei ihrer entsprechenden Ebenen vereinigt hat; die $2n(m-1)-2r$ übrigen Koincidenzen rühren von ebenso vielen Paaren unendlich naher Kongruenzstrahlen her, die sich auf l schneiden. Fügen wir dazu die duale Betrachtung, so haben wir:

Die Ordnung m_1 und die Klasse n_1 der Brennfläche Φ einer Kongruenz (m, n, r) sind gegeben durch:

$$m_1 = 2n(m-1)-2r, \quad n_1 = 2m(n-1)-2r.$$

Betrachten wir beispielsweise die Kongruenz der Doppelsekanten der Raumkurve 4. Ordnung 1. Art, der Grundkurve eines Flächenbüschels 2. Ordnung; diese Kongruenz gehört zu denjenigen, welchen

1) Es ist dies die Zahl ϱ in der Dissertation des Herrn R. Schumacher: Untersuchungen über das Strahlensystem 3. Ordnung und 2. Klasse, München 1885.

gewöhnlich die Brennfläche abgesprochen wird. Bei ihr ist $m = 2$, $n = 6$ und, weil zwei Flächen des Büschels eine Gerade berühren, $r = 2$; also $m_1 = 8$ und nicht 0.

Man verfährt auch undual, wenn man denjenigen Kongruenzen, deren Strahlen eine Raumkurve zweimal oder zwei verschiedene Raumkurven je einmal treffen, die Brennfläche abspricht, den dualen aber, welche durch die Doppeltangenten einer abwickelbaren Fläche oder durch die gemeinsamen Tangenten zweier solcher Flächen entstehen, eine Brennfläche zuschreibt.

2. Betrachten wir zunächst die Kongruenz der Doppelsekanten einer Raumkurve R, welche die Ordnung μ, den Rang ϱ hat und h scheinbare Doppelpunkte besitzt. Ersichtlich ist:

$$m = h, \quad n = \tfrac{1}{2}\mu(\mu - 1).$$

Die Ebenen, welche zwei unendlich nahe Kongruenzstrahlen enthalten, sind die Tangentialebenen der Kegel, welche die Raumkurve aus ihren verschiedenen Punkten projizieren, oder kürzer, die Berührungsebenen der Kurve selbst, und zwar jede $(\mu - 2)$-fach gerechnet; also ist die Klasse der von ihnen eingehüllten (ausgearteten) Fläche $(\mu - 2)\varrho$; das ist n_1. Daher giebt die Formel für die Klasse von Φ:

$$2h\left\{\tfrac{1}{2}\mu(\mu - 1) - 1\right\} - 2r = (\mu - 2)\varrho;$$

für die Ordnung von Φ haben wir:

$$m_1 = \mu(\mu - 1)(h - 1) - 2r,$$

oder nach Elimination von r:

$$m_1 = (\mu - 2)\varrho + 2h - \mu(\mu - 1),$$

was nur bei der kubischen Raumkurve den Wert 0 hat. Hat die Kurve d wirkliche Doppelpunkte und s Spitzen, so ist $\mu(\mu - 1) = \varrho + 2(h + d) + 3s$, also:

$$m_1 = (\mu - 3)\varrho - 2d - 3s.$$

Das ist aber[1]) die Ordnung der abwickelbaren Fläche Δ der doppelten Berührungsebenen der Raumkurve, deren Erzeugende diejenigen Doppelsekanten sind, in deren Schnittpunkten die Kurve von zwei sich schneidenden Tangenten berührt wird.

---

1) Cremona, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der Oberflächen (deutsch von Curtze) Nr. 112 (in dem Kapitel: Anwendungen [der Polarentheorie] auf developpable Flächen, welches Herr Cremona der deutschen Übersetzung zugefügt hat).

Man kann diese Fläche Δ mit Recht eine Brennfläche der Kongruenz der Doppelsekanten nennen; denn der Kegel, welcher R aus irgend einem Punkte von Δ projiziert, hat längs der den Punkt enthaltenden Erzeugenden eine Selbstberührung, so dafs in dieser Erzeugenden zwei von dem Punkte kommende Doppelsekanten sich vereinigen.

Ein beliebiger Strahl der Kongruenz freilich hat seine zwei Brennpunkte auf R, und jeder Punkt der Kurve ist Brennpunkt für ∞^1 Strahlen der Kongruenz, welche den Projektionskegel von R aus ihm bilden, mit der Berührungsebene des Kegels als zugehöriger Brennebene.

Die ∞^1 Kongruenzstrahlen aber, welche Erzeugende von Δ sind, haben je alle ihre Punkte zu Brennpunkten und gemeinsame zugehörige Brennebene ist die Tangentialebene von Δ längs des Strahls, die doppelte Berührungsebene von R, deren beide Berührungspunkte er verbindet.

Die Kurve R, als Ebenenort 2. Stufe aufgefafst, stellt, $(\mu - 2)$ -fach gerechnet, die Brennfläche Φ dar, insofern sie das Erzeugnis der Brennebenen ist, die abwickelbare Fläche Δ ihrer Doppeltangentialebenen, als Punktort 2. Stufe angesehen, hingegen die Brennfläche, insofern sie das Erzeugnis der Brennpunkte ist.

In ähnlicher Weise erhalten wir, dual, bei der Kongruenz der Doppeltangenten einer abwickelbaren Fläche P in den Punkten dieser Fläche wohl die Punkt-Brennfläche, aber in den nur ∞^1 Berührungsebenen, die sie hat, noch nicht die Ebenen-Brennfläche; diese wird erst durch die Tangentialebenen der auf P befindlichen Doppelkurve geliefert.

3. Ähnliches gilt für die Kongruenz der gemeinsamen Sekanten oder Treffgeraden zweier Raumkurven R, R_1. Die Ordnungen derselben seien μ, μ_1, ihre Rangzahlen ϱ, ϱ_1; Θ die Zahl der etwaigen Begegnungspunkte. Wir haben also:

$$m = \mu\mu_1 - \Theta, \quad n = \mu\mu_1.$$

Die Fläche der Berührungsebenen der Kegel, welche die eine Kurve aus den Punkten der andern projizieren, hat die Klasse $\mu\varrho_1 + \mu_1\varrho$; denn sie setzt sich aus den Örtern 2. Stufe der Tangentialebenen von R, R_1 zusammen, μ_1-fach, bezw. μ-fach gerechnet. Sie ist die Ebenen-Brennfläche, und wir haben deshalb:

$$n_1 = 2(\mu\mu_1 - \Theta)(\mu\mu_1 - 1) - 2r = \mu\varrho_1 + \mu_1\varrho,$$

ferner:

$$m_1 = 2\mu\mu_1(\mu\mu_1 - \Theta - 1) - 2r = \mu\varrho_1 + \mu_1\varrho - 2\Theta.$$

Von dieser Ordnung ist aber die abwickelbare Fläche A der gemeinsamen Berührungsebenen der beiden Kurven R und R_1.

Um dies direkt einzusehen, bilden wir um eine beliebige Gerade l eine Korrespondenz; eine Ebene ξ durch l schneidet R in μ Punkten; die Ebenenbüschel um die Tangenten derselben haben mit R_1 $\mu\varrho_1$ Berührungsebenen gemein, deren Berührungspunkte mit l verbunden die $\mu\varrho_1$ Ebenen ξ_1 geben, welche der ξ entsprechen. Einer Ebene ξ_1 entsprechen $\mu_1\varrho$ Ebenen ξ.

Zu den Koincidenzen dieser Korrespondenz gehört jede Ebene von l nach einem der Θ gemeinsamen Punkte der beiden Kurven, und zwar doppelt, da die Ebene, welche die beiden Tangenten eines solchen Punktes verbindet, unter den ϱ_1, bezw. ϱ Berührungsebenen von der einen Tangente an die andere Kurve bekanntlich doppelt zählt. Bei jeder der $\mu\varrho_1 + \mu_1\varrho - 2\Theta$ übrigen Koincidenzen fallen die beiden — verschiedenen — Berührungspunkte einer gemeinsamen Tangentialebene beider Kurven in dieselbe Ebene des Büschels l; also wird l von der Verbindungslinie der beiden Berührungspunkte, einer Erzeugenden von A, getroffen.

Diese abwickelbare Fläche A, als Punktort 2. Stufe betrachtet, ist die Punkt-Brennfläche unserer Kongruenz.

In der That, die beiden Kegel, welche R und R_1 aus einem beliebigen Punkte von A projizieren, berühren sich längs der durch den Punkt gehenden Erzeugenden von A, so dafs in derselben zwei der von ihm kommenden Kongruenzstrahlen zusammengefallen sind.

Wenn eine der beiden Kurven eine Gerade ist ($\mu_1 = 1$, $\varrho_1 = 0$), so zerfällt A in die $\varrho - 2\Theta$ Ebenen, welche von den Geraden tangential an die andere Kurve gehen, aber nicht in den Schnitten der Geraden mit derselben berühren.

Sind beide Kurven Gerade, so ist $m_1 = n_1 = 0$, also keine Brennfläche vorhanden.

4. Wir wollen aber auch noch den Fall betrachten, in welchem die Kongruenz „eine Brennkurve und eine Brennfläche hat", und also von den Strahlen gebildet wird, welche jene treffen und diese berühren.

Ordnung, Klasse und Rang der Fläche T seien μ, ν, ϱ, Ordnung und Rang der Kurve aber μ_1, ϱ_1. Der Allgemeinheit halber nehmen wir an, dafs T und R_1 von einander unabhängig sind; einen interessanten speciellen Fall, bei dem dies nicht gilt, will ich in der nächsten Nummer besprechen.

Die Kongruenz, als vollständiger Schnitt des Tangenten-Komplexes,

vom Grade ϱ, der Fläche T und des Komplexes, vom Grade μ_1, der Treffgeraden der Kurve R_1, hat gleiche Ordnung und Klasse:

$$m = n = \varrho\mu_1 .$$

In jedem Punkte von T berühren μ_1 Gerade der Kongruenz; folglich gehört T μ_1-fach sowohl zur Punkt-, als zur Ebenen-Brennfläche, so dafs in die Formeln für m_1 und n_1 die Summanden $\mu\mu_1$, bezw. $\nu\mu_1$ eingehen. Zur Ebenen-Brennfläche gehört ferner die Fläche, von der Klasse ϱ_1, der Berührungsebenen von R_1, und zwar ϱ-fach, weil in jeder dieser Ebenen vom Berührungspunkte und dem unendlich nahen Punkte auf R_1 ϱ Paare unendlich naher Tangenten an T gehen; wir erhalten also für n_1 den zweiten Summanden $\varrho\varrho_1$; ein dritter $\mu\mu_1$ ergiebt sich durch die Schnittpunkte von T und R_1.

Betrachten wir nämlich in einem derselben diejenige Tangente t von T, welche die Gerade l trifft, auf der die Punkt-Korrespondenz sich befindet, die zur Formel für die Klasse n_1 der Brennfläche führt. Die in einer Ebene durch l befindlichen Kongruenzstrahlen, welche auf l entsprechende Punkte dieser Korrespondenz einschneiden, sind in unserm Falle die $\mu_1\varrho$ Tangenten von den Begegnungspunkten der Ebene mit R_1 an die Schnittkurve derselben mit T. In der Ebene lt fallen ersichtlich zwei in die Gerade t zusammen.

Entweder nimmt man die $\mu\mu_1$ Bündel um die Schnittpunkte TR_1 zur Ebenen-Brennfläche hinzu, was wohl das richtigere sein dürfte, oder man mufs das durch die Formel gelieferte n_1 um $\mu\mu_1$ vermindern.

Bezeichnet man nun mit m^* die Ordnung der Fläche, welche die μ_1-fach gerechnete Punktfläche T zur vollständigen Punkt-Brennfläche ergänzt; so hat man:

$$2\varrho\mu_1(\varrho\mu_1 - 1) - 2r = \mu\mu_1 + \nu\mu_1 + \varrho\varrho_1 ,$$
$$2\varrho\mu_1(\varrho\mu_1 - 1) - 2r = \mu\mu_1 + m^* ;$$

also:

$$m^* = \nu\mu_1 + \varrho\varrho_1 .$$

Das ist aber die Ordnung der abwickelbaren Fläche der Ebenen, welche T und R_1 zugleich berühren; wie die Korrespondenz um eine beliebige Gerade l zeigt, in welcher sich zwei Ebenen entsprechen, die von l nach den zwei Berührungspunkten einer solchen gemeinsamen Tangentialebene gehen.

Die vollständige Punkt-Brennfläche wird demnach in diesem Falle durch die μ_1-fache Fläche T und durch die Developpable der gemeinsamen Berührungsebenen von T und R_1 gebildet, während die Ebenen-Brennfläche sich aus

der μ_1-fachen T und dem ϱ-fachen Ort 2. Stufe der Berührungsebenen von R_1 zusammensetzt.

Wenn R_1 eine Gerade ist, so wird $m^* = \nu$; die genannte Developpable zerfällt dann in die ν Tangentialebenen von der Geraden an T. Denn von den ϱ Kongruenzstrahlen, die von einem beliebigen Punkte einer dieser Ebenen ausgehen, vereinigen sich stets zwei in dem Strahle nach dem Berührungspunkte.

5. Als ein Beispiel des Falles, wo T und R_1 nicht unabhängig voneinander sind, will ich die Kongruenz 2. Ordnung und $(2\mu - 2)^{\text{ter}}$ Klasse wählen, welche durch die Geraden entsteht, die eine Fläche T μ^{ter} Ordnung mit einer $(\mu - 2)$-fachen Geraden b berühren und diese Gerade treffen.[1])

Bei jeder Kongruenz, welche eine gerade Brenn- oder Leitlinie hat, ist

$$r = 0.$$

Demnach geben unsere Formeln:

$$m_1 = 2\,(2\mu - 2)\cdot 1 = \mu + 3\mu - 4,$$
$$n_1 = 2 \cdot 2\,(2\mu - 3) = 4\,(2\mu - 3)\cdot$$

Die Klasse unserer Fläche T ist in der That $4\,(2\mu - 3)^2$); und demnach ist T die vollständige Ebenen-Brennfläche, aber hinter der Ordnung der Punkt-Brennfläche bleibt ihre Ordnung um $3\mu - 4$ zurück. Die Vervollständigung geschieht durch die Ebenen, welche durch die $(\mu - 2)$-fache Gerade gehen und ein Geradenpaar ausschneiden und deren Zahl $3\mu - 4$ ist[3]). Es leuchtet in der That sofort ein, dafs die zwei Kongruenzstrahlen, die von einem beliebigen Punkte einer dieser Ebenen ausgehen, in die Gerade nach dem Doppelpunkte des Geradenpaares zusammengefallen sind.

6. Die Fläche μ^{ter} Ordnung mit einer $(\mu - 2)$-fachen Geraden b liefert noch eine zweite Kongruenz 2. Ordnung, aber $(\mu - 2)^{\text{ter}}$ Klasse, welche sich unter den von Herrn Kummer a. a. O. aufgezählten Kongruenzen 2. Ordnung mit Brennlinien nicht befindet und, so viel

---

1) Kummer, Über die algebraischen Strahlensysteme u. s. w. (Abhandlungen der Berliner Akademie für 1866) Lehrsatz XV.

2) Mathem. Annalen Bd. 4, S. 254.

3) Ebenda S. 259, sowie Nöther, ebenda Bd. 3, S. 175; man kann diese Zahl auch mit Hilfe der Formeln der abzählenden Geometrie (Schubert, Kalkül der abzählenden Geometrie §. 20) finden, da die 3 Charakteristiken des Systems der Kegelschnitte auf T in den Ebenen durch b leicht zu ermitteln sind: $1,\ \mu,\ 2\,(\mu - 1)$.

ich sehe, auch keiner derselben subsumiert werden kann. Ich meine die Kongruenz der Geraden, welche die Fläche T μ^{ter} Ordnung auf der $(\mu - 2)$-fachen Geraden b berühren; während bei der Kummerschen Kongruenz der Berührungspunkt im allgemeinen nicht auf die Gerade fällt.

Nehmen wir, verallgemeinernd, den Grad der Vielfachheit von b auf der Fläche beliebig, d. h. nehmen wir eine Fläche $(n + m)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer n-fachen Geraden b an, so ist leicht zu erkennen, dafs die Strahlen, welche die Fläche auf dieser Geraden berühren, eine Kongruenz von der Ordnung m und der Klasse n erzeugen; denn jede Ebene durch b berührt in m Punkten von b und in jedem Punkte von b berühren n Ebenen die Fläche. Aber man kann die Fläche ganz entbehren.

Die Punktreihe auf einer Geraden und der Ebenenbüschel um die nämliche Gerade werden so aufeinander bezogen, dafs jedem Punkte in jener n Ebenen in diesem und jeder Ebene des Büschels m Punkte der Reihe entsprechen. Die Strahlenbüschel, welche entsprechende Elemente zu Scheitel und Trägerebene haben, erzeugen eine Kongruenz m^{ter} Ordnung und n^{ter} Klasse.

Für $m = n = 1$ ergiebt sich die lineare Kongruenz mit zwei vereinigten Leitgeraden. Ist aber nur die eine Zahl 1, so erhält man Kongruenzen 1. Ordnung oder Klasse, welche unter den Kummerschen sich nicht befinden.

Die Brennfläche besteht als Punktfläche aus den $2n(m - 1)$ Ebenen des Ebenenbüschels, von deren m entsprechenden Punkten sich zwei vereinigt haben, und als Ebenenfläche aus den Bündeln um die $2m(n - 1)$ Punkte der Punktreihe, von deren n entsprechenden Ebenen 2 zusammengefallen sind.

7. Die im Vorangehenden erörterten Brennflächen, bezw. ergänzenden Teile von Brennflächen sind nun freilich von der Art, dafs nicht alle Strahlen der Kongruenz durch ihre Brennpunkte zur Erzeugung derselben beitragen, sondern nur ∞^1, die dann statt zweier Brennpunkte unendlich viele haben; die Brennpunkte der übrigen Kongruenzstrahlen erzeugen nur die Brennkurven.

Obwohl die meisten der von Herrn Kummer ermittelten Kongruenzen 1. und 2. Ordnung mit Brennkurven (§ 2, 4, 5) eine solche Brennfläche enthalten, finde ich sie nur bei einer einzigen erwähnt:

Nach dem Satze XVI des Herrn Kummer erzeugen alle geraden Linien, welche einen Kegel 2ten Grades in den Punkten der Kurve berühren, welche aus ihm durch eine Fläche μ^{ter} Ordnung mit einem

$(\mu - 1)$-fachen Punkte in der Kegelspitze ausgeschnitten wird, eine Kongruenz 2. Ordnung und $2\mu^{ter}$ Klasse.

Der Kegel ist ersichtlich eine Brennfläche der fraglichen Art; er kommt nur durch seine eigenen Kanten als Strahlen der Kongruenz zu stande.

Übrigens kann man den Satz dahin verallgemeinern, dafs die Strahlen der Kongruenz den Kegel in den Punkten einer auf ihm gelegenen Kurve gerader oder ungerader Ordnung n tangieren, welche $(n - 2)$-mal durch die Kegelspitze geht.

Ende Juli 1889.

Zum Pentagramma mirificum.

(Von H. Ahlborn in Hamburg.)

Das Pentagramma mirificum ist ein von Gaufs zuerst untersuchtes Kugelfünfeck, dessen fünf Diagonalen Quadranten sind. Die von Gaufs gefundenen Eigenschaften desselben sind im dritten Bande der gesammelten Werke, Seite 481 bis Seite 490, zusammengestellt. Eine Herleitung oder ein Beweis der Sätze ist dort nicht gegeben. Eine auf das Pentagramma bezügliche Preisarbeit von Wichmann ist in den „Commentationes societatis regiae Gottingensis" vom Jahre 1843 abgedruckt. Der Verfasser der vorstehenden kurzen Mitteilung hat im Programm der Realschule zu Osnabrück vom Jahre 1874 einen Teil der Gaufs'schen Sätze über das Pentagramm hergeleitet. Die folgenden Seiten enthalten den Beweis anderer, unter anderem auch einen von Cayley über das Pentagramm in dem „Philosophical Magazine", Oktoberheft 1871, mitgeteilten Satz.

Die Centralprojektion des Pentagramms vom Mittelpunkte der Kugel aus auf irgend eine Ebene, z. B. auf eine Tangentialebene der Kugel, wie wir sie wählen wollen, ist ein geradliniges Fünfeck, da die Seiten des Pentagramms Bogen gröfster Kreise sind. Die Diagonalen des Originals werden aus demselben Grunde als Diagonalen des ebenen Fünfecks projiziert. Die geometrisch wichtigste Eigenschaft dieses ebenen Fünfecks ist die, dafs die Lote von den Ecken auf die Gegenseiten sich in einem Punkte schneiden, und zwar im Berührungspunkte der Tangentialebene, auf welche projiziert wird. Hiervon überzeugt man sich in folgender Weise: Legt man durch einen der fünf Eckpunkte des Kugelfünfecks A und den Berührungspunkt O der Tangentialebene den gröfsten Kreis, so steht dessen Ebene auf der Bildebene senkrecht, da sie den Berührungsradius der Tangentialebene enthält. Die erste Ebene steht auch senkrecht auf der zu A als Pol gehörenden Äquatorebene, weil alle Meridianebenen zur Äquatorebene senkrecht stehen, deshalb steht der Durchschnitt dieser Äquatorebene und der Bildebene, d. h. das Bild der Äquatorebene senkrecht zur Meridianebene AO, mithin auch zu

deren Bild, einer durch O in der Bildebene gehenden Geraden. Bezeichnet man mithin das Bild von A mit A', so steht $A'O$ senkrecht auf dem Bilde der Gegenseite von A, oder das Lot von A' auf das Bild der Gegenseite von A geht durch O. Wird diese Überlegung auf alle fünf Eckpunkte ausgedehnt, so ergiebt sich der eben angegebene Satz.

Man zeichne die Projektion mit den fünf Loten, bezeichne die fünf Eckpunkte mit A', B', C', D', E', die Fufspunkte der Lote bezüglich mit F', G', H', J', K'. Aus der Ähnlichkeit je zweier „Scheiteldreiecke" folgt, dafs das Produkt der Abschnitte jedes Lots eine konstante Gröfse ist, und zwar gleich dem Quadrate des Kugelradius. Man hat z. B.

$$OA' : OC' = OH' : OF', \text{ also ist } OA' \cdot OF' = OC' \cdot OH'.$$

Bezeichnet ferner M den Mittelpunkt der Kugel, so ist $\sphericalangle A'MF' = 90^0$. Ist also $\sphericalangle OMA' = \vartheta$, so ist $\sphericalangle OMF' = 90^0 - \vartheta$. Da $OA' = OM \operatorname{tg} \vartheta = r \operatorname{tg} \vartheta$, $OF' = r \operatorname{tg} (90^0 - \vartheta) = r \cot \vartheta$ ist, so ist $OA' \cdot OF' = r^2 \operatorname{tg} \vartheta \cdot \cot \vartheta = r^2$.

Die Abschnitte der Lote lassen sich auch mit Hilfe der fünf verschiedenen Winkel um O herum darstellen. Werden dieselben mit 1, 2, 3, 4, 5, der Reihe nach $\sphericalangle A'OJ'$, $\sphericalangle B'OK'$, $\sphericalangle C'OF'$, $\sphericalangle D'OG'$ und $\sphericalangle E'OH'$, ihre cos. mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ferner OJ', OD', OF', OC', OK', OB' mit a, b, c, d, e, f bezeichnet, so ist $OJ' \cdot OD' = a \cdot b$, also auch $OF' \cdot OA' = a \cdot b$, mithin $OA' = \frac{ab}{c}$. Ebenso findet man $OH' = \frac{ab}{d}$, $OE' = \frac{ab}{e}$, $OG' = \frac{ab}{f}$. Für $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ ergiebt sich: $\alpha = \frac{c}{b}$, $\beta = \frac{e}{f}$, $\gamma = \frac{c}{d}$, $\delta = \frac{a}{f}$, $\varepsilon = \frac{e}{d}$. Hieraus folgt: $a = f \cdot \delta$ oder, da $f = \frac{e}{\beta}$, $a = \frac{\delta}{\beta} e$ oder, da $e = \varepsilon \cdot d$, $a = \frac{\delta\varepsilon}{\beta} d$ oder, da $d = \frac{c}{\gamma}$, $a = \frac{\delta\varepsilon}{\beta\gamma} c$ oder, da $c = \alpha \cdot b$, $a = \frac{\alpha\delta\varepsilon}{\beta\gamma} b$, $\frac{a}{b} = \frac{\alpha\delta\varepsilon}{\beta\gamma}$. Es ist also erlaubt zu setzen: $\boldsymbol{a = \lambda \cdot \alpha\delta\varepsilon}$, $\boldsymbol{b = \lambda \cdot \beta\gamma}$, worin λ ein Proportionalitätsfaktor ist. Da $c = b\alpha$, so ist $\boldsymbol{c = \lambda \cdot \alpha\beta\gamma}$. Ebenso ergiebt sich: $\boldsymbol{d = \lambda \cdot \alpha\beta}$, $\boldsymbol{e = \lambda \cdot \alpha\beta\varepsilon}$, $\boldsymbol{f = \lambda \cdot \alpha\varepsilon}$, $\boldsymbol{ab = \lambda^2 \cdot \alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}$, $\boldsymbol{\frac{ab}{c} = \lambda \cdot \delta\varepsilon}$, $\boldsymbol{\frac{ab}{d} = \lambda \cdot \gamma\delta\varepsilon}$, $\boldsymbol{\frac{ab}{e} = \lambda \cdot \gamma\delta}$, $\boldsymbol{\frac{ab}{f} = \lambda \cdot \beta\gamma\delta}$. Bringt man λ durch Wahl der Mafseinheit zum Verschwinden, d. h. macht λ zu 1, so erhält man die von Gaufs a. a. O. gegebenen Ausdrücke für die Abschnitte.

Um die fünf Eckpunkte des Polygons der Projektion in ganzen

komplexen Zahlen ausgedrückt zu erhalten, mögen nach Gaufs p, p', p'', p''', p'''' fünf ganze komplexe Zahlen sein, und zwar $p^{(i)} = a^{(i)} + b^{(i)}i$, so ist die Frage, womit man dieselben zu multiplizieren hat, damit sie so geändert die fünf Eckpunkte darstellen können, d. h. Abscisse $+i$ mal Ordinate. Wir wollen die hinzutretenden Faktoren mit v, v', v'', v''', v'''' bezeichnen, so dafs die betreffenden komplexen Gröfsen sind: $vp, v'p', v''p'', v'''p''', v''''p''''$. Um die Beziehungen, welche zwischen diesen Gröfsen bestehen müssen, und damit die Werte der v, ausgedrückt durch die p, zu erhalten, wählen wir ein rechtwinkliges Koordinatensystem mit O als Anfangspunkt. Die Koordinaten der Punkte A' bis E' seien α_1, β_1 bis α_5, β_5, dann ist Gleichung $A'B'$: $y - \beta_1 = \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2}(x - \alpha_1)$, Gleichung OD': $y = \frac{\beta_4}{\alpha_4} x$. Da $A'B' \perp OD'$, so ist das Produkt der Richtungstangenten gleich -1, mithin

$$\frac{\beta_4}{\alpha_4} \cdot \frac{\beta_1 - \beta_2}{\alpha_1 - \alpha_2} = -1 \quad \text{oder} \quad (\beta_1 - \beta_2)\beta_4 + (\alpha_1 - \alpha_2)\alpha_4 = 0.$$

In gleicher Weise ergeben sich noch die Gleichungen: $(\beta_2 - \beta_3)\beta_5 + (\alpha_2 - \alpha_3)\alpha_5 = 0$, $(\beta_3 - \beta_4)\beta_1 + (\alpha_3 - \alpha_4)\alpha_1 = 0$, $(\beta_4 - \beta_5)\beta_2 + (\alpha_4 - \alpha_5)\alpha_2 = 0$, $(\beta_5 - \beta_1)\beta_3 + (\alpha_5 - \alpha_1)\alpha_3 = 0$. Setzen wir in die erste dieser Gleichungen die von uns gewählten Werte, also statt $\alpha_1 + i\beta_1$ $vp = va + vbi$, statt $\alpha_2 + i\beta_2$ $v'p' = v'a' + v'b'i \ldots$ ein, so bekommen wir $vv'''(aa''' + bb''') - v'v'''(a'a''' + b'b''') = 0$, also, da v''' nicht Null werden kann, $v(aa''' + bb''') - v'(a'a''' + b'b''') = 0$. Gebrauchen wir mit Gaufs für $aa''' + bb'''$ das Symbol $(0, 3)$, statt $a'a''' + b'b'''$ das Symbol $(1, 3) \ldots$, so ist $v(0, 3) - v'(1, 3) = 0$ oder $\frac{v}{v'} = \frac{(1, 3)}{(0, 3)}$. In gleicher Weise findet man:

$$\frac{v'}{v''} = \frac{(4, 2)}{(4, 1)}, \quad \frac{v''}{v'''} = \frac{(0, 3)}{(0, 2)}, \quad \frac{v'''}{v''''} = \frac{(1, 4)}{(1, 3)}, \quad \frac{v''''}{v} = \frac{(2, 0)}{(2, 4)}.$$

Bestimmt man der Reihe nach die übrigen $v^{(i)}$ durch v, so erhält man: $v : v' = (1, 3) : (0, 3)$; $v : v'' = (1, 3)\ (2, 4) : (0, 3)\ (4, 1)$; $v : v''' = (1, 3)\ (2, 4) : (0, 2)\ (4, 1)$; $v : v'''' = (2, 4) : (2, 0)$. Die erste und vierte dieser Gleichungen schreibt man, um übereinstimmende Form aller zu erzielen: $v : v' = (1, 3)\ (2, 4) : (0, 3)\ (2, 4)$; $v : v'''' = (1, 3)\ (2, 4) : (2, 0)\ (1, 3)$. Jetzt ist es erlaubt zu setzen $v = \lambda\ (1, 3)\ (2, 4)$, worin λ ein Proportionalitätsfaktor, dann ist $v' = \lambda\ (0, 3)\ (2, 4)$, $v'' = \lambda\ (0, 3)\ (1, 4)$, $v''' = \lambda\ (0, 2)\ (4, 1)$, $v'''' = \lambda\ (0, 2)\ (1, 3)$. Die Koordinaten der fünf Punkte sind demnach $\lambda\ (1, 3)\ (2, 4)\ a$ und $\lambda\ (1, 3)\ (2, 4)\ b$ u. s. w. oder die dem Punkte 1 zugehörige, ganze komplexe Zahl ist $\lambda\ (1, 3)\ (2, 4) \cdot p$ u. s. w.

Da der Faktor λ überall auftritt, so kann man ihn in die ge-

wählte Maſseinheit eingehen lassen. Dann sind die den Punkten A bis E zugehörigen komplexen Zahlen: $(1, 3)\,(2, 4)\,p = q$, $(2, 4)\cdot(3, 0)\,p' = q'$ u. s. w. $(0, 2)\,(1, 3)\,p'''' = q''''$.

Wie lautet nun das konstante Produkt der Abschnitte? Bei der Bestimmung desselben werden Ausdrücke auftreten von der Form $q^{(i)} - q^{(k)}$, die sich nach Einsetzung ihrer Werte einfacher schreiben lassen. So ist z. B. $q' - q = (2, 4)\,(3, 0)\,p' - (1, 3)\,(2, 4)\,p = (2, 4)\,[(3, 0)\,p' - (1, 3)\,p] = (2, 4)\,[a'b\,(b''' - a'''i) + ab'\,(a'''i - b''')]$. Da nun $a'''i - b''' = i\,(a''' + b'''i)$, $b''' - a'''i = -i\,(a''' + b'''i)$, so erhält man $q' - q = (2, 4)\,[-ia'b\,(a''' + b'''i) + iab'\,(a''' + b'''i)] = -(2, 4)\,(a'b - ab')\,p'''i$. Ebenso ergiebt sich $q'' - q' = -(0, 3)\,(a''b' - b''a')\,p'''i$, $q'''' - q'' = -(1, 4)\,(a'''b'' - b'''a'')\,pi$ u. s. w.

Wir bezeichnen im folgenden die fünf Eckpunkte mit den ihnen zugeordneten komplexen Zahlen q, q', q'', q''', q'''', die Fuſspunkte der Lote von ihnen auf die Gegenseiten mit $Q, Q', Q'', \ldots Q''''$, welche entsprechende Bedeutung haben sollen. Q''' ist der Schnittpunkt von qq' mit Oq'''. Setzen wir abkürzend $q = m + ni$, $q' = m' + n'i$ u. s. w., so ist Gleichung qq': $y - n = \frac{n - n'}{m - m'}(x - m)$, Gleichung Oq''': $y = \frac{n'''}{m'''}x$. Um aus ihnen die dem ihnen gemeinsamen Punkte Q''' zugehörigen Koordinaten x, y zu bestimmen, schreibt man die Gleichungen $(n - n')\,x - (m - m')\,y + mn' - nm' = 0$ und $n'''x - m'''y = 0$, und es ergiebt sich sofort:

$$x = -\frac{\begin{vmatrix} 0 & -m''' \\ mn' - nm' & -(m - m') \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n''' & -m''' \\ n - n' & -(m - m') \end{vmatrix}} = -\frac{m'''(mn' - nm')}{m'''(n - n') - n'''(m - m')},$$

$$y = -\frac{\begin{vmatrix} n''' & 0 \\ n - n' & mn' - nm' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} n''' & -m''' \\ n - n' & -(m - m') \end{vmatrix}} = -\frac{n'''(mn' - nm')}{m'''(n - n') - n'''(m - m')}.$$

Der Nenner dieser Ausdrücke ist

$$= -(4, 1)\,(0, 2)\,[a'''^2(a'b - ab')\,(2, 4) + b'''^2(a'b - ab')\,(2, 4)]$$
$$= -(4, 1)\,(0, 2)\,(2, 4)\,(a'b - b'a)\,(a'''^2 + b'''^2).$$

Weiter ist $mn' - nm' = (1, 3)\,(2, 4)^2\,(3, 0)\,(ab' - ba')$, also

$$m'''(mn' - nm') = (4, 1)\,(0, 2)\,(1, 3)\,(2, 4)^2\,(3, 0)\,(ab' - ba')\,a''',$$
$$n'''(mn' - nm') = (4, 1)\,(0, 2)\,(1, 3)\,(2, 4)^2\,(3, 0)\,(ab' - ba')\,b'''.$$

Daraus folgt:

$$x = \frac{(1, 3)\,(2, 4)\,(3, 0)\,a'''}{a'''^2 + b'''^2}, \quad y = -\frac{(1, 3)\,(2, 4)\,(3, 0)\,b'''}{a'''^2 + b'''^2},$$

also

$$Q''' = x + yi = \frac{(1,3)\,(2,4)\,(3,0)\,p'''}{a'''^2 + b'''^2}.$$

Das Produkt $Oq''' \cdot OQ'''$ wird $\sqrt{x^2+y^2} \cdot \sqrt{a'''^2+b'''^2} \cdot (4,1)\,(0,2)$

$$= \frac{(1,3)\,(2,4)\,(3,0)\sqrt{a'''^2+b'''^2} \cdot (4,1)\,(0,2)\sqrt{a'''^2+b'''^2}}{a'''^2+b'''^2}$$

$$= (1,3)\,(2,4)\,(3,0)\,(4,1)\,(0,2).$$

In Gaufs' auf das Pentagramm bezüglichem Nachlafs finden sich noch die Ausdrücke für die Differenzen $Q''' - q$ und $q' - Q'''$, wofür man leicht findet

$$Q''' - q = \frac{(1,3)\,(2,4)}{a'''^2+b'''^2} \cdot [(3,0)\,p''' - p\,(a'''^2 + b'''^2]$$

$$= -\frac{(1,3)\,(2,4)}{a'''^2+b'''^2}(a'''b - ab''')\,p'''i,$$

$$q' - Q''' = -\frac{(0,3)\,(2,4)}{a'''^2+b'''^2}(a'''b' - a'b''')\,p'''i.$$

Eine Verwendung finden sie nicht. Zur Auffindung durch ihre Form (interessanter) bemerkenswerter Ergebnisse führen sie nicht.

Auf die Form ist es Gaufs bei der Hinzuziehung der komplexen Zahlen anscheinend nur angekommen. Einfacher wird das Ergebnis nicht. Eine sehr bemerkenswerte, weil recht einfache Form erhält der Ausdruck für das vielgenannte Produkt, wenn man die Koordinaten der fünf Punkte der Projektion unmittelbar benutzt. Bezeichnen wir sie, wie Seite 71 geschehen, mit $\alpha_1, \beta_1, \ldots \alpha_5, \beta_5$, so sind die Gleichungen von Oq''' und qq': $x\beta_4 - y\alpha_4 = 0$ und

$$x(\beta_1 - \beta_2) - y(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_1(\beta_1 - \beta_2) - \beta_1(\alpha_1 - \alpha_2) = \alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1.$$

Für Q''' ergiebt sich mithin

$$x = \frac{\alpha_4(\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1)}{\beta_4(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_4(\beta_2 - \beta_1)}, \quad y = \frac{\beta_4(\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1)}{\beta_4(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_4(\beta_2 - \beta_1)}.$$

Das Produkt $Qq''' \cdot OQ'''$ ist

$$\sqrt{\alpha_4^2 + \beta_4^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} = (\alpha_4^2 + \beta_4^2)\,\frac{\alpha_2\beta_1 - \beta_2\alpha_1}{\beta_4(\alpha_2 - \alpha_1) - \alpha_4(\beta_2 - \beta_1)}.$$

Von Seite 71 entnehmen wir $(\alpha_1 - \alpha_2)\,\alpha_4 + (\beta_1 - \beta_2)\,\beta_4 = 0$, woraus folgt: $\alpha_2 - \alpha_1 = -\frac{\beta_4(\beta_2 - \beta_1)}{\alpha_4}$. Nach Einsetzung dieses Wertes ergiebt sich nach einigen Umformungen:

$$\frac{\alpha_1\alpha_4\beta_2 - \beta_1\alpha_2\alpha_4}{\beta_2 - \beta_1} = \alpha_1\alpha_4 + \frac{\alpha_1\alpha_4\beta_1 - \beta_1\alpha_2\alpha_4}{\beta_2 - \beta_1} = \alpha_1\alpha_4 + \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\,\alpha_4\beta_1}{\beta_2 - \beta_1}.$$

Setzt man hierin für $\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\beta_1 - \beta_2}$ $-\frac{\beta_4}{\alpha_4}$, so erhält man $Oq''' \cdot OQ''' = \alpha_1\alpha_4$

$+ \beta_1\beta_4$. In ähnlicher Weise würde man auch erhalten $\alpha_1\alpha_3 + \beta_1\beta_3$, $\alpha_2\alpha_4 + \beta_2\beta_4$, $\alpha_2\alpha_5 + \beta_2\beta_5$, $\alpha_3\alpha_5 + \beta_3\beta_5$. In dieser Form hat Cayley das Produkt a. a. O. angegeben. Sie zeigt, dafs dasselbe nur von den Koordinaten zweier Punkte abhängig ist, wie das Kugelfünfeck durch die Wahl zweier Punkte auf der Kugel völlig bestimmt ist.

Kombinatorische Ableitung einiger Eigenschaften der Θ-Funktionen.

(Von W. Bock in Hamburg.)

$$\Theta(w;\ n) \text{ ist } e^{n[2w+n\tau)\pi i} \cdot \Theta(w + n\tau) = \sum_{\nu:\ -\infty \cdots \infty} e^{(\nu+n)^2\tau\pi i} \cdot e^{2(\nu+n)w\pi i},$$

demnach

$$e^{\frac{w^2}{\tau}\pi i} \cdot \Theta(w;\ n) = \sum_{\nu}^{-\infty \cdots \infty} e^{(w+(\nu+n)\tau)^2 \frac{\pi i}{\tau}}$$

$$e^{\frac{w^2}{\tau}\pi i} \cdot \Theta(w)_3 = \sum e^{(w+\nu\tau)^2 \cdot \frac{\pi i}{\tau}}, \text{ da } \Theta(w)_3 = \Theta(w;\ 0),$$

$$e^{\frac{w^2}{\tau}\pi i}\, \Theta(w)_2 = \sum e^{\left(w+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2 \cdot \frac{\pi i}{\tau}}, \text{ da } \Theta(w)_2 = \Theta\left(w;\ \tfrac{1}{2}\right).$$

$$\begin{aligned} 2w_1 \text{ soll} &= w + w' + w'' + w''' \text{ sein,} \\ 2w_1' &= w + w' - w'' - w''' \\ 2w_1'' &= w - w' + w'' - w''' \\ 2w_1''' &= w - w' - w'' + w''', \end{aligned}$$

setzt man:

$$\left.\begin{aligned} w &= a + b \\ w' &= a - b \\ w'' &= c + d \\ w''' &= c - d \end{aligned}\right\}, \text{ so ist: } \begin{cases} w_1 = a + c \\ w_1' = a - c \\ w_1'' = b + d \\ w_1''' = b - d \end{cases}$$

und man sieht, dafs $w^2 + w'^2 + w''^2 + w'''^2$ oder $\sum w^2 = w_1^2 + w_1'^2 + w_1''^2 + w_1'''^2$ oder $\sum w_1^2$.

Es soll gezeigt werden, dafs

(1) $\Theta(w)_3 \cdot \Theta(w')_3 \cdot \Theta(w'')_3 \cdot \Theta(w''')_3 + \Theta(w)_2 \cdot \Theta(w')_2 \cdot \Theta(w'')_2 \cdot \Theta(w'$

(2) $= \Theta(w_1)_3 \cdot \Theta(w_1')_3 \cdot \Theta(w_1'')_3 \cdot \Theta(w_1''')_3 + \Theta(w_1)_2 \cdot \Theta(w_1')_2 \cdot \Theta(w_1'')_2 \cdot \Theta(w_1'$

(I) $$e^{\sum \frac{w^2}{\tau}\pi i}\, \Theta(w)_3 \cdot \Theta(w')_3 \cdot \Theta(w'')_3 \cdot \Theta(w''')_3 = \sum_{\nu\nu'\nu''\nu'''} e^{\frac{\pi i}{\tau}[(a+b+\nu\tau)^2 + (a-b+\nu'\tau)^2 + (c+d+\nu''\tau)^2 + (c-d+\nu'''\tau)^2]}$$

$$e^{\Sigma\frac{w^2}{\tau}\pi i}\cdot\Theta(w)_2\cdot\Theta(w')_2\cdot\Theta(w'')_2\cdot\Theta(w''')_2 =$$

(II) $$\sum_{\nu\nu'\nu''\nu'''} e^{\frac{\pi i}{\tau}\left[\left(a+b+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2+\left(a-b+\left(\nu'+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2+\left(c+d+\left(\nu''+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2+\left(c-d+\left(\nu'''+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2\right]}$$

$$e^{\Sigma w_1^2\frac{\pi i}{\tau}}\cdot\Theta(w_1)_3\cdot\Theta(w_1')_3\cdot\Theta(w_1'')_3\cdot\Theta(w_1''')_3 =$$

(III) $$\sum_{\nu\nu'\nu''\nu'''} e^{\frac{\pi i}{\tau}[(w_1+\nu\tau)^2+(w_1'+\nu'\tau)^2+(w_1''+\nu''\tau)^2+(w_1'''+\nu'''\tau)^2]}$$

$$e^{\Sigma w_1^2\frac{\pi i}{\tau}}\cdot\Theta(w_1)_2\cdot\Theta(w_1')_2\cdot\Theta(w_1'')_2\cdot(\Theta(w_1''')_2 =$$

IV) $$\sum_{\nu\nu'\nu''\nu'''} e^{\frac{\pi i}{\tau}\left[\left(w_1+\left(\nu+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2+\left(w_1'+\left(\nu'+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2+\left(w_1''+\left(\nu''+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2+\left(w_1'''+\left(\nu'''+\frac{1}{2}\right)\tau\right)^2\right]}.$$

Da $$e^{\Sigma w^2\cdot\frac{\pi i}{\tau}} = e^{\Sigma w_1^2\cdot\frac{\pi i}{\tau}} = C,$$

so ist (1) = (2), wenn (I) + (II) = (III) + IV.

Zunächst soll gezeigt werden, dafs man die Summe aus I und II auch erhält, wenn man

1) in (I) setzt $\nu = \frac{a+b}{2}$, $\nu' = \frac{a-b}{2}$, $\nu'' = \frac{c+b}{2}$, $\nu''' = \frac{c-b}{2}$,

2) $a = \alpha+\beta$, $b = \gamma+\delta$, $c = \gamma-\delta$, $b = \alpha-\beta$ definiert und

3) die beiden 4-fach unendlichen Summen bildet $\sum_{\alpha}^{n}\sum_{\beta}^{n'}\sum_{\gamma}^{n''}\sum_{\delta}^{n'''}\cdots$,

wo α der Reihe nach alle ganzzahligen Werte n von $-\infty$ bis $+\infty$ durchläuft u. s. w. — und: $\sum_{\alpha}^{n+\frac{1}{2}}\sum_{\beta}^{n'+\frac{1}{2}}\sum_{\gamma}^{n''+\frac{1}{2}}\sum_{\delta}^{n'''+\frac{1}{2}}$, wo also für α: $n+\frac{1}{2}$ zu setzen ist und n der Reihe nach alle ganzen Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$ bedeutet.

Führt man die erste dieser Operationen aus, so erhält man als allgemeines Glied von (I)

(G) $$e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left\{a^2+b^2+c^2+d^2+\tau(ac+bb+cc+db)+\tau^2\left(\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4}\right)\right\}}.$$

Führt man α, β, γ und δ ein, so hat man ersetzt:

$$\nu \text{ durch } \frac{\alpha+\beta+(\gamma+\delta)}{2},$$

$$\nu' \quad " \quad \frac{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)}{2},$$

$$\nu'' \quad " \quad \frac{\gamma-\delta+(\alpha-\beta)}{2},$$

$$\nu''' \quad " \quad \frac{\gamma-\delta-(\alpha-\beta)}{2}.$$

Setzt man nun für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je irgend eine ganze Zahl, so sind die Zähler der rechten Seite zu gleicher Zeit entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade; dies ist noch der Fall, wenn man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ je eine ganze Zahl $+\frac{1}{2}$ setzt.

$$\nu = \frac{\alpha+\beta+(\gamma+\delta)}{2}, \quad \nu' = \frac{\alpha+\beta-(\gamma+\delta)}{2}, \text{ u. s. w. gesetzt, so}$$

muſs

$$\begin{aligned} 2\alpha &= \nu + \nu' + \nu'' - \nu''', \\ 2\beta &= \nu + \nu' - \nu'' + \nu''', \\ 2\gamma &= \nu - \nu' + \nu'' + \nu''', \\ 2\delta &= \nu - \nu' - \nu'' - \nu'''. \end{aligned}$$

Die rechten Seiten sind für ganzzahlige Kombinationen der ν entweder sämtlich gerade oder sämtlich ungerade. Dies bleibt der Fall, wenn jedes ν gleich einer ganzen Zahl $+\frac{1}{2}$ gesetzt wird.

Jede Kombination von Werten für $\nu, \ldots, \nu'''$ bestimmt hiernach ferner eine Kombination von Werten für $\alpha, \ldots \delta$ und umgekehrt. Es können nicht zwei verschiedene Kombinationen von Werten für $\alpha, \ldots \delta$ einer einzigen Kombination von Werten für $\nu, \ldots \nu'''$ entsprechen. Folglich: Wenn man in dem allgemeinen Glied (G), nachdem $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$ durch ihre Ausdrücke in $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ersetzt sind, für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle möglichen ganzzahligen Kombinationen von vier Elementen und alle möglichen Kombinationen von vier Elementen einführt, wo jedes Element eine ganze Zahl plus $\frac{1}{2}$ ist, so ist es dasselbe, als wenn man in I für $\nu, \ldots \nu'''$ ebenfalls alle möglichen solcher Kombinationen einführt, und dies ist dasselbe, als wenn man I und II addiert, wie der Anblick von I und II beweist. Demnach ist I + II =

$$\sum_{\alpha}^{n}\sum_{\beta}^{n}\sum_{\gamma}^{n''}\sum_{\delta}^{n'''} e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left\{a^2+b^2+c^2+d^2+\tau(a[\alpha+\beta]+b[\gamma+\delta]+c[\gamma-\delta]+d[\alpha-\beta])\right.}$$
$$\left.+\tau^2\left(\frac{(\alpha+\beta)^2}{4}+\frac{(\gamma+\delta)^2}{4}+\frac{(\gamma-\delta)^2}{4}+\frac{(\alpha-\beta)^2}{4}\right)\right\}$$
$$+\sum_{\alpha}^{n+\frac{1}{2}}\sum_{\beta}^{n'+\frac{1}{2}}\sum_{\gamma}^{n''+\frac{1}{2}}\sum_{\delta}^{n'''+\frac{1}{2}}\vartheta^0, \ldots . \vartheta^0, \ldots . \vartheta^0, \ldots . \vartheta^0.$$

Es bleibt zu zeigen: Man erhält ebenso die Summe aus III und IV, wenn man

1) in III setzt: $\quad \nu = \frac{\mathfrak{a}+\mathfrak{c}}{2}, \ \nu' = \frac{\mathfrak{a}-\mathfrak{c}}{2},$

$$\nu'' = \frac{\mathfrak{b}+\mathfrak{d}}{2}, \ \nu''' = \frac{\mathfrak{b}-\mathfrak{d}}{2},$$

2) wieder $\mathfrak{a} = \alpha + \beta$,
$\mathfrak{b} = \gamma + \delta$,
$\mathfrak{c} = \gamma - \delta$,
$\mathfrak{d} = \alpha - \beta$ setzt und

3) in derselben Weise wie vorhin nach $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, die Summe bildet.

Durch die erste Operation bekommt man als allgemeines Glied von III wieder:

$$(G) \qquad e^{\frac{2\pi i}{\tau}\left(a^2+b^2+c^2+d^2+\tau(a\mathfrak{a}+b\mathfrak{b}+c\mathfrak{c}+d\mathfrak{d})+\tau^2\left(\frac{\mathfrak{a}^2}{4}+\frac{\mathfrak{b}^2}{4}+\frac{\mathfrak{c}^2}{4}+\frac{\mathfrak{d}^2}{4}\right)\right)}.$$

Wenn man beweist, dafs aus der 4-fach unendlichen Summe von Gliedern dieser Art (sobald für $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ihre Ausdrücke in $\alpha \ldots \delta$ eingeführt und für $\alpha, \ldots, \delta$ einmal die ganzen Zahlen in allen möglichen Kombinationen und einmal die ganzen Zahlen plus $\frac{1}{2}$, auch in allen möglichen Kombinationen gesetzt werden), die Summe von III und IV hervorgeht, so ist offenbar III + IV = I + II (folglich (1) = (2) wie zu beweisen war), da jetzt dasselbe allgemeine Glied wie vorhin vorliegt.

Durch die vorgeschriebenen Substitutionen wird aber

$$\nu = \frac{\alpha + \beta + (\gamma - \delta)}{2},$$
$$\nu' = \frac{\alpha + \beta - (\gamma - \delta)}{2},$$
$$\nu'' = \frac{\alpha - \beta + (\gamma + \delta)}{2},$$
$$\nu''' = \frac{\gamma + \delta - (\alpha - \beta)}{2}$$

und

$$2\alpha = \nu + \nu' + \nu'' - \nu''',$$
$$2\beta = \nu + \nu' - \nu'' + \nu''',$$
$$2\gamma = \nu - \nu' + \nu'' + \nu''',$$
$$2\delta = -\nu + \nu' + \nu'' + \nu'''.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich dieselben Schlüsse ziehen, wie aus den analogen auf Seite 76.

Ferner entsteht III + IV aus III wie

I + II aus I.

Folglich ist III + IV wirklich der vierfach unendlichen Summe von Gliedern (G), in der früheren Weise gebildet, gleich, welche Summe auch = I + II, folglich:

$$\text{I} + \text{II} = \text{III} + \text{IV},$$

oder (1) = (2), d. h.:

$$\Theta(w)_3\Theta(w')_3\Theta(w'')_3\Theta(w''')_3 + \Theta(w)_2\Theta(w')_2\Theta(w'')_2\Theta(w''')_2$$
$$= \Theta(w_1)_3\Theta(w_1')_3\Theta(w_1'')_3\Theta(w_1''')_3 + \Theta(w_1)_2\Theta(w_1')_2\Theta(w_1'')_2\Theta(w_1''')_2,$$

wenn zwischen den Argumenten die folgenden Relationen bestehen:

$$\begin{cases} w_1 = \frac{1}{2}(w + w' + w'' + w''') \\ w_1' = \frac{1}{2}(w + w' - w'' - w''') \\ w_1'' = \frac{1}{2}(w - w' + w'' - w''') \\ w_1''' = \frac{1}{2}(w - w' - w'' + w'''). \end{cases}$$

Für $\Theta(w)_n$ ist der Kürze wegen $(w)_n$ geschrieben.

Wenn mehrere aufeinander folgende Posten (auf einer und derselben Seite einer Gleichung), die aus Θ-Funktionen als Faktoren zusammengesetzt sind, untereinander dieselben Argumente haben, so sind diese nur einmal angegeben und nur die Indices der folgenden Θ-Funktionen bemerkt; z. B. bedeutet:

$(w)_0(w')_0(w'')_0(w''')_0 +_{1111}$ nur: $(w)_0(w')_0(w'')_0(w'')_0 + (w)_1(w')_1(w'')_1(w''')_1$.

Die Fundamentalformel, von der wir ausgehen, ist:

(1) $\quad (w)_3(w')_3(w'')_3(w''')_3 +_{2222} = (w_1)_3(w_1')_3(w_1'')_3(w_1''')_3 +_{2222}$.

Hierin setze man für $w : w + \frac{1}{2}$,
„ $w' : w' + \frac{1}{2}$,
„ $w'' : w'' + \frac{1}{2}$,
„ $w''' : w''' + \frac{1}{2}$

und bemerke, die Gleichung (1) setzt voraus, dafs unter den acht Argumenten $w, w', \ldots w_1, \ldots$ die folgenden vier Relationen bestehen:

$$2w_1 = w + w' + w'' + w''',$$
$$2w_1' = w + w' - w'' - w''',$$
$$2w_1'' = w - w' + w'' - w''',$$
$$2w_1''' = w - w' - w'' + w'''.$$

Man erhält:

$$(w)_0(w')_0(w'')_0(w''')_0 -_{1111} = (w_1)_0(w_1')_0(w_1'')_0(w_1''')_0 -_{1111}.$$

Setzt man fest, dafs $w''' = -w - w' - w''$, dafs also $w_1 = 0$, so kommt:

A $\{(0)_0(w+w')_0(w+w'')_0(w'+w'')_0 = (w)^0(w')_0(w'')_0(w+w'+w'')_0 +_{1111}$.

Setzt man in A wieder $w + \frac{1}{2}$ für w, $w' + \frac{1}{2}$ für w', $w'' + \frac{1}{2}$ für w'', so hat man:

B $\quad \begin{cases} (0)_0(w + w')_0(w + w'')_0(w' + w'')_0 = \\ = (w)_3(w')_3(w'')_3(w + w' + w'')_3 -_{2222}. \end{cases}$

In (1) werde gesetzt für $w'' : w'' + \frac{1}{2}$,

„ $w''' : w''' - \frac{1}{2}$; man bekommt:

$$(w)_3(w')_3(w'')_0(w''')_0 - {}_{2211} = (w_1)_3(w_1')_3(w_1'')_0(w_1''')_0 - {}_{2211}.$$

Bestimmt man noch, dafs $w' = -w - w'' - w'''$, d. h. $w_1 = 0$, so ergiebt sich:

$$(w)_3(w + w'' + w''')_3(w'')_0(w''')_0 - {}_{2211}$$
$$= (0)_3(w'' + w''')_3(w + w'')_0(w + w''')_0 - {}_{2211},$$

also auch (wenn man statt w''' setzt w', und w und w'' vertauscht):

(a)
$$\begin{cases} (0)_3(w + w')_3(w + w'')_0(w' + w'')_0 - {}_{2211} \\ = (w)_0(w')_0(w'')_3(w + w' + w'')_3 - {}_{1122}, \end{cases}$$

ferner auch (wenn man erwägt, dafs $w + w' + w'' + w''' = 0$, und dafs nur $\Theta(u)_1$ eine ungerade Funktion):

(b)
$$\begin{cases} (0)_3(w + w')_3(w + w'')_0(w' + w'')_0 + {}_{2211} \\ = (w)_3(w')_3(w'')_0(w + w' + w'')_0 + {}_{2211}. \end{cases}$$

Setzt man in A und B statt w'': $w'' + \frac{1}{2}$ und bemerkt, dafs die linken Seiten von A und B einander gleich, so ergiebt sich:

(c) $\{(w)_0(w')_0(w'')_3(w+w'+w'')_3 + {}_{1122} = (w)_3(w')_3(w'')_0(w+w'+w'')_0 - {}_{2211}$,

(a) + (b) − (c) ergiebt, durch 2 geteilt:

C $\{(0)_3(w+w')_3(w+w'')_0(w'+w'')_0 = (w)_0(w')_0(w'')_3(w+w'+w'')_3 + {}_{2211}$.

Setzt man hier wieder $w + \frac{1}{2}$ für w, $w' + \frac{1}{2}$ für w' und $w'' + \frac{1}{2}$ für w'', so hat man:

D $\{(0_3)(w+w')_3(w+w'')_0(w'+w'')_0 = (w)_3(w')_3(w'')_0(w+w'+w'')_0 - {}_{1122}$.

In (1) werde ferner gesetzt: für $w : w + \frac{1}{2}$,

$w' : w' - \frac{1}{2}$,

$w'' : w'' + \frac{\tau}{2}$,

$w''' : w''' + \frac{\tau}{2}$;

man erhält:
$$e^{-\frac{1}{2}(2w'' + 2w''' + \tau)\pi i}\{(w)_0(w')_0(w'')_2(w''')_2 - {}_{1133}\}$$
$$= e^{-\frac{1}{2}(2w_1 - 2w_1' + \tau)\pi i} \cdot \{(w_1)_2(w_1')_2(w_1'')_0(w_1''')_0 + {}_{3311}\},$$

ferner bestimmt: $w + w' + w'' + w''' = 0$, d. h. $w_1 = 0$,

so ist:

(d)
$$\begin{cases} (0)_2(w + w')_2(w + w'')_0(w' + w'')_0 - {}_{3311} \\ = (w)_0(w')_0(w'')_2(w + w' + w'')_2 - {}_{1133}. \end{cases}$$

Endlich in (1) eingeführt für $w : w + \frac{\tau}{2}$,

$w' : w' + \frac{\tau}{2}$,

$w'' : w'' + \frac{1}{2}$,

$w'' : w''' - \frac{1}{2}$,

so ist: $e^{-\frac{1}{2}(2w+2w'+\tau)\pi i}\{(w)_2(w')_2(w'')_0(w''')_0 - {}_{3311},\}$

$= e^{-\frac{1}{2}(2w_1+2w'+\tau)\pi i}\{(w_1)_2(w_1')_2(w_1'')_0(w_1''')_0 - {}_{3311}\}$

und wieder $w + w' + w'' + w''' = 0$ gesetzt:

(e) $\begin{cases}(0)_2(w+w')_2(w+w'')_0(w'+w'')_0 + {}_{3311} \\ = (w)_2(w')_2(w'')_0(w+w'+w'')_0 + {}_{3311}.\end{cases}$

In C und D setze man für $w'' : w'' + \frac{\tau}{2}$ und bemerke wieder, dafs die linken Seiten einander gleich, so kommt man auf die folgende Gleichung (wenn man noch dividiert durch $e^{-\frac{1}{2}(2w''+2w+2w'+2w''+\tau)\pi i}$):

(f) $\{(w)_0(w')_0(w'')_2(w+w'+w'')_2 - {}_{2200} + {}_{3311} + {}_{1133} = 0,$

(d), (e) und (f) addiert ergeben:

E $\{(0)_2(w+w')_2(w+w'')_0(w'+w'')_0 = (w)_0(w')_0(w'')_2(w+w'+w'')_2 + {}_{3311},$

(d) + (e) — (f) giebt:

F $\{(0)_2(w+w')_2(w+w'')_0(w'+w'')_0 = (w)_2(w')_2(w'')_0(w+w'+w'')_0 - {}_{1133}.$

Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der aus den vierten Wurzeln der Einheit gebildeten komplexen Zahlen.

(Von E. Busche in Bergedorf.)

Das Prinzip des dritten Gaufsschen Beweises für das nach Legendre benannte Reciprocitätsgesetz hat niemals aufgehört, das Interesse der Mathematiker zu erregen; bei den meisten der nach Gaufs veröffentlichten Beweise dieses Satzes sind die in dem dritten Beweis eröffneten Wege betreten worden. Es würde deshalb von Wert sein, wenn auch für das biquadratische Reciprocitätsgesetz der von Gaufs gefundene, aber nicht veröffentlichte Beweis geliefert würde, der mit seinen Mitteln nicht über das Gebiet der Potenzreste hinausgreift und zugleich verhältnismäfsig so einfach ist, wie der erwähnte dritte Beweis des Legendreschen Gesetzes. Der von mir im 99. Bande des Journals f. d. r. u. ang. Math. veröffentlichte Beweis ist bis jetzt,

soviel ich weifs, der einzige, welcher die erstgenannte Bedingung erfüllt, aber er ist so umständlich, dafs er dem hinsichtlich des Legendreschen Satzes so vollständig und mannigfaltig befriedigten Bedürfnis nach einem einfachen Beweise durchaus nicht genügt. Ich habe deshalb versucht, zunächst für das quadratische Reciprocitätsgesetz in der Theorie der gewöhnlichen komplexen Zahlen einen besseren Beweis aufzufinden und in den folgenden Zeilen auseinanderzusetzen. Der Gedankengang desselben ist in der That möglichst einfach: es werden für die Gaufsschen Decidenten Ausdrücke durch die Legendresche Funktion $E(x)$ mit reellem Argument aufgestellt und von deren Summe bewiesen, dafs sie eine gerade Zahl ist. Aber einer dieser Ausdrücke wird doch wieder so verwickelt, dafs nach meiner Ansicht der folgende Beweis nicht unmittelbar als eine Vorbereitung zu einem Beweise des biquadratischen Gesetzes angesehen werden darf.

Ich werde die folgenden Formeln über die Funktion $E(x)$ gebrauchen, von denen die beiden letzten vielleicht nicht bekannt sind. Ich benutze die Gaufssche Bezeichnung der gröfsten ganzen Zahl; m, n, k seien positive ungerade, g eine positive gerade Zahl, und je zwei dieser Zahlen seien teilerfremd. Die Kongruenzen beziehen sich hier und auch in dem folgenden immer, wenn der Modul nicht ausdrücklich angegeben wird, auf den Modul 2.

$$\text{I}^a. \qquad \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{x\cdot m}{n}\right] + \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{x\cdot n}{m}\right] = \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2},$$

$$\text{I}^b. \qquad \sum_1^{\frac{g}{2}-1} \left[\frac{x\cdot m}{g}\right] + \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{x\cdot g}{m}\right] = \left(\frac{g}{2}-1\right)\cdot\frac{m-1}{2},$$

$$\text{II}. \qquad \sum_1^{m} \left[\frac{x\cdot g}{m}\right] = (g-1)\cdot\frac{m+1}{2} + 1 \equiv \frac{m-1}{2},$$

$$\text{III}^a. \qquad \sum_1^{\frac{k-1}{2}} \left[\frac{x\cdot m}{k}\right] + \sum_1^{\frac{k-1}{2}} \left[\frac{x\cdot n}{k}\right] \equiv \sum_1^{\frac{k-1}{2}} \left[\frac{x\cdot mn}{k}\right],$$

$$\text{III}^b. \qquad \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{x\cdot k}{m}\right] + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{x\cdot k}{n}\right] \equiv \sum_1^{\frac{mn-1}{2}} \left[\frac{x\cdot k}{mn}\right],$$

$$\text{III}^c. \qquad \sum_1^{\frac{m-1}{2}} \left[\frac{x\cdot g}{m}\right] + \sum_1^{\frac{n-1}{2}} \left[\frac{x\cdot g}{n}\right] \equiv \sum_1^{\frac{mn-1}{2}} \left[\frac{x\cdot g}{mn}\right],$$

IV^a. $$\sum_{1}^{\frac{n-1}{2}}\left[\frac{(2x-1)m}{2n}\right] \equiv \frac{m-1}{2}\cdot\frac{n-1}{2},$$

IV^b. $$\sum_{1}^{\frac{g}{2}}\left[\frac{(2x-1)m}{2g}\right] \equiv \left[\frac{m}{4}\right] + \frac{m-1}{2}\cdot\left(\frac{g}{2}+1\right).$$

Die bekannten Formeln I und II lassen sich am leichtesten mittels der Eisensteinschen geometrischen Methode herleiten. Die Formeln III ergeben sich sofort, wenn man berücksichtigt, dafs

$$(-1)^{\sum\left[\frac{xm}{k}\right]} = \left(\frac{m}{k}\right),$$

$$(-1)^{\sum\left[\frac{xg}{k}\right]} = \left(\frac{g}{k}\right)\cdot(-1)^{\frac{m^2-1}{8}},$$

und dafs $$\frac{m^2-1}{8} + \frac{n^2-1}{8} \equiv \frac{m^2n^2-1}{8}$$

ist. Die Formeln IV, welche auf heuristischem Wege wohl nicht ganz leicht zu beweisen sein dürften, lassen sich mit Hilfe der induktiven Methode bewahrheiten, die ich in meiner Doktordissertation (Über eine Beweismethode in der Zahlentheorie u. s. w. Göttingen 1883) angegeben habe. Da der Beweis ziemlich umständlich ist, kann ich hier nicht darauf eingehen.

Indem ich jetzt zu dem Reciprocitätsgesetze selbst übergehe, mache ich über die in demselben vorkommenden Zahlen $\pi = a + bi, \varkappa = c + di$ der Kürze wegen die Voraussetzungen, dafs beide Zahlen Primzahlen sind, und dafs a, b, c, d positiv, a, c ungerade, b, d gerade sind. Der Beweis beruht auf dem Gaufsschen Lemma, welches hier folgendermafsen lautet: Die Zahl π ist quadratischer Rest oder Nichtrest von $\varkappa$, je nachdem der Decident $D(\pi, \varkappa)$, d. i. die Anzahl derjenigen Zahlen $\xi\pi$, welche mit einer der Zahlen $\pm\xi i$ nach dem Modul $\varkappa$ kongruent sind, gerade oder ungerade ist, wobei ξ die Zahlen eines Viertelsystems in Bezug auf $\varkappa$ durchläuft.

Das einzige hier zu benutzende Viertelsystem (ξ) eines Moduls μ ist dasjenige, welches von den in dem Quadrat mit den Ecken $0, \frac{1}{2}\mu, \frac{1+i}{2}\mu, \frac{i}{2}\mu$ liegenden Zahlen gebildet wird.

Man kann das angegebene Kriterium für den quadratischen Restcharakter nach Gaufs' Vorgange (vgl. Art. 7, 8 des Nachlafs III über die biquadratischen Reste. Werke, Band 2) in Bezug auf π und $\varkappa$ symmetrischer gestalten, indem man statt der ganzen Vielfachen $\xi\pi$ zunächst die halben Vielfachen $\frac{\xi}{2}\pi$ einführt. Irgend eine Zahl $\xi\pi$,

welche aufserhalb des Quadrates mit den Ecken 0, $\frac{1}{4}\pi\varkappa$, $\frac{1+i}{4}\pi\varkappa$, $\frac{i}{4}\pi\varkappa$ liegt, sei $\left(\frac{1+i}{4}\varkappa+\xi\right)\pi$, wo ξ also der vierte Teil einer ganzen Zahl ist, und es sei

$$\xi\pi=\left(\frac{1+i}{4}\varkappa+\xi\right)\pi=\eta\cdot\frac{\varkappa}{2}+\varrho,$$

wo ϱ, ebenso wie die gleich zu benutzenden Zahlen ϱ', ϱ'', ϱ''', eine ganze oder halbe Zahl ist, die in dem Quadrat mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}\varkappa$, $\frac{1+i}{2}\varkappa$, $\frac{i}{2}\varkappa$ liegt. Je nachdem die ganze Zahl $\eta\equiv 0$ oder $\equiv 1\,(\mathrm{mod}\,1+i)$ ist, liefert $\xi\pi$ den Beitrag 0 oder 1 zu $D(\pi,\varkappa)$. Dann ist

$$\left(\frac{1+i}{4}\varkappa+\xi i\right)\pi=(\pi+\eta i)\frac{\varkappa}{2}+\varrho i=(\pi+\eta i-1)\frac{\varkappa}{2}+\varrho',$$

$$\left(\frac{1+i}{4}\varkappa-\xi\right)\pi=((1+i)\pi-\eta)\frac{\varkappa}{2}-\varrho=((1+i)\pi-\eta-(1+i))\frac{\varkappa}{2}+\varrho'',$$

$$\left(\frac{1+i}{4}\varkappa-\xi i\right)\pi=(\pi i-\eta i)\frac{\varkappa}{2}-\varrho i=(\pi i-\eta i-i)\frac{\varkappa}{2}+\varrho'''.$$

Da die letzten Faktoren von $\frac{\varkappa}{2}$, weil π ungerade ist, alle $\equiv\eta\,(\mathrm{mod}\,1+i)$ sind, so kann man bei der Bestimmung von $D(\pi,\varkappa)$ also statt der aufserhalb des Quadrates mit den Ecken 0, $\frac{1}{4}\pi\varkappa$, $\frac{1+i}{4}\pi\varkappa$, $\frac{i}{4}\pi\varkappa$ liegenden Zahlen $\xi\pi$ die in demselben liegenden halben Vielfachen von π nehmen, denn wenn $\left(\frac{1+i}{4}\varkappa+\xi\right)\pi$ eine Zahl $\xi\pi$ aufserhalb des genannten Quadrates ist, so liegt eine der drei halben Zahlen $\left(\frac{1+i}{4}\varkappa+\xi i^w\right)\pi$, wo $w=1, 2, 3$, innerhalb desselben. Man kann also, indem man noch jede der Gleichungen

$$\frac{\xi}{2}\pi=\eta\cdot\frac{\varkappa}{2}+\varrho,$$

wo $\frac{\xi}{2}$ alle ganzen und halben Zahlen des Quadrates mit den Ecken 0, $\frac{1}{4}\varkappa$, $\frac{1+i}{4}\varkappa$, $\frac{i}{4}\varkappa$ durchläuft, mit 2 multipliziert, das Gaufssche Lemma auch so aussprechen: Die ungerade Zahl π ist quadratischer Rest oder Nichtrest der ungeraden Primzahl $\varkappa$, je nachdem die Anzahl $D(\pi,\varkappa)$ der Zahlen $\xi\pi$ gerade oder ungerade ist, welche durch $\varkappa$ dividiert eine nicht durch $1+i$ teilbare gröfste ganze Zahl liefern, wobei ξ die $\frac{c^2+d^2-1}{4}$ Zahlen eines Viertelsystems in Bezug auf den Modul $\varkappa$ durchläuft.[1])

1) Der durch diesen Satz bestimmte Decident ist dem des ursprünglichen Gaufsschen Lemmas gleich, nicht blofs kongruent (mod. 2). Der entsprechende

Jetzt werde zuerst vorausgesetzt, dafs die beiden Zahlen π und $\varkappa$ zweigliedrige Primzahlen sind. Dann beruht die Berechnung von $D(\pi, \varkappa)$ — oder vielmehr des Restes dieser Zahl, der aber ebenso bezeichnet werden soll — darauf, dafs man die Zahlen $\xi\pi$ in linearer Reihenfolge darauf hin untersuchen kann, welchen Beitrag zu $D(\pi, \varkappa)$ sie liefern. Die Zahlen $\xi\pi$ sind alle die in dem Quadrat Q mit den Ecken 0, $\frac{1}{2}\pi\varkappa$, $\frac{1+i}{2}\pi\varkappa$, $\frac{i}{2}\pi\varkappa$ liegenden Vielfachen von π. Die Seite $0 \cdots \frac{1}{2}\pi\varkappa$ von Q möge mit s, $\frac{1}{2}\pi\varkappa \cdots \frac{1+i}{2}\pi\varkappa$ mit s', $\frac{1+i}{2}\pi\varkappa \cdots \frac{i}{2}\pi\varkappa$ mit s'', $\frac{i}{2}\pi\varkappa \cdots 0$ mit s''' bezeichnet werden. Das Quadrat Q zerlege man einmal in Quadrate p, deren Eckpunkte die durch π teilbaren Zahlen sind, andererseits auch in Quadrate q, deren Eckpunkte durch die Vielfachen von $\varkappa$ gebildet werden. Die Grenzlinien der Quadrate p und q durchschneiden sich auf zwei verschiedene Weisen, so dafs die in den beiden Fällen von den sich schneidenden Geraden gebildeten spitzen Winkel Komplemente sind. Die Anzahl der Schnittpunkte der einen Art ist $\frac{ac+bd-1}{2}$, die der anderen $\left|\frac{bc-ad}{2}\right| - 1$. Eine Zahl $\xi\pi$ liefert den Beitrag 0 oder 1 zu $D(\pi, \varkappa)$, je nachdem der dem Nullpunkt zunächst liegende Eckpunkt des Quadrates q, in dem sie liegt, den Rest 0 oder 1 (mod $1+i$) besitzt. Das Quadrat Q zerfällt einerseits in Streifen von der Breite eines Quadrates q, deren Grenzlinien die Richtung der Linie $0 \cdots \frac{1}{2}\varkappa$ haben, und andererseits in ebensolche, deren Grenzlinien mit der von 0 nach $\frac{i}{2}\varkappa$ gezogenen Geraden gleichgerichtet sind. Diesen Streifen gebe man in beiden Fällen abwechselnd den Index 0 und 1, und zwar demjenigen Streifen der ersten Art, dessen rechte Grenzlinie (die aufserhalb von Q liegt) durch den Nullpunkt geht, und demjenigen Streifen zweiter Art, dessen linke Grenze durch den Nullpunkt geht, den Index 0. Der Beitrag von $\xi\pi$ zu $D(\pi, \varkappa)$ ist dann gleich der Summe der Indices der beiden Streifen, in denen diese Zahl liegt, die deshalb auch kurz als der erste und zweite Index von $\xi\pi$ bezeichnet werden mögen.

Man zähle nun ab, wie viele der Zahlen $i\pi$, $2i\pi$, ... in dem ersten Streifen der ersten Art liegen; ihre Anzahl ist $\left[\frac{c^2+d^2}{ac+bd}\right]$, in dem zweiten Streifen der ersten Art liegen $\left[\frac{2(c^2+d^2)}{ac+bd}\right] - \left[\frac{c^2+d^2}{ac+bd}\right]$, u. s. w.

Satz in der Theorie der reellen Zahlen ist von Herrn Prof. E. Schering in dem Sitzungsbericht der Berliner Akademie vom 15. Januar 1885 aufgestellt; ich habe denselben unabhängig hiervon in Crelles Journal Bd. 103, S. 120 erwähnt.

Ist man bei dieser Abzählung bis zu der letzten Zahl $hi\pi$ gekommen, welche noch in Q liegt, so dafs man, um zu $(h+1)i\pi$ zu kommen, eine der Seiten s' oder s'', z. B. s'' überschreiten müfste, so fahre man mit der Abzählung fort bei der Zahl $\frac{1+i}{2}\varkappa\pi - i\left(\frac{1+i}{2}\varkappa\pi - (h+1)i\pi\right)$ $= (\varkappa - (h+1))\pi$, die durch Beschreibung eines Viertelkreises um $\frac{1+i}{2}\pi\varkappa$ von $(h+1)i\pi$ aus erreicht wird, und bestimme den zweiten Index dieser und der folgenden Zahlen. Ist nämlich

$$(h+1)i\pi = (u+vi)\varkappa + \varrho,$$

also der erste Index dieser Zahl $\equiv v$, so ist

$$(\varkappa - (h+1))\pi = (\pi - v + ui)\varkappa + \varrho i = (\pi - 1 - v + ui)\varkappa + \varrho',$$

die Zahl $(\varkappa - (h+1))\pi$ liegt also in einem Streifen zweiter Art, dessen Index $\equiv \pi - 1 - v \equiv v$ ist, so dafs man also bei der Berechnung des zweiten Index der Zahl $(\varkappa - (h+1))\pi$ den ersten Index der Zahl $(h+1)i\pi$ statt dessen setzen kann und ebenso statt des zweiten Index von $(\varkappa - (h+2))\pi$ den zweiten von $(h+2)i\pi$ u. s. w. Man kann die begonnene Abzählung also einfach über die Grenzen von Q hinaus „linear" fortsetzen. Mufs man, um von $hi\pi$ zu $(h+1)i\pi$ zu gelangen, s' überschreiten, so fahre man bei $(\varkappa i + (h+i))\pi$ fort; man kommt zu demselben Resultat wie vorher. Statt des Index erster oder zweiter Art irgend einer Zahl $\xi\pi$ kann man den ersten Index einer bestimmten Zahl der Reihe $i\pi$, $2i\pi$ .... setzen. Kommt man bei der Abzählung so weit, dafs man, um zu der folgenden Zahl $\xi'\pi$ zu gelangen, s, resp. s''', überschreiten mufs, so gehe man über zu $\xi' i\pi$, bezw. $-\xi' i\pi$, welche wieder zu den Zahlen $\xi\pi$ gehören. Wenn aber der erste Index von $\xi'\pi$ gleich l ist, so ist der zweite Index von $\xi' i\pi$ nicht gleich l, sondern kongruent $l+1$, und wenn der zweite Index von $\xi'\pi$ gleich l ist, so ist der erste Index von $-\xi' i\pi$ kongruent $l+1$; der zweite Index von $\xi'\pi$ und der erste Index von $\xi' i\pi$, sowie der erste Index von $\xi'\pi$ und der zweite von $-\xi' i\pi$ sind dagegen einander gleich. Wenn man also bei der Bestimmung des ersten Index von s nach s''' oder bei der Bestimmung des zweiten Index von s''' nach s' überspringen mufs, so mufs man von da an zu jedem auf die bisherige Weise bestimmten Index 1 hinzufügen, bis man im weiteren Verlauf der Abzählung einen derartigen Sprung zum zweitenmale machen und infolge dessen 2 oder, was dasselbe ist, 0 hinzufügen mufs. Von dem dritten Sprung dieser Art an ist wieder 1 zu addieren u. s. w. Solcher Sprünge werden im ganzen $\frac{c-1}{2}$ gemacht. Bei den übrigen $\frac{d}{2} - 1$ Sprüngen von s'

nach s''' oder umgekehrt, findet dagegen keine solche — so zu sagen diskontinuierliche — Veränderung des Index statt, ebensowenig wie bei dem schon erörterten Übergang von s'' zu s''' oder umgekehrt. Der Beweis dieser Behauptungen ist ebenso leicht zu führen wie in dem einen ausführlich behandelten Falle, weshalb ich denselben, ebenso wie bei manchen folgenden ohne jede Schwierigkeit zu beweisenden Behauptungen übergehe. Ehe man zum erstenmale eine Vermehrung des berechneten Index vornehmen mufs, hat man $\left[\frac{c^2+d^2}{c}\right]$ Zahlen $\xi\pi$ schon abgezählt, für die folgenden $\left[\frac{2(c^2+d^2)}{c}\right] - \left[\frac{c^2+d^2}{c}\right]$ ist jedesmal 1 hinzuzufügen.

Hiernach ergiebt sich, nachdem man $\frac{ac+bd-1}{2}$ mal von einem Streifen in den nächsten übergegangen ist und dabei sämtliche $\frac{c^2+d^2-1}{4}$ Zahlen $\xi\pi$ zweimal, nämlich einmal bei der Bestimmung des ersten, einmal bei der Bestimmung des zweiten Index angetroffen hat,

$$D(\pi, \varkappa) \equiv \sum_{1}^{\frac{ac+bd-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{ac+bd}\right] + \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{c}\right],$$

wobei noch berücksichtigt ist, dafs $-1 \equiv +1$ ist. Zu der ersten Summe kommt allerdings, wenn $\frac{ac+bd-1}{2}$ ungerade ist, noch $\left[\frac{\frac{ac+bd}{2}\cdot(c^2+d^2)}{ac+bd}\right] = \frac{c^2+d^2-1}{2}$, zu der zweiten, wenn $\frac{c-1}{2}$ ungerade ist, ebenfalls noch $\frac{c^2+d^2-1}{2}$ hinzu, diese gerade Zahl kann aber weggelassen werden.

Auf dieselbe Weise findet man

$$D(\varkappa, \pi) \equiv \sum_{1}^{\frac{ac+bd-1}{2}} \left[\frac{x(a^2+b^2)}{ac+bd}\right] + \sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{x(a^2+b^2)}{a}\right].$$

Die zweiten Summen sind wegen des Zusammenhanges derselben mit dem Legendre-Jacobischen Symbol, weil c^2+d^2 und a^2+b^2 quadratische Reste von c, bezw. a sind, $\equiv 0$, und nach Formel III^a. ist also

$$D(\pi, \varkappa) + D(\varkappa, \pi) \equiv \sum_{1}^{\frac{ac+bd-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)(a^2+b^2)}{ac+bd}\right]$$

$$= \sum_{1}^{\frac{ac+bd-1}{2}} \left[\frac{x((ac+bd)^2+(bc-ad)^2)}{ac+bd}\right] \equiv 0.$$

Damit ist das Reciprocitätsgesetz für zwei zweigliedrige Primzahlen bewiesen.

Jetzt sei $b = 0$, also $\pi = a$ eine eingliedrige Primzahl und als solche von der Form $4n + 3$[1]), und es werde noch vorausgesetzt, daſs a relativ prim zu c und d ist.

Dann kann $D(a, \varkappa)$ genau so berechnet werden wie vorher $D(\pi, \varkappa)$; es ergiebt sich

$$D(a, \varkappa) \equiv \sum_{1}^{\frac{ac-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{ac}\right] + \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{c}\right].$$

Ganz anders ist es mit $D(\varkappa, a)$. Um hier das Prinzip der „linearen Abzählung“ anwenden zu können, fasse man je vier Zahlen $\xi\varkappa$, welche die Ecken eines Quadrates q bilden, zusammen, und zwar so, daſs jedes Vielfache von $\varkappa$ nur zu einer dieser Gruppen von je vier gehört. Die Quadrate q, welche vier so zusammengehörige Vielfache von $\varkappa$ zu Eckpunkten haben, mögen mit q' bezeichnet werden. Das dem Nullpunkt am nächsten liegende Quadrat q' hat die Ecken $(1+i)\varkappa$, $(2+i)\varkappa$, $(2+2i)\varkappa$, $(1+2i)\varkappa$. Bei dieser Verteilung bleiben erstens die Punkte $1 + \frac{a-1}{2}i$, $2 + \frac{a-1}{2}i \cdots$ und $\frac{a-1}{2} + i$, $\frac{a-1}{2} + 2i, \cdots \frac{a-1}{2} + \frac{a-1}{2}i$ übrig, zweitens die Punkte $2\varkappa$, $4\varkappa$, $\cdots$ auf s, $i\varkappa$, $3i\varkappa, \cdots$ auf s''', wobei vorausgesetzt wird, daſs in dem ursprünglichen Gaufsschen Lemma als Zahlen $\xi\varkappa$ die Zahlen $\varkappa$, $2\varkappa, \cdots \frac{a-1}{2}\varkappa$, $(1+i)\varkappa$, $(2+i)\varkappa \cdots \left(\frac{a-1}{2} + i\right)\varkappa$, $\cdots\cdots \left(\frac{a-1}{2} + \frac{a-1}{2}i\right)\varkappa$ genommen wurden.

Die Grenzlinien der Quadrate p und q durchschneiden sich, wie im vorigen Falle, auf zweierlei Art. Die Anzahl aller Schnittpunkte auf dem Umfang eines Quadrates q' ist natürlich gerade, die Anzahl der Schnittpunkte der einen Art also zugleich mit der der anderen Art gerade oder ungerade. Je nachdem der 1. oder der 2. Fall eintritt, also je nachdem z. B. die Schnittpunkte 1. Art (deren Gesamtanzahl $\frac{ac-1}{2}$ ist) auf dem Umfang von q' in gerader oder in ungerader Anzahl vorhanden sind, liefern die Eckpunkte von q' einen Beitrag zu $D(\varkappa, a)$, der $\equiv 0$ oder 1 ist. Die Richtigkeit dieses Satzes erkennt man leicht durch voll-

1) Bei den Formeln habe ich diesen Umstand absichtlich unberücksichtigt gelassen und z. B. für $\frac{a-1}{2}$ nicht den Rest 1 gesetzt.

ständige Induktion, indem man zu den schon vorhandenen Schnittpunkten 1. Art auf dem Umfang von q' noch einen hinzutreten läfst. Man sieht auch leicht, dafs von den zuerst genannten übrig gebliebenen Punkten je 4 wie $\left(1+\frac{a-1}{2}i\right)x$, $\left(2+\frac{a-1}{2}i\right)x$ und $\left(\frac{a-1}{2}+i\right)x$, $\left(\frac{a-1}{2}+2i\right)x$, von denen die ersten beiden in der Nähe von s'', die andern beiden in der Nähe von s', und zwar der 1. und 3. und der 2. und 4. gleich weit von $\frac{1+i}{2}ax$ entfernt liegen, sich zusammen zu den 4 Eckpunkten eines Quadrates q' ergänzen, von dem die eine Hälfte an s'', die andere an s' liegt. Auch von dem hierbei noch übrig gebliebenen Punkt $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x$ gilt der Satz, dafs sein Beitrag zu $D(x, a)$ 0 oder 1 ist, je nachdem die Anzahl der Schnittpunkte 1. Art, welche auf den Seiten des Quadrates mit den Ecken $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x$, $\left(\frac{a}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x$, $\frac{1+i}{2}ax$, $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a}{2}i\right)x$ liegen, gerade oder ungerade ist, denn die Beiträge der Punkte $\left(\frac{a}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x$ und $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a}{2}i\right)x$, wenn diese mitgerechnet würden, wären immer gleich, der Beitrag des Punktes $\frac{1+i}{2}ax$ wäre immer $=0$, so dafs der Rest der Summe der 4 Beiträge hier nur von dem des Punktes $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x$ abhängt. Da ferner die Anzahlen der Schnittpunkte 1. Art, welche auf den Linien $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a}{2}i\right)x\cdots\frac{1+i}{2}ax$ und $\left(\frac{a}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x\cdots\frac{1+i}{2}ax$ liegen, gleich sind, so ist der Beitrag des Punktes $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x$ gleich 0 oder 1, je nachdem die Anzahl der Schnittpunkte 1. Art auf den beiden Linien $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x\cdots\left(\frac{a}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x$ und $\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a-1}{2}i\right)x\cdots\left(\frac{a-1}{2}+\frac{a}{2}i\right)x$ (welche die in Q liegenden Stücke der Seiten eines Quadrates q' bilden) gerade oder ungerade ist.

Die Bestimmung von $D(x, a)$ beruht nun darauf, dafs man die Anzahl der Schnittpunkte 1. Art berechnet, die auf den Seiten der Quadrate q' liegen, wobei die nicht auf den Grenzen von Q liegenden Seiten der halben Quadrate und des Viertelquadrates an s' und s'' mitgerechnet werden, ebenso wie die Seiten $x\ldots 2x$, $3x\ldots 4x$, $\ldots$ $\frac{a-1}{2}x\ldots\frac{a}{2}x$. Die Schnittpunkte, die auf den zuletzt genannten Linien

liegen, sind aber wieder in Abzug zu bringen und die Beiträge der Punkte $2x$, $4x \cdots \frac{a-3}{2} x$, ix, $3ix \cdots \frac{a-1}{2} ix$ besonders zu berechnen. Bei der Bestimmung der Anzahl der Schnittpunkte 1. Art auf den Seiten von q' gehe man, wie im vorigen Falle, auf der Linie $0 \ldots ia \ldots 2ia \ldots$ entlang und bestimme jedesmal, wenn man — natürlich immer nur auf die 1. Art — die Seiten eines Quadrates q überschreitet, ob dasselbe ein Quadrat q' ist oder nicht. Der 1. Schnittpunkt ist der Punkt $\left(i + \frac{d}{c}\right) x$; wenn $\left[\frac{d}{c}\right]$ ungerade ist, liegt derselbe auf einer Seite von q', dieser Schnittpunkt kann also mit $\left[\frac{d}{c}\right]$ in Rechnung gebracht werden, ebenso der 2. mit $\left[\frac{2d}{c}\right]$ u. s. w. Der Weg, den man bei dieser Abzählung zurücklegt, ist derselbe wie bei der Bestimmung von $D(a, x)$. Wenn man von s' zu s'' übergeht, oder umgekehrt, so wird die Abzählung einfach in der bisherigen Weise fortgesetzt, ebenso wenn man s oder s''' in einem Schnittpunkt 1. Art überschreitet; geschieht dies aber in einem Schnittpunkt 2. Art, so mufs man von da an jedes $\left[\frac{xd}{c}\right]$ um 1 vermehren. Daraus erklärt sich in dem unten angegebenen Ausdruck für $D(x, a)$ die 2. Zeile. Nun ist auf den Umstand Rücksicht zu nehmen, dafs $\frac{a-1}{2}$ Punkte ξx auf den Seiten der Quadrate p selbst liegen. Aus der Herleitung des abgeänderten Gaufsschen Lemmas aus dem ursprünglichen folgt, dafs, wenn der dem Nullpunkt am nächsten liegende Eckpunkt eines Quadrates p durch $1 + i$ teilbar ist, die auf den mit der reellen Achse parallelen Seiten liegenden Zahlen mit zu diesem p gehören, die auf den mit der imaginären Achse parallelen Seiten befindlichen dagegen nicht. Es kann hiernach niemals ein Zweifel darüber stattfinden, zu welchem p eine Zahl ξx gehört. Man kann sich zweckmäfsig die Linie $0 \ldots ia \ldots 2ia \ldots$, welche die Quadrate p begrenzt, als eine krumme Linie vorstellen, die von 0 bis ia rechts, von ia bis $2ia$ links u. s. w. von der Geraden $0 \ldots ia \ldots 2ia \ldots$ verläuft, sich ihr aber unendlich nahe anschliefst. Wenn ξx auf einer (ursprünglichen) Seite von p liegt, so ist das entsprechende $\frac{xd}{c}$ eine ganze Zahl und $\left[\frac{xd}{c}\right]$ entweder $= \frac{xd}{c}$ oder $= \frac{xd}{c} - 1$, je nachdem die die eigentliche Seite von p ersetzende Kurve rechts oder links von ξx sich befindet. Zum 1. Mal wird $\frac{xd}{c}$ gleich einer ganzen Zahl für $x = c$, dann für $x = 2c$ u. s. w., zuletzt für $x = \frac{a-1}{2} c$. Wenn $x = c$ ist, hat man auf

der Linie $0 \ldots ia \ldots 2ia \ldots$ im ganzen $c^2 + d^2$ Einheiten zurückgelegt; wenn $\left[\frac{c^2+d^2}{a}\right]$ ungerade ist, liegt das entsprechende ξx rechts von der Kurve $0 \ldots ia \ldots 2ia \ldots$, dann ist also 1 zu subtrahieren oder, was dasselbe ist, zu addieren, dagegen 0, wenn $\left[\frac{c^2+d^2}{a}\right]$ gerade ist. In Bezug auf den Modul 2 kann man also $\left[\frac{c^2+d^2}{a}\right]$ selbst hinzufügen. So kommt man zu der 3. Zeile von $D(x, a)$. Wenn man die Kurve $0 \ldots ia \ldots 2ia \ldots$ verfolgt bis an s' oder s'', so mufs man in bekannter Weise von der einen zur anderen Seite überspringen; während man sich aber bei s' etwa auf einem rechtsliegenden Stück der Kurve befindet, mufs man nach dem Sprung den Weg auf der linken Seite fortsetzen und umgekehrt. Dieser Wechsel tritt ein, auf welche der beiden möglichen Arten man auch die Seiten s' und s'' überschreitet; um denselben zu berücksichtigen, mufs man die 4. Zeile zu dem Ausdruck für $D(x, a)$ hinzufügen. Bei dem Übergang von s' zu s''' und umgekehrt tritt niemals eine solche Unstetigkeit ein.

Endlich sind noch die Punkte $2x$, $4x \cdots \frac{a-3}{2} x$ und ix, $3ix \cdots \frac{a-1}{2} ix$ zu berücksichtigen. Zuerst lasse man x, $3x$, $\cdots \frac{a-1}{2} x$ an die Stelle der Punkte ix, $3ix \cdots \frac{a-1}{2} ix$ treten, deren Anzahl mit $\left[\frac{a}{4}\right] + \frac{a-1}{2}$ kongruent ist. Wenn hix den Beitrag l zu $D(x, a)$ liefert, so ist der von hx gleich $l + 1$; deshalb ist, wenn man die Vertauschung vorgenommen hat, $\left[\frac{a}{4}\right] + \frac{a-1}{2}$ hinzuzufügen. Ferner ist die Anzahl der auf den Strecken $x \ldots 2x$, $3x \ldots 4x$, $\frac{a-1}{2} x \cdots \frac{a}{2} x$ liegenden Schnittpunkte 1. Art, die vorher schon einmal gezählt wurde, wieder zu subtrahieren oder, was auf dasselbe hinauskommt, noch einmal zu addieren. Diese Anzahl ist mit $\sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{xa}{c}\right]$ kongruent, da $\left[\frac{xa}{c}\right]$ nur dann ungerade ist, wenn der x^{te} von den $\frac{c-1}{2}$ Schnittpunkten 1. Art, welche auf s liegen, zwischen einem ungeraden und darauf folgendem geraden Vielfachen von x sich befindet. Zuletzt ist der Beitrag der Zahlen x, $2x \cdots \frac{a-1}{2} x$ hinzuzufügen, der mit $\sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{xc}{a}\right] + \sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{xd}{a}\right]$ kongruent gefunden wird. So ergiebt sich

$$D(x, a) \equiv \sum_{1}^{\frac{ac-1}{2}} \left[\frac{xd}{c}\right]$$
$$+ \sum_{1}^{\frac{d}{2}-1} \left[\frac{xac}{d}\right] + \left(\frac{d}{2} - 1\right)\frac{ac-1}{2}$$
$$+ \sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{a}\right]$$
$$+ \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)a}{2c}\right] + \frac{c-1}{2}\frac{a-1}{2} + \sum_{1}^{\frac{d}{2}} \left[\frac{(2x-1)a}{2d}\right] + \frac{d}{2}\cdot\frac{a-1}{2}$$
$$+ \left[\frac{a}{4}\right] + \frac{a-1}{2} + \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{xa}{c}\right] + \sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{xc}{a}\right] + \sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{xd}{a}\right].$$

Setzt man

$$\sum_{1}^{\frac{ac-1}{2}} \left[\frac{xd}{c}\right] \equiv \frac{a-1}{2}\left(\left[\frac{d}{c}\right] + \left[\frac{2d}{c}\right] + \cdots + \left[\frac{cd}{c}\right]\right) + \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{xd}{c}\right]$$

nach II $$\equiv \frac{a-1}{2}\cdot\frac{c-1}{2} + \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{xd}{c}\right],$$

addiert $$D(a, x) \equiv \sum_{1}^{\frac{ac-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{ac}\right] + \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{c}\right]$$

zu $D(x, a)$ und stellt die Glieder zusammen, die sich vereinigen lassen, so ergiebt sich

$$D(x, a) + D(a, x)$$
$$\equiv \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{xd}{c}\right] + \sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{xd}{a}\right] + \sum_{1}^{\frac{d}{2}-1} \left[\frac{xac}{d}\right] + \left(\frac{d}{2} - 1\right)\frac{ac-1}{2}$$
$$+ \sum_{1}^{\frac{a-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{a}\right] + \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{c}\right] + \sum_{1}^{\frac{ac-1}{2}} \left[\frac{x(c^2+d^2)}{ac}\right]$$
$$+ \sum_{1}^{\frac{c-1}{2}} \left[\frac{(2x-1)a}{2c}\right] + \frac{c-1}{2}\cdot\frac{a-1}{2}$$

$$+\sum_{1}^{\frac{d}{2}}\left[\frac{(2x-1)a}{2d}\right]+\frac{d}{2}\cdot\frac{a-1}{2}+\left[\frac{a}{4}\right]+\frac{a-1}{2}$$

$$+\frac{a-1}{2}\cdot\frac{c-1}{2}+\sum_{1}^{\frac{c-1}{2}}\left[\frac{xa}{c}\right]+\sum_{1}^{\frac{a-1}{2}}\left[\frac{xc}{a}\right].$$

Die erste Zeile ist nach III^c und I$^b \equiv 0$, die zweite nach III^b, die dritte nach IV^a, die vierte nach IV^b und die fünfte nach I^a. Es ist also

$$D(\varkappa, a) + D(a, \varkappa) \equiv 0 \pmod 2$$

und damit das Reciprocitätsgesetz auch für diesen Fall bewiesen.

Die hier nicht behandelten Fälle lassen sich entweder auf diese beiden zurückführen oder mit geringfügigen Modifikationen ebenso beweisen. Es läfst sich auch bekanntlich der erste Fall aus dem zweiten ableiten; ich habe es aber, weil dadurch doch keine erhebliche Abkürzung erzielt worden wäre, vorgezogen, diese beiden Fälle getrennt zu behandeln.

Wenn im zweiten Falle a in c oder d aufgeht, so wird wegen der dann notwendig werdenden Abänderung der Formeln I und IV eine etwas abweichende Behandlung erfordert, auf die ich aber nicht mehr eingehen will. Der Fall, dafs beide Zahlen π und $\varkappa$ eingliedrige Primzahlen sind, soll wegen der Leichtigkeit, mit der er erledigt werden kann, unberücksichtigt bleiben.

Die Darstellung der cyklischen Kurven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie.

(Von Dr. Eichler in Altona.)

Bei der bekannten geometrischen Deutung des komplexen Ausdrucks $Z = f(z)$ bleibt die Änderung der Werte z, also auch von Z insofern eine willkürliche, als der Übergang vom Punkte $z = r(\cos\eta + i\sin\eta)$ zu dem Punkte $z_1 = r_1(\cos\eta_1 + i\sin\eta_1)$ eine Verschiebung und eine Drehung, also zwei voneinander unabhängige variable Elementarbewegungen umfafst, über deren Zusammenhang von vornherein keine Bestimmung getroffen ist. Es liegt deshalb nahe, die Interpretation $Z = f(z)$ dadurch zu einer bestimmteren zu machen, dafs man vorläufig nur $\cos\eta + i\sin\eta$ als veränderlich, r als konstant annimmt. So handelt es sich um die geometrische Untersuchung eines Ausdruckes

$$Z = f(\eta) = a_0 + a_1\eta^{k_1} + a_2\eta^{k_2} + \cdots a_n\eta^{k_n},$$

wo zur Abkürzung $\eta = \cos\eta + i\sin\eta = e^{i\eta}$ gesetzt ist. Es würde nach Erledigung dieser Frage weiterhin erörtert werden können, was herauskommen wird, wenn man die Voraussetzung konstanter Koefficienten fallen läfst und über ihren Zusammenhang in irgend welcher Weise verfügt.

Im folgenden ist die erste Frage eingehender behandelt, die zweite nur nach gewissen Richtungen hin besprochen, um die Bedeutung unserer Darstellungen für die Schwingungstheorie zu beleuchten.

1.

Durch die vorhin eingeführte Zahl η sind alle Punkte des Einheitskreises ausgedrückt; sie bestimmt also, wenn $\angle\,\eta$ von 0 bis 2π wächst, einen einmaligen Umgang desselben. Ebenso bezeichnet η^k, dafs der Kreis k mal durchlaufen wird. Dann liefert $Z = a\eta^m + b\eta^k$ die Zusammensetzung zweier beliebiger Rotationen auf den Kreisen mit den Radien a und b. Da η endlich bleibt und mit der Drehung $\angle\,\eta$ sich stetig ändert, ferner periodisch ist, erkennt man, dafs die resultierenden Kurven ebenfalls im Endlichen und zwar im allgemeinen stetig verlaufen und in sich geschlossen sind. Die Koefficienten a, b sowie die Exponenten m, k sind hierbei rational gedacht. Man ersieht aber weiter, dafs diese Kurven zur Achse X symmetrisch liegen. Denn die Gleichung $Z = a\eta^m + b\eta^k$ besteht noch, wenn $\frac{1}{\eta}$ statt η gesetzt wird. Als dritte Eigenschaft folgt aus der Gleichungsform, dafs die Reihenfolge, in welcher wir die Rotationen zusammensetzen, für das Resultat, d. h. für die Gestalt der Kurve gleichgültig ist. Das Gesagte gilt selbstverständlich für die allgemeinste Darstellungsform

$$Z = a_0 + a_1\eta^{k_1} + a_2\eta^{k_2} + \cdots,$$

wo a_i, k_i reelle, positive oder negative Zahlen sind. Die zugehörigen Kurven bezeichne ich nach ihrer Entstehungsart als „cyklische“. Man überzeugt sich, wenn man von dem unwesentlichen Anfangsgliede a_0 absieht, ohne Mühe davon, dafs die kinetische Bildungsweise dieser Kurven aus einer Summe von Elementardrehungen mit der gebräuchlichen Vorstellung des Rollens von Kreisen auf einem als fest angenommenen in Übereinstimmung gebracht werden kann. Dieses Nachweises bedarf es nur für den einfachsten Fall der aus zwei Rotationen gebildeten Kurven $[a, b]$, zu dem ich zunächst übergehe.

2.

Seien a, b reell und positiv, k ganzzahlig und positiv angenommen, so bewegt sich der Vektor b mit k-mal gröfserer Geschwindigkeit als der Vektor a, und zwar in gleichem Sinne. Die Gleichungsform ist dann:

I $$Z = a\eta + b\eta^k,$$

Sofort lesen wir aus derselben die Haupteigenschaften der Epicykloiden heraus:

Wird $\eta^k = \eta$, d. h. $\eta = \sqrt[k-1]{1} = \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots$ oder $\angle\, \eta = \frac{2n\pi}{k-1}$, so tritt für Z Maximum $= a + b$ ein.

Wird $\eta^k = -\eta$, d. h. $\eta = \sqrt[k-1]{1}$ oder $\angle\, \eta = \frac{2n+1\pi}{k-1}$, so tritt für Z Minimum $= a - b$ ein.

Seien für Maximum die Teilwerte von $\angle\, \eta = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots$, so ist also $\varepsilon_1 = \varepsilon_1{}^k$ u. s. f. Die Substitution $\eta\varepsilon$ für η ergiebt $Z_1 = a\eta\varepsilon = b(\eta\varepsilon)^k = \varepsilon(a\eta + b\eta^k)$, d. h. $Z_1 = Z\varepsilon$, d. h.: Jeder Wert Z wiederholt sich nach einer Drehung um $\angle\, \varepsilon$ periodisch. Insbesondere folgt, dafs die Verzweigungspunkte der Kurve auf den Strahlen $\angle\, \eta = \frac{(2n+1)\pi}{k-1}$ liegen und dafs die Zweige zu ihnen symmetrisch liegen. Denn sei jetzt eine dieser Winkelgröfsen mit α_1 bezeichnet und lassen wir $\angle\, \alpha$ um eine gewisse Drehung ε zu- oder abnehmen, so wird einmal für $\angle\, \eta = \angle\, \alpha + \varepsilon$

$$Z_1 = (a\varepsilon + b\varepsilon^k)\alpha, \quad \text{da } \alpha = \alpha^k,$$

dann für $\angle\, \eta = \angle\, \alpha - \varepsilon$

$$Z_2 = \left(\frac{a}{\varepsilon} + \frac{b}{\varepsilon^k}\right)\alpha.$$

Also Z_2 ist Spiegelpunkt von Z_1 in Beziehung auf den Minimumstrahl α. Die fragliche Kurve verläuft zwischen den Kreisen mit Radien $a \pm b$, $k-1$-fach periodisch in Schleifen, deren Verzweigungspunkte auf den Achsen $\angle\, \eta = \frac{(2n+1)\pi}{k-1}$ liegen.

Specielle Fälle:

1) Ist $a = b$, so $Z = 0$ für $\eta = \sqrt[k-1]{-1}$. Die $k-1$ Schleifen gehen durch den Nullpunkt.

2) Ist a oder b negativ, so bleibt die Gestalt der Kurve unverändert; die Lage wird eine inverse.

3) Ist a, b komplex, so setze man $a = \varrho_1\varepsilon_1$, $b = \varrho_2\varepsilon_2$; dann wird $z = \varrho_1(\eta + \varepsilon_1) + \varrho_2(k\eta + \varepsilon_2)$. Für $Z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ ent-

wickele man r, so wird $r^2 = \varrho_1^2 + \varrho_2^2 + 2\varrho_1\varrho_2 \cos(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + (k-1)\eta)$. Es folgt demnach, dafs für $\angle\eta = \frac{2n\pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{k-1}$ Maximum, für $\angle\eta = \frac{(2n+1)\pi - (\varepsilon_1 + \varepsilon_2)}{k-1}$ Minimum eintritt. Dadurch also, dafs die Anfangsrichtungen der Vektoren a, b auseinander gelegt werden, wird der Kurvencharakter nicht beeinflufst, dagegen eine Deformation bewirkt.

Ist $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, so $Z = \varepsilon_1(a\eta + b\eta^k)$. Die ursprüngliche Kurve erleidet also nur eine Gesamtdrehung um $\angle\varepsilon$.

4) Ist $\frac{dZ}{d\angle\eta} = 0$, so wird, da $\frac{d(\eta^k)}{d\angle\eta} = ik\eta^k$, $a\eta + kb\eta^k = 0$. Dies ist aber, solange b positiv vorausgesetzt wird, nur möglich für $\angle\eta = \frac{(2n+1)\pi}{k-1}$, dann resultiert $a = kb$. Die Schleifen reduzieren sich auf Rückkehrpunkte, welche also wieder auf den Minimumstrahlen liegen in dem Abstande $r = a - \frac{a}{k}$.

5) Ist $\frac{d^2Z}{d\angle\eta} = 0$, so wird $a = k^2b$ analog obigem. Wir erhalten „wellenförmige Kurven".

Dafs die bekannte Darstellungsweise der Epicykloiden mit der unsrigen sich deckt, zeigt A. Vietor.[1]) Denn seine Reduktion der Cykloidengleichung auf die Form

$$x = b\cos\varphi + b_1\cos\varphi_1 \qquad y = b\sin\varphi + b_1\sin\varphi_1$$

ist im Grunde genommen nichts anderes als das Zurückgehen auf $Z = a\eta + b\eta^k$, sobald eben $\angle\varphi_1 = k\varphi$ gesetzt wird.

Auf die letzte Form läfst sich auch die gewöhnliche Cykloide bringen, sobald man nur die Kreisbewegung $a\eta$ durch eine geradlinige $a\angle\eta$ ersetzt.

Wird k negativ, so bestimmt $\eta^{-k} = \frac{1}{\eta k}$ eine Drehung in entgegengesetztem Sinne wie bei I. Die Kurven

II $$Z = a\eta + b\cdot\frac{1}{\eta k}$$

ergeben dann Hypocykloiden, deren Verlauf sich wie oben leicht erkennen läfst. Sie sind $k+1$-teilig; ihr Vektor erreicht Maximum für $r = a + b$, Minimum für $r = a - b$, und zwar ersteres auf den Achsen $\angle\eta = \frac{2m\pi}{k+1}$, letzteres auf $\angle\eta = \frac{(2m+1)\pi}{k+1}$. Im übrigen gilt das bei I Bemerkte nebst den Fällen 1—5.

---

1) Schlömilchs Ztschr. Bd. XXV, 1880.

Für $k = 1$ erhält man die Ellipse mit den Achsen $a \pm b$. Hervorzuheben wären die Fälle $a = \cos\varphi$, $b = \sin\varphi$, sowie $a = \varrho_1\varepsilon_1$, $b = \varrho_2\varepsilon_2$, welche die Erscheinungen elliptischer Polarisation in einfacher Weise zum Ausdruck bringen. Eine genauere Darlegung mufs hier ausgeschlossen bleiben.

Für $k = 2$, $\frac{\partial Z}{\partial \angle \eta} = 0$ erhält man die nach verschiedenen Richtungen bereits analysierte Steinersche Kurve mit 3 Rückkehrpunkten.[1])

Für $k = 3$, $\frac{\partial Z}{\partial \eta} = 0$ resultiert die Astroide.[2])

Schon hier füge ich die Bemerkung ein, dafs jeder geometrischen Deutung von Z eine mechanische Erklärung entspricht, insofern nämlich die Zusammensetzung von Punktschwingungen in einer Ebene in der Form $Z = f(\eta)$ ihren einfachsten Ausdruck findet. So lassen sich denn die in der Akustik wichtigen, von Wheatstone, Joung, Melde u. a. experimentell untersuchten Schwingungskurven, ebenso die der Mechanik[3]) und Optik zugehörigen, als den vorstehenden und den noch zu erörternden Gruppen $Z = f(\eta)$ untergeordnet erkennen, wie der Verfasser an vielen Beispielen durch Zeichnung bestätigt gefunden hat.[4])

3.

Wir untersuchen jetzt die allgemeinere Form

III $$Z = a\eta^m + b\eta^k.$$

Beachtet man, dafs bei den obigen Fällen der Übergang von den Schleifenkurven zu denen mit Spitzen und dann auch zu den wellenförmigen sich in einfachster Weise vollzieht, indem b im Verhältnis zu a immer kleiner wird, so bedarf es nur der Festlegung der Spitzenkurven, um sofort den Verlauf der Schleifenkurven zu übersehen. Wird also $\frac{\partial Z}{\partial \angle \eta} = 0$, so erhält, da $ma = kb$, der Koefficient b den speciellen Wert $\frac{ma}{k}$. Schreibt man die Gleichung III in der Form $Z = a\eta^m + b\eta^{m+n}$, so zeigt dieselbe ohne weiteres, dafs für $\eta = \sqrt[n]{1}$ der Vektor $= a + b$ ein Maximum, für $\eta = \sqrt[n]{-1}$, d. h. im vorliegenden Falle für die Rückkehrpunkte, ein Minimum wird. Bezeichnet man der Reihe nach die n Teilpunkte auf dem Kreise $r = a + b$ mit

1) W. Frahm, Erzeugung der Kurven dritter Klasse und vierter Ordnung, Schlömilchs Ztschr. 1873.

2) Holzmüller, konforme Abbildungen S. 87.

3) W. Hefs, Gyroskop, Math. Annalen Bd. XIX.

4) Tyndall, Lehre vom Schall; Melde, Lehre von den Schwingungskurven nebst Atlas, Leipzig 1864.

$\varepsilon_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots \varepsilon_{n-1}$, die n Teilpunkte auf dem Kreise $r = a - b$ mit $s_0, s_1, s_2, \cdots s_{n-1}$, so läfst sich für die verschiedenen Werte, welche m annehmen kann, der Verlauf der Kurven kurz charakterisieren.

1) Für $m = 1$ resultiert der Weg $\varepsilon_0 s_1 \varepsilon_2 s_3 \cdots$; wie bei I festgestellt.

2) Für $m = 2$ geht die Kurve von ε_0 zu s_2, ε_4, $s_6 \cdots$, schliefst sich also nach zweimaligem Umlauf.

3) Ist m beliebig, so erstreckt sich der Übergang von einem Maximum zum nächsten Minimum auf m Sektoren; die Kurve schliefst sich erst nach m Umläufen.

Dies gilt jedoch nur, solange die Exponenten relative Primzahlen sind. Haben sie einen gemeinsamen Teiler, enthält also m einen Primfaktor von n, so zerfällt die Kurve. Z. B. für $m = 2$, $n = 8$ wird die Form $a\eta^2 + b\eta^{10}$ auf $a\xi + b\xi^5$ reduziert. Die entstehende vierteilige Spitzenkurve zählt dann doppelt.

4) Für $n = 1$ liefert $Z = a\eta^m + b\eta^{m+1}$, wo a, b beliebige Werte haben mögen, kreisförmige Schleifen, deren Schnittpunkte auf der X-Achse liegen. Die Kurven erscheinen wie Doppelspiralen, welche in Beziehung auf die X-Achse symmetrisch verlaufen. Je geringer die Unterschiede in den Perioden der beiden Bewegungskomponenten sind, d. h. je gröfser m ist, desto mehr nähern sich die Kurvenzweige der Kreisform. Wir erhalten Epitrochoiden.

5) Für $m = 1$ erscheint als besonderer Fall die Kardioide, deren Schleife auch für $m > 1$ erhalten bleibt, solange den Epitrochoiden nicht die Spitzenbedingung auferlegt ist.

6) Sind die Exponenten der Gleichung III Brüche, so läfst sie sich stets auf eine mit ganzen Exponenten zurückführen. Also $Z = a\eta^{\frac{m}{n}} + b\eta^{\frac{p}{q}}$ geht in $Z = a\xi^{mq} + b\xi^{pn}$ über, wo $\eta^{\frac{1}{nq}} = \xi$.

7) Ist einer der Exponenten irrational, so schliefst sich die Kurve nicht. Man kann dann immer den Näherungswerten entsprechend Näherungskurven konstruieren.

IV $$Z = a\eta^m + b\frac{1}{\eta^{m-n}}.$$

Die n-teiligen Hypocykloiden, welche man erhält, lassen sich wie bei III in elementarer Weise diskutieren. Erwähnenswert ist der Fall $a = b$, welcher die in der Optik und Mechanik wichtige Form der Hypotrochoiden darstellt, sowie der Fall $ma = (m - n)b$, welcher interessante sternförmige Kurven mit n Spitzen liefert.

4.

Indem ich zu dreitermigen Ausdrücken übergehe von der Form

V $$Z = a\eta + b\eta^{n+1} + c\eta^{2n+1},$$

wird es auch hier zweckmäfsig sein, die Spitzenbedingung $\frac{dZ}{d \angle \eta} = 0$ einzuführen, d. h. $a\eta + (n+1)b\eta^{n+1} + (2n+1)c\eta^{2n+1} = 0$. Wie sich leicht analytisch oder auch durch geometrische Veranschaulichung erweisen läfst, wird dieser Gleichung genügt, wenn

$$a = (n+1)b = (2n+1)c, \text{ d. h. } \eta + \eta^{n+1} + \eta^{2n+1} = \eta \cdot \frac{\eta^{3n}-1}{\eta^n - 1} = 0.$$

Für die Rückkehrpunkte ist also $\eta = \sqrt[3n]{1}$. Man erhält für $\angle \eta$ $3n$ Werte, unter denen dann mit Rücksicht auf die Nenner die $\eta = \sqrt[n]{1}$ entsprechenden Werte in Wegfall kommen. Letztere liefern wie im Falle I die n Maxima auf den Strahlen $\frac{2m\pi}{n}$. Während aber früher auf den Strahlen $\frac{(2m+1)\pi}{n}$ je eine Spitze zu liegen kam, treten jetzt je zwei Spitzen in symmetrischer Lage zu diesen Strahlen auf. Denn beschränken wir uns auf die ersten beiden Sektoren, so lag im Falle I die Spitze auf dem Strahle $\alpha = \frac{180}{n}$. Für die beiden Spitzen wird jetzt $\angle \eta = \frac{360}{3n} = \frac{120^0}{n}$ und $\frac{2 \cdot 360}{3n} = 240^0$, d. h. $\angle \eta = \alpha \pm 60$. Also ergiebt sich die Symmetrie derselben in Bezug auf die Mittelachse α. Die Konstruktion des Kurvenzweiges von $\angle \eta = 0$ bis α reicht dann aus, um durch $2n$-maliges Umklappen die ganze Kurve zu erhalten.

Es folgt ebenso, dafs die Hinzufügung jedes weiteren Termes für n-teilige Kurven unter der Bedingung $dZ = 0$ eine Vermehrung der Spitzen um je eine nach sich zieht. Ihre Anwendung bestimmt man aus ihrer symmetrischen Lage zu den Achsen $\frac{(2n+1)\pi}{n}$ ohne Schwierigkeit. Ihre Zeichnung bietet die Form eines mehrteilig gekerbten regulären Blattes.

Der Fall

$$Z = a\eta^m + b\eta^{m+n} + c\eta^{m+2n} + \cdots$$

erledigt sich methodisch wie III.

Läfst man die Spitzenbedingung fallen, so ist der Ubergang zu den Schleifenkurven ein sehr einfacher. Im besondern können je zwei um symmetrische Spitzen gezogene Schleifen sich auf der Mittelachse kardioidisch verzweigen, ferner kann die kardioidische Schleife in eine Spitze sich zusammenziehen u. s. w.

Der eben erörterten n-teiligen epicyklischen Kurvengruppe steht die hypocyklische zur Seite:

VI $$Z = a\eta + b\eta^{1-n} + c\eta^{1-2n} + \cdots$$

Ihre Untersuchung unterbleibt füglich, da sie keine prinzipielle Schwierigkeit mehr bieten kann. Diese Kurven kann man aus den Spitzenkurven II abgeleitet denken, indem in dem bei V angegebenen Sinne jeder Rückkehrpunkt durch zwei, weiterhin drei u. s. f. der Reihe nach ersetzt wird, welche symmetrisch zu den Teilstrahlen liegen. So erscheinen die Figuren blattförmig mit gezähnten Spitzen.

5.

Unter Anwendung des für die geometrische Darstellung bisher benutzten Prinzips läfst sich weiterhin die allgemeine Gleichung

VI $$Z = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 + \cdots$$

behandeln. Sei die rechte Seite zunächst dreigliedrig, so ergiebt $\frac{dZ}{d \angle \eta} = 0$ die Spitzenbedingung $a = 2b = 3c$ und $\frac{\eta^3 - 1}{\eta - 1} = 0$. Nennt man die dem Zähler entsprechenden Wurzelwerte $\eta = \varepsilon, \varepsilon^2, 1$, so bestimmen die beiden ersten die Lage der Rückkehrpunkte $z_1 = a\varepsilon + b\varepsilon^2 + c$, $z_2 = a\varepsilon^2 + b\varepsilon + c$. Ihre symmetrische Lage zur Achse π ist sofort evident. Fügt man das Glied $d\eta^4$ noch hinzu, so liefert Z eine Kurve mit drei Spitzen, entsprechend $\frac{\eta^4 - 1}{\eta - 1} = 0$, von denen die eine auf der Achse π liegt, die andern beiden symmetrisch zugeordnet sind und vom Nullpunkt weiter abstehen als jene. Steigt man so zu einem n-gliedrigen Ausdruck Z auf, so wird

$$Z = a\eta + \frac{a}{2}\eta^2 + \frac{a}{3}\eta^3 + \cdots \frac{a}{n}\eta^n,$$

$$dZ = \eta \frac{(\eta^n - 1)}{\eta - 1} = 0, \quad \sqrt[n]{1} = \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \cdots$$

die allgemeinste Gestalt der Rückkehrkurven ergeben. Der Vektor Z hat für $\eta = 1$ seinen gröfsten Wert, nimmt ab bis ε_1, geht durch ein Teilmaximum zur Spitze ε_2 u. s. w. Die $n-1$ Spitzen gruppieren sich symmetrisch zur Achse π, und zwar liegt für gerades n eine derselben auf dieser Achse. Die von den Kurven bezeugte Fläche hat die Form eines nach der Spitze zu mehrfach gekerbten ovalen Blattes. Ist die Rückkehrkurve erst fixiert, so macht sich die Vorstellung der Schleifenkurven von selbst, ebenso der speciellen Rückkehrkurven, welche durch das Zusammenfallen von Spitzen entstehen. Für $n = 2, 3, \ldots$ erhält man also Kardioiden mit 1, 2 ... Schleifen, welche in kleineren oder gröfseren Konturen um die entsprechenden Rückkehrpunkte herumgehen. Insbesondere fallen für $a = b = c = \cdots$ die Verzweigungspunkte der Schleifen in einem und demselben Punkte

der Achse π zusammen, während die Schleifen zu ihr symmetrisch durch den Nullpunkt verlaufen.

Werden einige Koefficienten des allgemeinen Ausdruckes gleich Null, so erfordert derselbe eine besondere Untersuchung. Dies gilt auch für den Fall, dafs irgend eine Zahlbeziehung zwischen den Koefficienten besteht.

6.

Unter den mehrgliedrigen Formen, welche Z als ganze Funktion der η annehmen kann, würden noch diejenigen hervorzuheben sein, welche sowohl positive als negative Exponenten enthalten, also

VII $$Z = f\left(\eta, \frac{1}{\eta}\right).$$

Auf specielle Gruppen derselben wird man gebracht, wenn man an Stelle des Elementarkreises η eine Ellipse einführt. Denn für $\eta = m\zeta + n\frac{1}{\zeta}$ geht die Gleichung VI in $Z = f\left(\xi, \frac{1}{\xi}\right)$ über.

Der Einflufs einer solchen Substitution besteht in einer Deformation der ursprünglichen Kurve. Ebenso würde die Transformation

$$\eta = m\zeta + n\frac{1}{\zeta k},$$

welche also eine Hypocykloide an Stelle des Einheitskreises setzt, eine besondere Form von VII ergeben. Das Studium solcher und überhaupt beliebiger Transformationen mufs einer ausführlichen Behandlung a. a. O. vorbehalten bleiben.

Auf einen interessanten Specialfall möchte ich hier noch kurz hinweisen. Beachtet man, dafs für $a = b$ die Ellipse in eine doppeltzählende Strecke $a\left(\eta + \frac{1}{\eta}\right) = 2a\cos\eta$ (ebenso für $b = -a$ in eine zu ihr senkrechte $a\left(\eta - \frac{1}{\eta}\right) = 2a\sin\eta \cdot i$) übergeht, so kann man der geradlinigen Bewegung von $+a$ bis $-a$ und zurück eine drehende $b\eta^k$ zuordnen. Dann liefert

VIII $$Z = a\eta + a\frac{1}{\eta} + b\eta^k = 2a\cos\eta + b\eta^k$$

eine geschlossene längs $2a$ symmetrische Kurve, deren Gestalt sich anschauungsmäfsig verfolgen läfst. Vom Anfangspunkt bewegt sich der Vektor Z bis $\angle\,\eta = \pi$ in $\frac{K}{2}$ cykloidischen Windungen, welche umgeklappt die ganze Kurve ergeben. Ist K gerade, so durchsetzen $\frac{K}{2}$ Schleifen die Gerade von oben und ebensoviele symmetrisch von unten.

Für ungerade K hat man $\frac{K-1}{2}$ Schleifen, dafür schliefst die Kurve links ganz wie rechts in einem Bogen ab. Übersichtlicher wird ihr Verlauf noch, wenn man sich an Stelle der Schleifen Spitzen denkt oder dieselben als gewundene specialisiert. Einige derselben findet man unter den Schwingungskurven von Joung (cf. Tyndall, der Schall) verzeichnet.

Ganz ebenso wie VIII erledigt sich die Darstellung von

$$Z = a \cos m\eta + b\eta^{\pm k}.$$

Es zählt hierher der Kreis von Schwingungskurven, welche Melde in seinem Atlas, Tafel VIII und IX, Taf. II Fig. 20, 26, 27 giebt.

7.

Bei der bis hier durchgeführten geometrischen Deutung der Funktion $Z = f(\eta)$, welche freilich auf Vollständigkeit keinen Anspruch machen kann und will, wurden die Rotationsparameter $a, b \ldots$ als reelle, konstante Zahlen vorausgesetzt. Auch die Annahme komplexer Werte war bei I schon berührt. Es war gezeigt, dafs sie auf die Verzweigungsart der Kurven keinen Einflufs haben und nur eine Deformation derselben bewirken. Sind jetzt die Koefficienten variabel gedacht, so lassen sich drei Möglichkeiten unterscheiden:

1) Dieselben sind goniometrische Funktionen eines Winkels φ. Dann kennzeichnet $Z = f(\varphi, \eta)$ einen stetigen Übergang der Kurve $f(o, \eta)$ in $f(2\pi, \eta)$, welcher in bestimmter periodischer Weise stattfindet. So lange nur die Funktionen cos und sin auftreten, verlaufen die Kurven im Endlichen. Dieser Fall ist für die Akustik und Optik von Wichtigkeit; vergl. die Bemerkung zu II.

2) Die Koefficienten sind Funktionen des Winkels η selbst. Dann wächst mit der Drehung auch der Vektor Z; wir erhalten Spiralen. Ihr allgemeinster Ausdruck wird also

$$Z = f(\angle\, \eta,\ e^{i\eta}).$$

So z. B. wird $Z = \varrho\,(\cos 2\varrho\pi + i \sin 2\varrho\pi)$ die Archimedische, $Z = e^{\eta}(\cos\eta + i \sin\eta)$ die logarithmische, $Z = \varrho\left(\cos\frac{a}{\varrho} + i \sin\frac{a}{\varrho}\right)$ die hyperbolische Spirale derselben.

3) Während die Verallgemeinerungen 1) und 2) für ganz bekannte Probleme der Geometrie und Physik Bedeutung gewinnen und sie als sehr specielle umfassen, führt uns die dritte Annahme variabler Zahlkoefficienten x_i in das Gebiet der Funktionentheorie, sei es nun, dafs wir für $x_1 : x_2 : x_3 \cdots = a_0 : a_1\varrho : a_2\varrho^2 \ldots$ und $z = \varrho\eta$ zu $Z = f(z)$

gelangen oder dafs man die Lagrangeschen Substitutionen und ihre Bedeutung für die Gleichungstheorie

$$z_i = x_1\varepsilon + x_2\varepsilon^2 + x_3\varepsilon^3 \ldots \quad \text{wo } \varepsilon = \sqrt[n]{1},$$

mit a. W. die Schnittpunktsysteme $z_i = \Sigma x_i \varepsilon^i$ der Kurven $Z = \sum_1^n x_k \eta^k$, studieren will. Ob für die einschlägigen Fragen Gewinn aus einer Untersuchung in der hier angegebenen Richtung zu ziehen ist, mag dahingestellt bleiben. Aus den zugänglichen Litteraturnachweisen hat sich nicht feststellen lassen, ob die angedeuteten Ideen eine Bearbeitung erfahren haben.

8.

Die Geometrie der cyklischen Kurven, welche hier ins Auge gefafst ist, verlangt, ganz abgesehen von den eben berührten Verallgemeinerungen, in weiterer Folge die Erörterung der Frage, ob sich unter Zugrundelegung der allgemeinen komplexen Form $Z = f(\eta)$ ihre analytische Behandlung durchführen läfst, ohne ein Zurückgehen auf Cartesische oder polare Koordinaten und Gleichungen nötig zu machen. Dafs dies der Fall ist, soll an einzelnen Fragen erläutert werden, welche in der Theorie der cyklischen Kurven üblich sind.

1. Quadratur der cyklischen Kurven. Bezeichnet z einen Vektor vom Anfangspunkte O nach irgend einem Kurvenpunkte P, so ist derselbe für einen benachbarten Punkt $Q = z + dz$. Der Zuwachs dz repräsentiert die Strecke PQ. Dann bedeutet nach den Sätzen über kombinatorische Multiplikation (vgl. Grafsmann, Ausdehnungslehre 1844) $\overline{OP}\,\overline{PQ}$ gleich dem doppelten Inhalt des $\triangle OPQ$, also $= z(z + dz)$. Da $zz = 0$, ergiebt sich das Flächenelement

$$df = \tfrac{1}{2} z dz.$$

Es wird also $2F = \int_0^\eta z dz$, wo $z = f(\eta) = M + iN$.

Sei $\frac{dz}{d\angle\eta} = (M_1 + iN_1)$, so ist

$$2F = \int_0^\eta (MN_1 - M_1N)\, d\eta.$$

Für $n$teilige Rückkehrkurven bedarf es dann nur einer Integration von 0 bis $\frac{2\pi}{n}$.

Sei allgemein

$$z = a\eta + b\eta^2 + c\eta^3 \cdots,$$

so $$dz = i(a\eta + 2b\eta^2 + 3c\eta^3 + \cdots) \cdot d\angle\eta,$$

also $$2F = \int_0^{\eta} (A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + D\cos 3\eta + \cdots) d\eta,$$

wo

$A = a^2 + 2b^2 + 3c^2 + 4d^2 + \cdots$, $B = 3ab + 5bc + 7cd + \cdots$

$C = 2(2ac + 3bd + 4ce \cdots)$, $D = 5ad + \cdots$

Das Flächenintegral wird dieselbe Form erhalten für $z = \sum_1^n a_k \frac{1}{\eta^k}$.

Für die zweitermigen Epi- und Hypocykloiden I, II erhält man die bekannten Ergebnisse.[1]) Nimmt man für Epicykloiden mit n Spitzen $Z = r\eta + \frac{r}{n+1}\eta^{n+1}$, so wird $F = r^2\pi\frac{n+2}{n+1}$, oder indem man $r = (n+1)\varrho$ setzt,

$$F = \varrho^2\pi(n+1)(n+2),$$

wie die Einzelberechnung ohne Schwierigkeit ergiebt. Ebenso wird für Hypocykloiden mit n Spitzen von der Form $Z = r\eta + \frac{r}{n-1}\frac{1}{\eta^{n-1}}$ das Integral

$$2F = \int \frac{n-2}{n-1} r^2 (1 - \cos n\eta)\, d\eta$$

erhalten. Es folgt für den Gesamtflächeninhalt

$$F = r^2\pi\frac{n-2}{n-1}$$

oder, wenn $r = \varrho(n-1)$ eingeführt wird,

$$F = \varrho^2\pi(n-1)(n-2).$$

2. Rektifikation. Versteht man unter $\lfloor dz$ das zu dz rechtwinklige Element, also $idx - dy$, so wird $\overline{ds}^2 = dz\lfloor dz$. Berechnet man wieder dz wie oben, so ergiebt sich für $z = a\eta + b\eta^2 c\eta^3 + \cdots$ die allgemeine Form

$$s = \int \sqrt{A + B\cos\eta + C\cos 2\eta + \cdots}\, d\eta,$$

wo $A, B, C \ldots$ in einfacher Weise wieder aus den Produkten der Koefficienten $a, b, c \ldots$ sich zusammensetzen.

Auf dieselbe Form s reduziert sich das Bogenintegral der k-teiligen Kurven $Z = a\eta^m + b\eta^{m+k} + c\eta^{m+2k} + \cdots$ Man erhält

---

1) L. Kiepert, Über Epicykloiden, Hypocykloiden u. s. w. Schlömilchs Zeitschrift XVII. Bd. 1872.

$$s = \int \sqrt{A + B\cos k\eta + C\cos 2k\eta + \cdots}\, d\eta$$
$$= \frac{1}{k}\int \sqrt{A + B\cos\varphi + C\cos 2\varphi + \cdots}\, d\eta,$$

wo $\angle\, \varphi = k\eta$ ist. Die Integrale haben also hyperelliptischen Charakter. Speciell für die III. Gruppe $z = a\eta^m + b\eta^k$ wird

$$ds = \sqrt{a^2m^2 + k^2b^2 + 2kmab\cos(k-m)\,\eta}\, d\eta.$$

Das zugehörige Integral reduziert sich auf ein elliptisches zweiter Gattung.

Am einfachsten ist die Lösung für die Gruppe I und II, wenn wir Spitzenkurven voraussetzen. Denn für die Hypocykloiden

$$Z = r\eta + \frac{r}{n-1}\frac{1}{\eta^{n-1}}$$

wird $ds = r\sqrt{2 - 2\cos n\eta}\, d\eta$. So folgt, wenn man über die ganze Kurve integriert, $s = 8r$ oder für $r = \varrho\,(n-1)$

$$s = 8\varrho\,(n-1).$$

Für die Epicykloiden mit Spitzen $Z = r\eta + \frac{r}{n+1}\eta^{n+1}$ folgt ebenso

$$ds = r\sqrt{2 + 2\cos n\eta}\, d\eta, \quad s = 8r.$$

So erkennt man die interessante Eigenschaft:

Alle Epi- und Hypocykloiden mit beliebig viel Spitzen haben gleichen Umfang, sobald der Grundkreis denselben Radius r hat.

3. Tangenten- und Normalengleichung. Sei ein Punkt T aufserhalb der Kurve durch den Vektor $t = t_1 + it_2$ bestimmt, ferner berühre die Tangente von T an die Kurve in einem Punkte B, für welchen der Vektor vom Anfangspunkte O aus $= z$ heifse, so ist TB durch $t - z$ dargestellt (Grafsmann l. c.). Da die Tangentialbedingung durch das Zusammenfallen von TB mit dem Richtungselement dr ausgedrückt wird, so wird die allgemeinste Form der Tangentialgleichung

$$(t - z)\widehat{dz} = 0 \quad \text{oder} \quad \widehat{tdz} = \widehat{zdz}.$$

In der That ergiebt die Ausrechnung für die $n$teiligen Spitzenkurven der speciellen Gruppe I und II bekannte Resultate. Denn entwickelt man für $Z = r\eta + \frac{r}{n+1}\eta^{n+1}$ das Differential dz und führt die kombinatorische Multiplikation aus, so wird:

$$t_1\cos\frac{n+2}{2}\eta + t_2\sin\frac{n+2}{2}\eta = r\cos\frac{n\eta}{2}\cdot\frac{n+2}{n+1}.$$

Für $Z = r\eta + \frac{r}{n-1}\frac{1}{\eta^{n-1}}$ folgt

$$t_1 \sin\frac{n-2}{2}\eta + t_2 \cos\frac{n-2}{2}\eta = r \sin\frac{n\eta}{2}\cdot\frac{n-2}{n-1}.$$

Die Gleichung der Normalen leitet man in einfachster Weise so ab, dafs man t und dz um 90^0 gedreht denkt. Dann geht $t = t_1 + it_2$ in $\mid t = -t_2 + it_1$, ebenso $dz = dx + idy$ in $\mid dz = -dy + idx$ über und man erhält die allgemeine Form der Normalen:

$$(\mid t - z)\widehat{\mid dz} = 0 \quad \text{oder} \quad \mid \widehat{t \mid dz} = \widehat{z \mid dz}.$$

Die specielle Anwendung auf obige Kurven ergiebt wieder Bekanntes. Für die vorige Hypocykloidengruppe bekommt man

$$-t_1 \sin\frac{n-2}{2}\eta + t_2 \cos\frac{n-2}{2}\eta = -\frac{rn}{n-1}\cos\frac{n}{2}\eta,$$

wo man jetzt nur für den laufenden Punkt der Normalen $x = t_2$, $y = t_1$ zu setzen hat, um die Cartesische Schreibweise zu erhalten. Dies folgt aus einer kurzen Orientierung in der Z-Ebene.

Ich unterlasse es in Anbetracht der hier gebotenen Kürze an weiteren geometrischen Fragen die Einfachheit und Allgemeinheit der angewandten Methode zu illustrieren, indem ich an anderer Stelle ausführlicher nachzuweisen gedenke, welche Bedeutung dieselbe für die Probleme der analytischen Geometrie durch die Einführung komplexer Gröfsen gewinnt.

Methode zur Prüfung der homogenen Magnetisierung eines Magnetstabes.

(Von Edm. Hoppe.)

Es befinde sich in einem Punkte (xyz) ein magnetisches Teilchen vom Magnetismus m, welches sich auf irgend einer Bahn gegen einen geschlossenen, ruhenden Leiterkreis, dessen Leitungsfähigkeit mit λ bezeichnet werde, bewege, so ist der durch die Bewegung in dem Leitungskreise erzeugte Integralstrom bekanntlich

$$(1) \qquad J = -\varepsilon \cdot m \cdot \lambda \int \left(\frac{dV}{dx}\cdot dx + \frac{dV}{dy}\cdot dy + \frac{dV}{dz}\cdot dz\right),$$

wo J die Stromstärke und V die Potentialfunktion von m auf den Leiter bedeutet. Letztere ist bekanntlich gegeben durch die Kegelöffnung, welche durch die Fläche des Stromkreises als Basis und

den Punkt (xyz) als Spitze bestimmt wird. Die Integration hat sich über den Weg des Punktes (xyz) zu erstrecken. Findet die Bewegung in der Ebene der Strombahn statt, so ist die Kegelöffnung überall $= 0$; also auch $V = 0$. Für alle andern Punkte des Raumes ist $V \gtrless 0$. Bezeichnen wir die Potentialfunktion im Anfangs- und Endpunkt des Weges mit V_a und V_e, so ist

$$J = -\varepsilon \cdot m \cdot \lambda (V_e - V_a).$$

Ist an Stelle eines Stromkreises ein Solenoid von n Windungen gegeben, so ist unter λ die Gesamtleitungsfähigkeit des ganzen Schliefsungskreises zu verstehen. In jeder Windung findet dann ein analoger Induktionsvorgang statt, und man hat, wenn e den Koefficienten der Selbstinduktion bezeichnet,

$$(2) \qquad J = -\varepsilon \cdot m \cdot \lambda \cdot \sum_1^n (V_e - V_a) + e \cdot \lambda \cdot \frac{dJ}{dt},$$

wo die Summation über alle V_e und V_a für jede einzelne Windung auszudehnen ist. Ist r die Entfernung des Punktes (xyz) von der mittleren Windungsfläche, l die Dicke des Solenoids, so ist, wenn $\frac{l}{r}$ ein sehr kleiner Bruch ist, V_e^1 von V_e^n nur wenig verschieden und man kann eine mittlere Windung als die Basis der Kegelöffnung betrachten und dementsprechend schreiben

$$(3) \qquad J = -\varepsilon \cdot m \cdot n \cdot \lambda (V_e' - V_a') + e \cdot \lambda \cdot \frac{dJ}{dt}.$$

Geht m auf einer geschlossenen Bahn einmal durch das von der Windung begrenzte Flächenstück hindurch, so ist

$$V_e' - V_a' = -4\pi.$$

Für eine Bewegung von m auf einer geschlossenen Bahn, welche entweder ganz aufserhalb des von der Windung begrenzten Flächenstückes verläuft, oder welche dieses Flächenstück eine gleiche Anzahl Male von der positiven oder negativen Seite her schneidet, ist $V_e' - V_a' = 0$. Daraus wird gewöhnlich geschlossen, dafs dann auch $J = 0$ sei, das ist jedoch nur unter bestimmten Bedingungen der Fall.

Es bewege sich m auf einer einfach geschlossenen ebenen Kurve, deren Ebene senkrecht steht auf der Ebene der mittleren Windungsfläche, so giebt es einen Punkt, wo $\frac{l}{r}$ ein Maximum, und einen Punkt, wo $\frac{l}{r}$ ein Minimum ist; wir nennen V' im ersteren V_A, im zweiten V_B. Zerlegen wir die Bewegung des Punktes m in zwei Abschnitte, von

B nach A und wieder zurück, so ist auf dem ersten Wege eine Induktion ausgeführt, so dafs

$$J_1 = -\varepsilon \cdot m \cdot \lambda (V_A - V_B) + e \cdot \lambda \cdot \frac{dJ_1}{dt}$$

ist. Würde der Punkt nur diese Bewegung ausführen, so wäre das der ganze Betrag der induzierten Stromstärke. Bei der Rückbewegung von A nach B entsteht ein neuer Stromimpuls

$$J_2 = -\varepsilon \cdot m \cdot \lambda (V_B - V_A) + e \cdot \lambda \cdot \frac{dJ_2}{dt}.$$

Würde diese Bewegung gleichzeitig ausgeführt werden, so ist die Summe der Stromimpluse $= 0$, findet die Bewegung nacheinander statt, so ist die Summation über beide Wegstrecken unstatthaft. Freilich ändert sich das V mit der Bewegung des Punktes m auf der ganzen Bahn stetig, und wenn diese Bedingung die alleinige wäre, so müfste die Integration gestattet sein und das Resultat der Induktion wäre $= 0$. Wir wissen von V, dafs es der Gleichung $\Delta V = 0$ genügt, wo ΔV die Summen der zweiten partiellen Derivierten von V nach den Koordinatenachsen bedeutet. In demselben Raume mag eine zweite Funktion V' der Laplaceschen Gleichung genügen; eine solche ist z. B. $\frac{1}{r} - \frac{1}{a}$, wenn r vom Punkte $(xyz) = 0$ gezählt wird und a irgend eine Konstante ist[1]). Dann gilt für die beiden Funktionen die Greensche Gleichung. Bildet man also einen Raum, z. B. eine konzentrische Kugelschale um den Punkt $xyz = 0$ vom Radius a und Radius a' und bezeichnet mit n die positive Normale auf der Oberfläche, so ist

$$\int \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\frac{\partial V}{\partial n} - V \cdot \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial n}\right] d\sigma = 0, \tag{4}$$

wo die Integration über die ganze Oberfläche zu geschehen hat, deren Element $d\sigma$ ist. Bedeutet $d\omega$ nun das Oberflächen-Element einer Kugel vom Radius 1, so ist der Beitrag der äufseren Oberfläche zu jenem Integral (4) folgender

$$\int \left[-\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\frac{\partial V}{\partial r} - V\frac{1}{r^2}\right] r^2 d\omega = G; \text{ für } r = a \text{ wird } G = -\int V_a d\omega.$$

Die innere Oberfläche liefert

$$\int \left[\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right)\frac{\partial V}{\partial r} + V\frac{1}{r^2}\right] r^2 d\omega = H; \text{ für } r = a' \text{ wird}$$

$$H = \int \left[\left(a' - \frac{a'^2}{a}\right)\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)_{a'} + V_{a_1}\right] d\omega.$$

1) B. Riemann, Schwere, Elektricität und Magnetismus p. 160.

Setzt man nun $a' = 0$, so ist $H = \int V_0 \cdot d\varpi$. Wir erhalten also statt (4) die Gleichung

$$\int (V_0 - V_a)\, d\varpi = 0, \tag{5}$$

d. h. V_0 kann weder ein Maximum noch Minimum sein in dem ganzen Raume, über welchen sich die Integration erstreckt.

Bei der Bewegung des Punktes m hatten wir in B ein Minimum, in A ein Maximum, wir integrieren daher nur über die einzelnen Zweige der Bahn des Punktes xyz. Es wird an der Betrachtungsweise nichts geändert dadurch, dafs man in das Solenoid, welches wir ursprünglich voraussetzten, einen weichen Eisenkern oder einen Magneten steckt. Es kommt dann zu obigen Induktionsströmen noch der Stromimpuls hinzu, welcher durch Erzeugen und Verschwinden des Magnetismus, respektive durch Änderung in der Intensität des vorhandenen ruhenden Magneten durch die Bewegung des Teilchens m hervorgerufen wird.

Es befinde sich in dem Solenoid ein Magnetstab, dessen Oberflächenelement mit $d\sigma$ bezeichnet sei. Auf diesem Flächenelement befinde sich in der ersten Lage des Teilchens m der „freie Magnetismus“ $\mu \cdot d\sigma$, in der zweiten Lage von m der Magnetismus $\mu' \cdot d\sigma$. Dann erzeugt diese Änderung einen Stromimpuls von der Stärke

$$i = -\varepsilon \cdot \lambda \sum' (\mu_1 - \mu)\, \mathfrak{V} d\sigma,$$

wo mit $\mathfrak{V}$ das Potential des Magnets auf das Solenoid bezeichnet ist. Auch hierbei verläuft der Stromimpuls bei der Bewegung des Punktes m von A nach B in entgegengesetzter Richtung wie bei der Bewegung von B nach A. Es mufs infolge dessen eine derartige Bewegung von xyz mit dem Magnetismus m in Gegenwart der Stromspirale mit oder ohne Eisenkern Wechselströme in der Spirale erzeugen, deren Richtung sich nach einer halben Durchlaufung der Bahn von xyz ändert, deren Intensität für jeden halben Umlauf die Stärke

$$J = -\varepsilon\lambda \left\{ mn (V_e' - V_a') + \sum' (\mu_1 - \mu)\, \mathfrak{V} d\sigma \right\} \pm e\lambda \frac{dJ}{dt} \tag{5}$$

hat.

Es interessierte mich die Frage für den Fall, dafs nicht ein Punkt (xyz) mit dem Magnetismus m die beregte Bewegung ausführt, sondern dafs ein Magnet rotiert oder pendelt. Zur Vereinfachung der Betrachtung nehmen wir an, dafs die Achse des Solenoids und die mechanische Achse des Stabmagnets sich senkrecht schneiden. Rotiert dann der Magnet um seine mechanische Achse, so wird in jedem *Querschnitt* des Magnets, falls dieser homogen magnetisiert ist, einem

Punkte xyz ein anderer Punkt $x'y'z'$ entsprechen, welcher in Bezug auf die Solenoidachse symmetrisch zu ersterem liegt und das gleiche magnetische Moment m hat. Während der Punkt xyz dann bei der Rotation nach $x + \alpha$, $y + \beta$, z fortschreitet, wenn die z-Achse parallel der Magnetachse gelegt wird, so geht $x'y'z'$ nach $x' - \alpha$, $y' - \beta$, z' (wo $z = z'$ ist), und für diese Bewegung ist $(V_e' - V_a')$, welches von der Bewegung des Punktes xyz herrührt, entgegengesetzt gleich $(V_{e_1}' - V_{a_1}')$, welches dem Punkte $x'y'z'$ angehört. Dasselbe gilt für die Magnetisierung des Kernes, d. h. in jedem Augenblick der Bewegung ist die Induktion $= 0$, also auch für die Gesamtrotation. Ist dagegen die magnetische Achse nicht zusammenfallend mit der mechanischen, resp. Rotationsachse, so läfst sich die Verschiedenheit in eine Neigungsabweichung und eine parallel der Rotationsachse ausgeführte Verschiebung zerlegen. Sei der Neigungswinkel der magnetischen und mechanischen Achse φ, die halbe Länge des Magneten h, schneiden sich ferner magnetische und mechanische Achse in ihren Mittelpunkten und macht man diesen zum Koordinaten-Anfangspunkt, so kann man voraussetzen, dafs in jedem Querschnitt, welcher in der Höhe z gelegt wird, der Magnetismus in dem Punkte $z \cdot \operatorname{tg} \varphi$ konzentriert ist. Bezeichnen wir diesen zu substituierenden Magnetismus mit m, so beschreibt dies Magnetteilchen einen Kreis vom Radius $z \cdot \operatorname{tg} \varphi$. Da für das Integral nur Maximum- und Minimumstellung von Wichtigkeit ist, wird die Induktion dieselbe sein, wenn der Punkt m auf der Linie $2z \cdot \operatorname{tg} \varphi$ hin und her pendelt. Für die Gesamtinduktion ist zu summieren über die ganze Länge h, von $z = 0$ bis $z = \pm h$, d. h. die Gesamtheit aller induzierenden Punkte beschreibt einen Doppelkegelmantel, dessen Höhe h ist, dessen Grundkreis $h \cdot \operatorname{tg} \varphi$ zum Radius hat, und wo der Kegel nach der Seite der positiven z entgegengesetzt magnetisch ist, wie der nach der negativen Seite der z.

Hat man eine zur Rotationsachse parallele Verschiebung der magnetischen Achse, so dafs die Koordinaten des magnetischen Mittelpunktes a, b, 0 sind, so ist ein Cylindermantel von allen induzierenden Punkten bei der Rotation beschrieben, legt man die x-Achse parallel zur Achse des Solenoids, so ist der Cylinder von der Höhe $2h$ und dem Radius a, wo wieder die positive Seite entgegengesetzt induziert wie die negative Seite der z-Achse.

Eine Vereinfachung tritt ein, wenn wir den Magneten durch die zwei Pole ersetzt denken; auf diese will ich jetzt nicht näher eingehen.

Es entsteht die Frage, wie man diese Induktionsströme beobachten kann. Folgen die Induktionsstöfse schnell genug aufeinander, so wird in einem Weberschen Dynamometer die bewegliche Rolle von

der festen mit einer konstanten Kraft, welche der mittleren Stromintensität entspricht, abgelenkt. Bezeichnet D das statische Direktionsmoment der beweglichen Rolle, G das Drehungsmoment des Erdmagnetismus auf dieselbe, so ist, wenn α der Ablenkungswinkel ist, $J^2 = C \cdot (D \pm G) \operatorname{tg} \alpha$, wo C eine Konstante ist und das positive oder negative Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem der Strom die bewegliche Rolle in „natürlicher" oder „verkehrter" Richtung durchläuft. Für schwache Ströme ist G zu vernachlässigen, was in der Regel eintreten wird, wenn es sich um Prüfung von Magnetstäben handelt in Bezug auf die Abweichung der magnetischen von der mechanischen Achse.

In vielen Fällen wird eine derartige Prüfung am bequemsten mit einem Telephon ausgeführt, indem man entweder eine besondere Induktionsspirale mit dem Telephon verbindet, oder einfach zwei Telephone nimmt, von denen das eine in der oben bezeichneten Lage als Empfänger der Induktion benutzt wird, das andere als Hörapparat. Bei langsamer Rotation wird man bei jeder halben Umdrehung ein deutliches Knacken in dem Telephon hören, jedesmal wenn der Stromwechsel in der Maximum- und Minimumstellung eintritt, bei schneller Rotation und geeigneter Stärke erhält man den entsprechenden Ton.

Beide Methoden habe ich ausgeführt mit Hilfe eines zu diesem Zweck absichtlich ungleichmäfsig magnetisierten Hohlcylinders aus Stahl. Beobachtungszahlen werde ich anderweit veröffentlichen.

Endlich läfst sich durch Verbindung des Magneten mit einem konzentrischen Kommutator die Folge der Stromimpulse gleichrichten, dann ist auch die Möglichkeit gegeben, mit einem Galvanometer zu beobachten.

Zur Theorie der linearen partiellen Differential-Gleichungen.

(Von Paul Jäfisch.)

Bei einer Anwendung der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2} + m^2F = 0 \tag{1}$$

schien es möglich allen Grenzbedingungen zu genügen, wenn es gelang Funktionen $\psi(F)$ aufzustellen, welche für jedes Integral F selbst dieser Gleichung genügen. Auf dieselbe Aufgabe wird man bei Lösung von Systemen partieller Differentialgleichungen geführt, wie sie in der Theorie der Elasticität fester Körper, in der Theorie des Magnetis-

aus und anderen Gebieten auftreten. Es ergaben sich mir 6 solche Funktionen $\psi(F)$. Jede derselben liefert beliebig viele neue Integrale der Gleichung, wenn eins derselben bekannt ist. Denn derselben Gleichung werden auch die Funktionen

$$\psi(\psi(F)),\quad \psi[\psi(\psi(F))],\ldots$$

genügen, welche durch Anwendung der Operationen $\psi(F)$ auf die durch dieselben Operationen gewonnenen Funktionen erhalten werden. Durch jede Funktion $\psi(F)$ wird die Anzahl der durch die Grenzbedingungen zu bestimmenden Konstanten beliebig vermehrt. Daher werden die Funktionen $\psi(F)$ vielleicht bei manchen Problemen Verwertung finden, bei denen sich die bis jetzt bekannten Lösungen der Differentialgleichung als unbrauchbar erwiesen haben.

Die Eigenschaft der Funktionen $\psi(F)$, die partikulären Integrale der Differentialgleichung beliebig zu vermehren, veranlafste mich zu untersuchen, ob sich solche Funktionen $\psi(F)$ auch für andere partielle Differentialgleichungen auffinden lassen. Es ergab sich, dafs für alle linearen partiellen Differentialgleichungen mit konstanten Koefficienten ebenfalls solche Funktionen existieren. Einmal sind es die Differentialquotienten von F nach den unabhängigen Veränderlichen und dann gewisse Funktionen, deren Anzahl von der Ordnungszahl sowie der Zahl der unabhängigen Veränderlichen abhängig sein wird. Für andere Differentialgleichungen ergeben sich im allgemeinen Funktionen $\psi(F)$, wenn die Konstanten der Gleichungen gewisse Bedingungen erfüllen. Doch beschränke ich mich hier auf die Ableitung der Funktionen $\psi(F)$ für die linearen Differentialgleichungen erster Ordnung mit konstanten Koefficienten, während die befolgte Methode für alle Differentialgleichungen anwendbar bleibt. Für die ersteren Gleichungen erhält man bei k unabhängigen Veränderlichen aufser den Differentialquotienten von F nach den unabhängigen Veränderlichen noch $\frac{k(k-1)}{2}$ Funktionen $\psi(F)$, aus denen weitere Funktionen $\psi(2F)$ durch Anwendung der Operationen ψ auf die Funktionen $\psi(F)$ selbst hervorgehen. Alle diese Funktionen $\psi(F)$ haben ein einfaches Bildungsgesetz und lassen sich in endlicher Form herstellen. Für die allgemeineren Gleichungen gebe ich einige Beispiele, und als solche mögen für die Theorie der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung die sechs Funktionen betrachtet werden, welche ich für die Gleichung (1) ohne Ableitung aufstelle und deren Richtigkeit ich kurz nachweise. Bei anderer Gelegenheit gedenke ich diese Untersuchung weiter zu verfolgen.

In Cylinder- und Kugelkoordinaten ergeben sich für die Glei-

chung (1) gewisse Funktionen $\psi(F)$, welche nur von zwei Veränderlichen abhängen und daher bemerkenswert erscheinen.

§ 1. Die lineare Gleichung erster Ordnung mit k Unbekannten sei:

$$(2) \qquad \Delta(z) = a_1 \frac{dz}{dx_1} + a_2 \frac{dz}{dx_2} + \cdots + a_k \frac{dz}{dx_k} + z = 0.$$

Eine Funktion $\psi(z)$, welche dieser Gleichung, deren linke Seite zur Abkürzung mit $\Delta(z)$ bezeichnet werden möge, genügen soll, wird aus Teilen bestehen müssen, für welche $\Delta(z)$ Werte annimmt, deren Summe mit Rücksicht auf die Gleichung (2) verschwindet. Daher hat man alle Funktionen z aufzusuchen, für welche $\Delta(z)$ Werte von der Form der Glieder der Gleichung annimmt.

Nun ist

$$(3) \qquad \Delta(x_i^n z) = x_i^n \Delta(z) + a_i n x_i^{n-1} z,$$

und mit Rücksicht auf die Gleichung (2) sowie darauf, dafs derselben durch alle Differentialquotienten von z nach $x_1, x_2 \ldots x_k$ genügt wird, folgt hieraus

$$\Delta(x_i z) = a_i z,$$
$$\Delta\left(x_i \frac{dz}{dx_j}\right) = a_i \frac{dz}{dx_j},$$

und weiter, dafs $\psi(z)$ nur Glieder der Form $x_i z$ und $x_i \frac{dz}{dx_j}$ haben kann. Man bilde also die Ausdrücke

$$\begin{array}{llll}
\Delta(x_1 z), & \Delta(x_2 z), & \Delta(x_3 z), \ldots\ldots & \Delta(x_k z), \\
\Delta\left(x_1 \frac{dz}{dx_1}\right), & \Delta\left(x_2 \frac{dz}{dx_1}\right), & \Delta\left(x_3 \frac{dz}{dx_1}\right), \ldots\ldots & \Delta\left(x_k \frac{dz}{dx_1}\right) \\
\Delta\left(x_1 \frac{dz}{dx_2}\right), & \Delta\left(x_2 \frac{dz}{dx_2}\right), & \Delta\left(x_3 \frac{dz}{dx_2}\right), \ldots\ldots & \Delta\left(x_k \frac{dz}{dx_2}\right) \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\Delta\left(x_1 \frac{dz}{dx_k}\right), & \Delta\left(x_2 \frac{dz}{dx_k}\right), & \Delta\left(x_3 \frac{dz}{dx_k}\right), \ldots\ldots & \Delta\left(x_k \frac{dz}{dx_k}\right),
\end{array}$$

multipliziere dieselben der Reihe nach mit den zu bestimmenden Konstanten

$$\begin{array}{llll}
h_1, & h_2, & h_3 \ldots\ldots & h_k, \\
h_{11}, & h_{21}, & h_{31} \ldots\ldots & h_{k1}, \\
h_{12}, & h_{22}, & h_{32} \ldots\ldots & h_{k2}, \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
h_{1k}, & h_{2k}, & h_{3k} \ldots\ldots & h_{kk},
\end{array}$$

und setze zur Abkürzung

$$
\begin{aligned}
(4)\quad \psi(z) = {} & h_1 x_1 z + h_2 x_2 z + h_3 x_3 z + \cdots h_k x_k z + \\
& h_{11} x_1 \frac{dz}{dx_1} + h_{21} x_2 \frac{dz}{dx_1} + h_{31} x_3 \frac{dz}{dx_1} + \cdots h_{k1} x_k \frac{dz}{dx_1} + \\
& h_{12} x_1 \frac{dz}{dx_2} + h_{22} x_2 \frac{dz}{dx_2} + h_{32} x_3 \frac{dz}{dx_2} + \cdots h_{k2} x_k \frac{dz}{dx_2} + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& h_{1k} x_1 \frac{dz}{dx_k} + h_{2k} x_2 \frac{dz}{dx_k} + h_{3k} x_3 \frac{dz}{dx_k} + \cdots h_{kk} x_k \frac{dz}{dx_k},
\end{aligned}
$$

so entsteht durch Addition die Gleichung

$$
\begin{aligned}
\Delta(\psi(z)) = {} & h_1 a_1 z + h_2 a_2 z + h_3 a_3 z + \cdots h_k a_k z + \\
& h_{11} a_1 \frac{dz}{dx_1} + h_{21} a_2 \frac{dz}{dx_1} + h_{31} a_3 \frac{dz}{dx_1} + \cdots h_{k1} a_k \frac{dz}{dx_1} + \\
& h_{12} a_1 \frac{dz}{dx_2} + h_{22} a_2 \frac{dz}{dx_2} + h_{32} a_3 \frac{dz}{dx_2} + \cdots h_{k2} a_k \frac{dz}{dx_2} + \\
& \cdots\cdots\cdots\cdots \\
& h_{1k} a_1 \frac{dz}{dx_k} + h_{2k} a_2 \frac{dz}{dx_k} + h_{3k} a_3 \frac{dz}{dx_k} + \cdots h_{kk} a_k \frac{dz}{dx_k}.
\end{aligned}
$$

Die rechte Seite dieser Gleichung soll identisch mit $\Delta(z)$ werden. Daher müssen die folgenden Gleichungen bestehen:

$$
(5)\qquad \begin{cases}
h_1 a_1 + h_2 a_2 + h_3 a_3 + \cdots h_k a_k = 1, \\
h_{11} a_1 + h_{21} a_2 + h_{31} a_3 + \cdots h_{k1} a_k = a_1, \\
h_{12} a_1 + h_{22} a_2 + h_{32} a_3 + \cdots h_{k2} a_k = a_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots \\
h_{1k} a_1 + h_{2k} a_2 + h_{3k} a_3 + \cdots h_{kk} a_k = a_k.
\end{cases}
$$

Diese Gleichungen bestimmen $k+1$ Konstanten h z. B. h_1, h_{11}, h_{12}, $h_{13}, \ldots h_{1k}$ als Funktionen der übrigen $k^2 - 1$ Konstanten h und der Koefficienten a. Denkt man sich die Werte derselben in den Ausdruck (4) für $\psi(z)$ eingetragen, so müssen, weil den unbestimmt gebliebenen Grössen h beliebige Werte gegeben werden können, ihre Koefficienten in dem entstehenden Ausdrucke für $\psi(z)$ für sich der Gleichung $\Delta(z) = 0$ genügen. Es ergiebt sich bei passender Anordnung der Glieder

$$(6)\ \psi(z)=\frac{1}{a_1}x_1 z \quad +\frac{a_1}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_1}+\frac{a_2}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_2} \qquad +\cdots\frac{a_k}{a_1}x_k\frac{dz}{dx_k}$$

$$+h_2\left(x_2 z \quad -\frac{a_2}{a_1}x_1 z\right)+h_3\left(x_3 z \quad -\frac{a_3}{a_1}x_1 z\right)+\cdots h_k\left(x_k z \quad -\frac{a_k}{a_1}x_1 z\right)$$

$$+h_{21}\left(x_2\frac{dz}{dx_1}-\frac{a_2}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_1}\right)+h_{31}\left(x_3\frac{dz}{dx_1}-\frac{a_3}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_1}\right)+\cdots h_{k1}\left(x_k\frac{dz}{dx_1}-\frac{a_k}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_1}\right)$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$k_{2k}\left(x_2\frac{dz}{dx_k}-\frac{a_2}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_k}\right)+h_{3k}\left(x_3\frac{dz}{dx_k}-\frac{a_k}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_k}\right)+\cdots h_{kk}\left(x_k\frac{dz}{dx_k}-\frac{a_k}{a_1}x_1\frac{dz}{dx_k}\right).$$

Hierin verschwinden die von den Konstanten h freien Glieder der gegebenen Gleichung wegen. Die Koefficienten der übrigen Glieder geben folgendes System von Funktionen $\psi(z)$

$$(a_1x_2-a_2x_1)z,\quad (a_1x_3-a_3x_1)z,\cdots\cdots(a_1x_k-a_kx_1)z,$$

$$(a_1x_2-a_2x_1)\frac{dz}{dx_1},\quad (a_1x_3-a_3x_1)\frac{dz}{dx_1},\cdots(a_1x_k-a_kx_1)\frac{dz}{dx_1},$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(a_1x_2-a_2x_1)\frac{dz}{dx_k},\quad (a_1x_3-a_3x_1)\frac{dz}{dx_k},\cdots(a_1x_k-a_kx_1)\frac{dz}{dx_k},$$

wobei konstante Faktoren weggelassen sind. Bedenkt man nun, dafs, wenn z und $\psi(z)$ der Gleichung $A(z)=0$ genügen, man z und $\psi(z)$ durch jede andere, derselben Gleichung genügende Funktion ersetzen kann, also auch durch die Differentialquotienten von z nach den Veränderlichen x_i, so reduziert sich das erhaltene System von Funktionen $\psi(z)$ auf seine erste Horizontalreihe.

Nun hätte man wie die Konstanten h der ersten Vertikalreihe im Gleichungensysteme (5) auch die Konstanten h der zweiten oder dritten u. s. w. Vertikalreihe durch die übrigen Konstanten h ausdrücken und in den Ausdruck (4) für $\psi(z)$ eintragen können, so würde man die folgenden weiteren Funktionen von z erhalten haben:

$$(a_2x_1-a_1x_2)z,\quad (a_2x_3-a_3x_2)z,\cdots(a_2x_k-a_kx_2)z,$$
$$(a_3x_1-a_1x_3)z,\quad (a_3x_2-a_2x_3)z,\cdots(a_3x_k-a_kx_3)z,$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$(a_kx_1-a_1x_k)z,\quad (a_kx_2-a_2x_k)z,\cdots(a_kx_{k-1}-a_{k-1}x_k)z.$$

Alle diese Funktionen von z, welche den Charakter einer Funktion $\psi(z)$ haben, sind in der Form

$$\psi_{ij}(z)=(a_ix_j-a_jx_i)\,z$$

für alle Werte von i und j, von 1 bis k und für $i\lesseqgtr j$ enthalten.

ərücksichtigt man noch, dafs sich immer je zwei dieser Funktionen ır durch konstante Faktoren unterscheiden, so ist ihre Anzahl, also e Anzahl aller Funktionen von z, welche aufser den Differential-ıotienten von z nach den unabhängigen Veränderlichen der Glei-ung (2) $\Delta(z) = 0$ genügen oder, wie wir sagen wollen, die Anzahl ler Grundfunktionen $\psi(z)$ gleich $\frac{k(k-1)}{2}$.

Weitere Grundfunktionen kann es nicht geben, da die Konstanten h eichmäfsig benutzt sind. Bei anderer Auswertung der Gleichungen (5) ürde man andere Formen für die Funktionen $\psi(z)$ erhalten; es ürde sich aber zeigen lassen, dafs dieselben auf die obigen zurück-ıführt werden können, weil man z in $\psi(z)$ durch jedes andere ırtikuläre Integral der Gleichung $\Delta(z) = 0$ ersetzen kann. Das-lbe hat man bei Bildung der abgeleiteten Funktionen zu beachten, h. derjenigen Funktionen, welche sich durch Anwendung der ·Operationen auf die Funktionen $\psi(z)$ selbst ergeben. Die allgemeine ›rm derselben wird sein

$$\psi(z) = (a_{i1}x_{j1} - a_{j1}x_{i1})^{n_1} \cdot (a_{i2}x_{j2} - a_{j2}x_{i2})^{n_2} \cdots z,$$

o $i_1, j_1; i_2, j_2; \ldots$ irgend zwei ungleiche Zahlen der Reihe 1, 2, 3 ... k ›zeichnen und $n_1, n_2 \ldots$ beliebige positive ganze Zahlen sind.

§. 2. Auf allgemeinere Gleichungen läfst sich die gleiche Methode r Bestimmung der Funktionen $\psi(z)$ anwenden. Doch müssen die onstanten der Differentialgleichung gewissen Bedingungen genügen, enn Funktionen $\psi(z)$ existieren sollen. Ich zeige dies an der linearen ifferentialgleichung erster Ordnung, deren Koefficienten Funktionen sten Grades seien. Die Gleichung habe hier die Form:

$$) \quad \begin{cases} \Delta(z) = u_1 \frac{dz}{dx_1} + u_2 \frac{dz}{dx_2} + \cdots u_k \frac{dz}{dx_k} + u_{k+1} z = 0, \\ u_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots a_{ik}x_k + a_{i(k+1)}. \end{cases}$$

an hat die Ausdrücke

$$\begin{array}{llll} \Delta\left(x_1 \frac{dz}{dx_1}\right), & \Delta\left(x_2 \frac{dz}{dx_2}\right) \cdots \Delta\left(x_k \frac{dz}{dx_1}\right), & \Delta\left(\frac{dz}{dx_1}\right), \\ \Delta\left(x_1 \frac{dz}{dx_2}\right), & \Delta\left(x_2 \frac{dz}{dx_2}\right) \cdots \Delta\left(x_k \frac{dz}{dx_2}\right), & \Delta\left(\frac{dz}{dx_2}\right), \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \Delta\left(x_1 \frac{dz}{dx_k}\right), & \Delta\left(x_2 \frac{dz}{dx_k}\right) \cdots \Delta\left(x_k \frac{dz}{dx_k}\right), & \Delta\left(\frac{dz}{dx_k}\right), \\ \Delta(x_1 z), & \Delta(x_2 z) \quad \cdots \Delta(x_k z), & \Delta(z) \end{array}$$

zu bilden, dieselben mit $(k+1)^2$ Konstanten h zu multiplizieren und diese Konstanten so zu bestimmen, dafs die Summe aller dieser Ausdrücke verschwindet. Dazu hat man zunächst die Koefficienten der $k+1$ Gröfsen $\frac{dz}{dx_1}, \frac{dz}{dx_2} \cdots \frac{dz}{dx_k}, z$ verschwinden zu lassen; jede dieser $k+1$ Gleichungen zerfällt dann wieder in $k+1$ Gleichungen. So ergeben sich $(k+1)^2$ homogene lineare Gleichungen mit $(k+1)^2$ Unbekannten. Daher ist das Verschwinden ihrer Determinante die Bedingung, welcher die Koefficienten a_{ij} der Gleichung zu genügen haben, damit Funktionen $\psi(z)$ existieren. Bei anderer Gelegenheit soll diese Untersuchung weiter geführt werden. Hier folgen zwei Beispiele. Der Gleichung

$$(x+y)\frac{dz}{dx} - (x+y)\frac{dz}{dy} + axz = 0,$$

wo a eine gegebene Konstante sein soll, gehören die beiden Grundfunktionen

$$\psi_1(z) = (x+y)\,z,$$

$$\psi_2(z) = x\frac{dz}{dx} + (2y+x)\frac{dz}{dy}$$

an, sowie der Gleichung

$$(x+y)\frac{dz}{dx} - (x+y+a)\frac{dz}{dy} + (b(x+y)+c)\,z = 0$$

mit den gegebenen Konstanten a, b, c die Funktionen

$$\psi_1(z) = \frac{dz}{dx} - \frac{dz}{dy},$$

$$\psi_2(z) = 2a(a-y)\frac{dz}{dx} + a(x+3y)\frac{dz}{dy} - c(x+(2a+1)y)\,z.$$

§. 3. Für die partielle Differentialgleichung (1) stelle ich folgende sechs Funktionen auf:

$$\text{(8a)} \qquad \begin{cases} \psi_x(F) = \frac{dF'}{dx} + m^2xF, \\ \psi_y(F) = \frac{dF'}{dy} + m^2yF, \\ \psi_z(F) = \frac{dF'}{dz} + m^2zF, \end{cases}$$

$$\text{(8b)} \qquad \begin{cases} \psi_{yz}(F) = y\frac{dF}{dz} - z\frac{dF}{dy}, \\ \psi_{zx}(F) = z\frac{dF}{dx} - x\frac{dF}{dz}, \\ \psi_{xy}(F) = x\frac{dF}{dy} - y\frac{dF}{dx}, \end{cases}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$F' = F + x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz}. \tag{9}$$[1]

Diese Funktionen sollen der Gleichung (1) genügen, falls F ein Integral derselben ist. Offenbar genügt es den Nachweis für eine der ersten und eine der letzten drei Funktionen zu führen. Setzt man, wie gewöhnlich,

$$\Delta^2 F = \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{d^2F}{dy^2} + \frac{d^2F}{dz^2}, \tag{10}$$

so folgt, weil $\Delta^2 F = -m^2 F$ sein mufs, zunächst

$$\Delta^2 F' = -3m^2F - m^2\left(x\frac{dF}{dx} + y\frac{dF}{dy} + z\frac{dF}{dz}\right), \tag{11}$$

also auch wegen (9)

$$\Delta^2 F' = -2m^2F - m^2F'.$$

Hieraus folgt durch Differentiation

$$\Delta^2\left(\frac{dF'}{dx}\right) = -2m^2\frac{dF}{dx} - m^2\frac{dF'}{dx}.$$

Ferner ergiebt sich

$$\Delta^2(m^2xF) = 2m^2\frac{dF}{dx} - m^4xF.$$

Aus beiden Gleichungen folgt

$$\Delta^2\left(\frac{dF'}{dx} + m^2xF\right) + m^2\left(\frac{dF'}{dx} + m^2xF\right) = 0,$$

was zu beweisen war.

Dafs derselben Gleichung auch eine der drei Funktionen (8b) genügt, z. B. ψ_{yz}, folgt unmittelbar aus folgenden zwei Gleichungen:

$$\Delta^2\left(y\frac{dF}{dz}\right) = -m^2y\frac{dF}{dz} + 2\frac{d^2F}{dy\,dz},$$

$$\Delta\left(z\frac{dF}{dy}\right) = -m^2z\frac{dF}{dy} + 2\frac{d^2F}{dy\,dz}.$$

Die Funktionen (8a) und (8b) sind nicht unabhängig voneinander; es bestehen die Gleichungen

$$\frac{d\psi_x(F)}{dx} + \frac{d\psi_y(F)}{dy} + \frac{d\psi_z(F)}{dz} = 0,$$

$$\frac{d\psi_{yz}(F)}{dx} + \frac{d\psi_{zx}(F)}{dy} + \frac{d\psi_{xy}(F)}{dz} = 0;$$

---

1) Das Glied F in dem Ausdruck (9) für F' könnte weggelassen werden, ist aber des Folgenden wegen zugefügt.

die zweite Gleichung ergiebt sich unmittelbar, die erste Gleichung durch (11). Die Funktionen (8a) und (8b) bilden daher zwei Integralsysteme der simultanen partiellen Differentialgleichungen:

$$\Delta^2(X) + m^2 X = 0,$$
$$\Delta^2(Y) + m^2 Y = 0,$$
$$\Delta^2(Z) + m^2 Z = 0,$$
$$\frac{dX}{dx} + \frac{dY}{dy} + \frac{dZ}{dz} = 0,$$

einmal für $X = \psi_x, \quad Y = \psi_y, \quad Z = \psi_z,$

dann für $X = \psi_{yz}, \quad Y = \psi_{zx}, \quad Z = \psi_{xy}.$

Für Cylinderkoordinaten x, r, φ ($y = r\cos\varphi$, $z = r\sin\varphi$), in denen die Gleichung (1) die Form annimmt:

$$(12) \qquad \frac{1}{r}\frac{d}{dr} r \frac{dF}{dr} + \frac{d^2F}{dx^2} + \frac{1}{r^2}\frac{d^2F}{d\varphi^2} + m^2 F = 0$$

hebe ich die folgenden einfacheren Grundfunktionen

$$\psi_1(F) = \frac{d}{dx}\left(x\frac{dF}{dx} + r\frac{dF}{dr}\right) + m^2 xF,$$
$$\psi_2(F) = \cos\varphi \frac{dF}{dr} - \frac{\sin\varphi}{r}\frac{dF}{d\varphi},$$
$$\psi_3(F) = \sin\varphi \frac{dF}{dr} + \frac{\cos\varphi}{r}\frac{dF}{d\varphi}$$

hervor, von denen die letzteren mit $\frac{dF}{dy}$ und $\frac{dF}{dz}$ identisch sind, und für Kugelkoordinaten ϱ, η, φ ($r = \varrho\cos\eta$, $x = -\varrho\sin\eta$), in denen die Gleichung (1) die Form erhält:

$$(13) \qquad \varrho\frac{d^2\varrho F}{d\varrho^2} + \frac{1}{\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{dF}{d\eta} + \frac{1}{\cos^2\eta}\frac{d^2F}{d\varphi^2} + m^2\varrho^2 F = 0$$

die folgenden vier Funktionen $\chi_1(F)$, $\chi_2(F)$, $\chi_3(F)$, $\chi_4(F)$:

$$\chi_1(F) = \sin\eta\frac{dF}{d\varrho} + \frac{\cos\eta}{\varrho}\frac{dF}{d\eta},$$
$$\chi_2(F) = \sin\eta\frac{d^2\varrho F}{d\varrho^2} + \frac{\cos\eta}{\varrho}\frac{d^2\varrho F}{d\eta d\varrho} + m^2\varrho\sin\eta F,$$
$$\chi_3(F) = \sin\varphi\frac{dF}{d\eta} - \cos\varphi\,\mathrm{tang}\,\eta\frac{dF}{d\varphi},$$
$$\chi_4(F) = \cos\varphi\frac{dF}{d\eta} + \sin\varphi\,\mathrm{tang}\,\eta\frac{dF}{d\varphi},$$

von denen $\chi_1(F)$ aus $\frac{dF}{dx}$, $\chi_2(F)$ aus $\psi_x(F)$, $\chi_3(F)$ und $\chi_4(F)$ aus $\psi_{zx}(F)$ und $\psi_{xy}(F)$ hervorgegangen sind. Die übrigen Grund-

funktionen, welche sich für Cylinder- und Kugelkoordinaten ergeben, haben weniger einfache Form mit Ausnahme der Funktion $\frac{dF}{d\varphi}$, welche auch der Gleichung (13) genügt. Die genannten Funktionen sind auch deshalb bemerkenswert, weil sie nur von zwei Veränderlichen explicite abhängen und daher denjenigen Gleichungen genügen, welche aus (12) und (13) für die beiden entsprechenden Veränderlichen hervorgehen. So stellen z. B. $\chi_3(F)$ und $\chi_4(F)$ Integrale der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{1}{\cos\eta}\frac{d}{d\eta}\cos\eta\frac{dP}{d\eta}+\frac{1}{\cos^2\eta}\frac{d^2P}{d\varphi^2}+n(n+1)P=0$$

dar, welche die von zwei Argumenten abhängigen Kugelfunktionen bestimmt, falls F derselben Gleichung genügt.

Hamburg, 29. September 1889.

Über den Begriff der Zahl.

(Von H. Keferstein in Hamburg.)

W. Wundt bezeichnet es in seiner Erörterung der allgemeinen logischen Methoden der Mathematik (Logik 2. Band. Stuttgart 1883, p. 102) als ein altes Bestreben der Mathematiker, bei jenen einfachen Sätzen, welche entweder selbst unter die Axiome gehören oder als nächste Specialisierungen derselben betrachtet werden können, die Spuren der Induktion, durch welche dieselben allein zu gewinnen seien, zu verwischen. Und zwar soll dies geschehen, indem an Stelle der Induktion entweder die Intuition oder ein angeblich deduktiver Beweis gesetzt wird. Wundt führt auch eine Ursache dieser Erscheinung an: die mathematische Induktion werde, besonders in ihren einfachsten Fällen, hauptsächlich deshalb übersehen, weil sie sich von Anfang an mit einem sehr vollständigen und durch eigentümliche Merkmale ausgezeichneten Abstraktionsverfahren verbindet (ibid. p. 106). Mathematische Begriffe kommen nämlich dadurch zustande, dafs wir von allen denjenigen Elementen der Vorstellung abstrahieren, die in dem Objekt ihre Quelle haben und folglich als Rest nur unsere, bei der Bildung jener Vorstellung wirksame Gedankenthätigkeit behalten (ibid. p. 108). Als Beispiel wird der Begriff der Zahl angeführt, welcher als Merkmal nur noch die Funktion des Zählens enthalte, d. h. eine Aufeinanderfolge und Verbindung von Apperzeptionsakten, deren jeder einzelne den abstrakten Begriff der Einheit darstellt.

Wenn dies nun richtig ist, wenn in die mathematischen Begriffe thatsächlich nur die zu ihrer Erzeugung notwendigen geistigen Funktionen eingehen, so kann man, bei unbedingter Anerkennung des Umstandes, dafs sie lediglich durch Induktion gefunden worden sind, doch sich der Folgerung kaum entziehen, dafs letztere hiernach nicht ihre wahre Quelle ist. In der Geschichte der Bildung und Entwicklung der mathematischen Begriffe erscheinen jene geistigen Thätigkeiten freilich als reaktive, als ausgelöst und vielleicht sogar erst zur Entfaltung gebracht durch Eindrücke, welche in letzter Beziehung stets sinnlicher Art sind, — aber jede Reaktion setzt aktive Kräfte auf der Seite voraus, wo dieselbe erfolgt; das Denken, welches sich der Gegenstände bemächtigt, hat unzweifelhaft bereits eine eigentümliche Richtung, und die Beschaffenheit unserer Vorstellungen ist die Resultante aus jener und der besonderen Einwirkung der Objekte. Fällt die letztere aus, wie dies nach Wundt bei den mathematischen Begriffen geschieht, so bleibt die erstere, wenn auch möglichenfalls in modifizierter Gestalt, als einzige erzeugende Kraft übrig. Das Unternehmen, gewisse Begriffe der Mathematik rein logisch herzuleiten, darf daher durchaus nicht von vornherein als ein aussichtsloses bezeichnet werden. Erfolg verspricht dasselbe namentlich in demjenigen Zweige der Mathematik, dessen enge Verwandtschaft mit der Logik von jeher anerkannt worden ist, — in der Arithmetik. Die Grundlage dieser Wissenschaft bildet aber der Begriff der Zahl, und beim Betreten des soeben angedeuteten Weges empfiehlt es sich daher, vor allen ihn einer näheren Untersuchung zu unterwerfen. Da wir uns bei derselben vielfach in wesentlichen Punkten auf zwei sich mit der gleichen Frage beschäftigende Schriften stützen werden, nämlich „Frege, Die Grundlagen der Arithmetik. Eine logisch mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl. Breslau 1884“ und „R. Dedekind, Was sind und was sollen die Zahlen? Braunschweig 1888“, so mögen dieselben im folgenden kurz mit F. und D. citiert werden.

Wählen wir als Ausgangspunkt die bereits angeführte Definition von Wundt: „die Zahl ist eine Aufeinanderfolge und Verbindung von Apperzeptionsakten, deren jeder einzelne den abstrakten Begriff der Einheit darstellt“, so giebt sich dieselbe sowohl ihrem Wortlaut wie ihrer Einführung nach als eine blofse Schilderung des psychologischen Vorgangs zu erkennen, welcher zu dem Begriff der Zahl führt. Alle empirischen Begriffe dürften auf genau dieselbe Weise entstehen und für den vorliegenden bliebe als unterscheidendes Merkmal nur die Erfassung *des* einzelnen Apperzeptionsaktes als Einheit übrig. Nun

liegt aber hierin ein circulus vitiosus, denn wie man sich leicht überzeugt, wird etwas eben nur insofern Einheit genannt, als ihm eine Anzahl zukommt (vgl. F. p. 66). Die obige Erklärung ist also überhaupt unbrauchbar. Dies aber deutet sie trotzdem unzweifelhaft richtig an, dafs lediglich das Zählen die Zahl konstituiert. Was zählen wir denn nun eigentlich? Frege sagt, unseres Erachtens mit Recht, dafs jede Zahlangabe eine Aussage von einem Begriff enthält (F. p. 59 ff.), demnach natürlich auch nur ein Begriff als Einheit bezeichnet werden kann (F. p. 66). Indem wir betreffs der näheren Begründung dieser Behauptung auf die angeführte Schrift verweisen, stellen wir also fest, dafs irgendwelche Dinge nur insofern zählbar sind, als sie sich unter ein und denselben Begriff bringen lassen. Gewifs in gleichem Sinne wählt Dedekind in seiner Abhandlung zur Fundamentaldefinition diejenige eines Systems, indem er erklärt: Verschiedene Dinge a, b, c d. h. irgendwelche Gegenstände unseres Denkens, die mit a, b, c bezeichnet sind, bilden ein System S, insofern sie unter einem gemeinsamen Gesichtspunkt aufgefafst werden, und heifsen die Elemente des Systems (D. p. 1, 2). In der That schreibt er später jede Anzahl einem bestimmten Teile eines solchen Systems zu, wobei A ein Teil von S heifsen soll, wenn jedes Element von A auch Element von S ist, und ein echter Teil, wenn A Teil von S, aber verschieden von S ist (D. p. 2, 3), jedenfalls also A selbst wieder ein System darstellt.

Wir werden nun schon hier auf die für die Feststellung des Begriffs der Zahl ganz besonders wichtige Fähigkeit des Geistes geführt, ein Ding auf ein anderes zu beziehen, eine Fähigkeit, ohne welche überhaupt kein Denken möglich ist (D. Vorrede). Es ist das Urteilsvermögen, dasjenige geistige Vermögen, welches Kant specifisch als den Verstand bezeichnet und auf das er seine berühmte Deduktion der reinen Verstandesbegriffe stützt. Sollte es gelingen, aus diesem allein, unter Zuhilfenahme vielleicht von einigen rein formalen Definitionen, den Begriff der Zahl herzuleiten, so würde derselbe wohl fast mit mehr Recht ein reiner Verstandesbegriff heifsen dürfen als alle Kategorien.

Einen Fingerzeig zur Erreichung dieses Ziels giebt die noch heute sich täglich aufdrängende Erfahrung, dafs das ursprüngliche Zählen in der Zuordnung der unter einen bestimmten Begriff fallenden Gegenstände zu den unter einen anderen, dem Zählenden näher liegenden Begriff (z. B. Finger) sich unterordnenden Dingen besteht. Wir wollen für eine derartige Beziehung mit Dedekind den Na[illegible] Abbildung einführen und definieren: Unter einer Abbildung φ e[illegible]

Systems S wird ein Gesetz verstanden, nach welchem zu jedem bestimmten Element s von S ein bestimmtes Ding gehört, welches das Bild von s heifst und mit $\varphi(s) = s'$ bezeichnet wird. Das System, welches aus allen Bildern $\varphi(s) = s'$ besteht, soll das Bild $\varphi(S)$ heifsen (D. p. 6). Ferner: Eine Abbildung von S heifst ähnlich, wenn verschiedenen Elementen a, b des Systems S stets verschiedene Bilder $a' = \varphi(a)$, $b' = \varphi(b)$ entsprechen, so dafs man der Abbildung φ von S eine umgekehrte Abbildung $\overline{\varphi}(S')$ gegenüberstellen kann, welche darin besteht, dafs jedem Element s' von S' das Bild $\overline{\varphi}(s') = s$ entspricht und offenbar ebenfalls ähnlich ist (D. p. 8). Endlich: Die Systeme R und S heifsen ähnlich, wenn es eine derartige ähnliche Abbildung φ von S giebt, dafs $\varphi(S) = R$, also auch $\overline{\varphi}(R) = S$ wird (D. p. 10). Wir können demnach unsere Bemerkung über die Art der historischen Entwicklung des Zählens auch kurz so fassen: Der Bestimmung der Anzahl eines Systems (oder Begriffs) geht das Aufsuchen eines demselben ähnlichen Systems voraus. Wenn man nun bedenkt, dafs, falls R und S ähnliche Systeme sind, jedes mit R ähnliche System Q auch mit S ähnlich ist, wie sich leicht beweisen läfst, und man daher alle Systeme in Klassen einteilen kann, indem man in eine bestimmte Klasse alle und nur die Systeme Q, R, S aufnimmt, welche einem bestimmtem System R, dem Repräsentanten der Klasse, ähnlich sind (D. p. 10), so liegt es nahe zu erklären: Der Ausdruck „einem System R kommt eine bestimmte Anzahl zu“ ist gleichbedeutend mit dem: „Das System R gehört einer bestimmten Klasse an.“ Einen ähnlichen Sinn scheint die Definition von Frege zu haben: Die Anzahl, welche einem Begriff F zukommt, ist der Umfang des Begriffes „gleichzahlig dem Begriffe F“, wobei „der Begriff F ist gleichzahlig dem Begriff G“, dies bedeutet, dafs es eine Beziehung φ giebt, welche die unter F fallenden Gegenstände den unter G fallenden Gegenständen beiderseits eindeutig zuordnet (F. p. 79, 80). Nur dürfte allerdings, wie Frege dies auch selbst zugiebt (F. p. 117), seine Benutzung des Begriffsumfanges kaum viel Beifall finden. Offenbar aber bedarf unsere Erklärung noch sehr wesentlicher Ergänzungen, um eine brauchbare Grundlage für die Herleitung der einfachsten arithmetischen Sätze zu liefern. Vor allen Dingen wird Rechenschaft darüber gegeben werden müssen, was es heifsen soll, dafs einem System die Anzahl 1 zukommt, oder, was hiermit im engsten Zusammenhange steht, dafs eine Anzahl auf eine andere folgt. Sowohl Frege (F. p. 89, 90), als auch Dedekind, der übrigens den Begriff der Anzahl erst aus dem *zuerst* definierten der Ordinalzahl (D. p. 21, 54) herleitet, haben

unserer Ansicht nach den Begriff der Zahl 1, im Grunde genommen, ohne zureichende Erklärung eingeführt. Versuchsweise schlagen wir die Definition vor: „Die Anzahl eines Systems R ist 1“ heifst, R gehört der Klasse an, deren Repräsentant der Begriff des eigenen Ichs ist. Wir verstehen dabei unter letzterem einfach das denkende Ich des Descartes, welches zwar nie erkannt werden würde ohne Erfahrung, gleichwohl aber doch die Grundbedingung aller Erfahrung ist. Stellt man nicht die Forderung, dafs für jede Definition der Mathematik auch ein ihr entsprechender Gegenstand aufgewiesen werden mufs, so kann man auch die blofs formale Erklärung geben: „Einem System kommt die Anzahl 1 zu“, soll dasselbe heifsen, wie „es gehört der Klasse an, deren Repräsentant mit jedem seiner Elemente identisch ist“. Jedenfalls scheint es doch möglich, in dieser oder ähnlicher Weise die Bedeutung der Zahl 1 rein logisch festzustellen.

Ist dies geschehen, so kann man nun wohl unbedenklich mit Frege sagen: Der Satz, „es giebt einen Begriff F und einen unter ihn fallenden Gegenstand x der Art, dafs die Anzahl, welche dem Begriff F zukommt, n ist, und dafs die Anzahl, welche dem Begriffe, „„unter F fallend aber nicht gleich x““ zukommt, m ist“, sei gleichbedeutend mit „n folgt in der natürlichen Zahlenreihe unmittelbar auf m“ (F. p. 89). Da aber aus der erwähnten Abhandlung von Dedekind hervorgeht, dafs nach Einführung der Ordinalzahlen die Deduktion der arithmetischen Grundoperationen und ihrer Gesetze, sowie die Definition der Kardinalzahlen unabhängig von irgendwelchen Erfahrungsthatsachen sich vollziehen läfst und die Ordinalzahlen in der ganzen Analysis eine hervorragende Rolle spielen, ist es wohl angemessen, noch eine kurze Strecke dem berühmten Zahlentheoretiker auf seinem Wege zu folgen, zumal letzterer durch die vorhergegangene Einführung der Zahl 1 nicht nur an Sicherheit zu gewinnen, sondern auch an Weitläufigkeit zu verlieren scheint. Um zu der unendlichen Zahlenreihe zu gelangen, definiert Dedekind zunächst ein unendliches System überhaupt: Ein System S heifst unendlich, wenn es einem echten Teile seiner selbst ähnlich ist; im entgegengesetzten Falle heifst S ein endliches System (D. p. 17). Hieran schliefst sich ein Beweis für die Existenz solcher unendlicher Systeme durch Bezugnahme auf die Gesamtheit S aller Dinge, welche Gegenstand meines Denkens sein können. Dieser Beweis ist freilich mifslungen und mufste mifslingen, weil bei der Definition ähnlicher Systeme der Begriff der Gleichheit von Dedekind in dem Sinne gebraucht wird, dafs $a = b$, wenn a und b nur Zeichen für ein und dasselbe

Ding sind, und eine Gleichheit in dieser Bedeutung zwischen einem System und einem echten Teile desselben selbstverständlich ausgeschlossen ist. Unter Verwerfung jener Definition unendlicher Systeme halten wir uns daher an die andere (D. p. 17, Anmerkung): S heifst unendlich, wenn es einen echten Teil von S giebt, in welchen S sich ähnlich abbilden läfst.[1]) Hieran läfst sich nun sofort die von Dedekind gegebene Erklärung eines einfach unendlichen Systems in folgender etwas veränderten Form anschliefsen: Ein System N heifst einfach unendlich, wenn es eine solche ähnliche Abbildung von N in sich selbst giebt, dafs $\varphi(N)$ ein und nur ein Element von N nicht enthält. Wir nennen dies Element, das wir im folgenden durch das Symbol 1 bezeichnen wollen, das Grundelement von N und sagen zugleich, das einfach unendliche System N sei durch die Abbildung φ geordnet (D. p. 20). Der letztere Ausdruck rechtfertigt sich dadurch, dafs offensichtlich $\varphi(N)$ unter der soeben gemachten Voraussetzung selbst wieder ein einfach unendliches System ist u. s. f. Jene Erklärung eines durch die Abbildung φ geordneten Systems N läfst sich aber auch als die einer Reihe N auffassen, in der jedes Element auf ein anderes folgt, indem man als Bedeutung einer solchen Reihe die Beziehung feststellt, in welcher das Bild $\varphi(n) = n'$ eines Elementes n zu n selbst steht. Dadurch dafs Dedekind diesen Umstand nicht hervorhebt, tritt in der sich nun anschliefsenden Definition der Ordinalzahlen der Begriff der Reihe und des Folgens in einer solchen scheinbar unvermittelt auf. Die betreffende Erklärung lautet nämlich: Wenn man bei der Betrachtung eines einfach unendlichen, durch eine Abbildung φ geordneten Systems N von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absieht, lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur die Beziehungen auffafst, in die sie durch die ordnende Abbildung φ zu einander gesetzt sind, so heifsen diese Elemente natürliche Zahlen oder Ordinalzahlen oder auch schlechthin Zahlen, und das Grundelement 1 heifst die Grundzahl der Zahlenreihe N.... Das Bild n' einer Zahl n wird auch die auf n folgende Zahl genannt (D. p. 21). Bei gehöriger Berücksichtigung der vorangegangenen Erörterungen dürfte in diesen Sätzen höchstens noch die Forderung Anstofs erregen, man solle von der besonderen Beschaffenheit der Elemente gänzlich absehen und lediglich ihre Unterscheidbarkeit festhalten, indem Dinge doch eben nur

1) Ist φ eine ähnliche oder unähnliche Abbildung eines Systems S und $\varphi(S)$ Teil eines Systems Z, so nennen wir φ eine Abbildung von S in Z und sagen, S werde durch φ in Z abgebildet. Wir nennen daher φ eine Abbildung des Systems S in sich selbst, wenn $\varphi(S)$ ein Teil von S ist (D. p. 11).

dann unterscheidbar bleiben, wenn sie noch Verschiedenheiten aufweisen. Durch Streichung der Worte „ihre Unterscheidbarkeit festhält und nur“ verschwindet diese Schwierigkeit jedoch, da die Auffassung der Beziehungen, in welche die Elemente durch die ordnende Abbildung φ zu einander gesetzt sind, eben eine reine Gedankenthätigkeit ist, welche von der besonderen Beschaffenheit der Objekte, auf die sie gerichtet wird, durchaus unabhängig bleibt.

Die Möglichkeit einer rein logischen Definition des Zahlbegriffes scheint uns im Vorstehenden, — gegen die Behauptung von Wundt —, erwiesen zu sein. Betreffs der Herleitung des Gröfsenbegriffes der Zahlen, sowie der arithmetischen Grundoperationen und Grundgesetze aus ihr, welche sich wiederum im wesentlichen auf das Abbildungsverfahren stützt, müssen wir hier auf die Schrift von Dedekind verweisen. Sollten unsere Versuche, die letztere in einigen Punkten zu berichtigen, selbst das Richtige verfehlt haben, so werden sie doch wenigstens die Stellen hoffentlich genau kenntlich machen, welche erneuter Aufmerksamkeit solcher Mathematiker bedürfen, denen auch die philosophischen Grundlagen ihrer Wissenschaft der Beachtung wert scheinen.

Zur Erklärung des Sehens mit bewaffnetem Auge.

(Von J. Kiefsling in Hamburg.)

„Eine Gesichtswahrnehmung kommt nicht dadurch zu stande, dafs die Netzhaut mittels des Lichtäthers mit den äufseren Objekten, wie die Hand vermittels eines Stabes mit dem Boden, in Verbindung gebracht wird, sondern sie besteht in einer psychischen Auslegung der durch die Netzhäute empfangenen und von den Sehnerven nach den betreffenden Gehirnteilen fortgeleiteten Eindrücke.“[1]) Diese Auslegung bezieht sich sowohl auf den Ort als auch die äufsere Beschaffenheit der wahrgenommenen Objekte. Da wir diese äufsere Beschaffenheit vermittels unseres Sehorganes rein subjektiv beurteilen, so ist anzunehmen, dafs jedem Menschen die Aufsendinge in individuell eigentümlicher Weise erscheinen. Mit dem Wort Sehen bezeichnet man daher die durch Lichtempfindung hervorgerufene Vorstellung der äufseren, dem Auge sich darbietenden Objekte; ein Beobachter, der etwas sieht, macht infolge von Reizungsvorgängen auf der Netzhaut des Auges einen Schlufs auf die Existenz eines Gegenstandes.

1) Vergl. Kaiser, Physiologische Optik S. 313 und H. Helmholtz, Physiologische Optik S. 433—456.

Dieses psychische Vermögen entwickelt sich von der Geburt des Individuums an ganz allmählich, und zwar namentlich unter der wesentlichen Mitwirkung des Tastsinnes. Das Sehen mufs daher ebenso gelernt werden, wie das Gehen und Sprechen, wobei sich das Gesetz geltend macht, dafs unsere Gesichtsempfindungen nur insoweit zu Gesichtswahrnehmungen führen, als sie zur Erkenntnis der äufseren Objekte dienen, und dafs wir von jenen Gesichtsempfindungen, welche dem Sehzweck nicht entsprechen, unbewufst einer anpassenden Gewöhnung folgend, ganz absehen. Bei der Erklärung der Gesichtswahrnehmungen müssen daher die Vorgänge auf der Netzhaut die Grundlage bilden, auf welche jede Einzelbetrachtung zurückgehen mufs.

Irrtümlicherweise wird jedoch bei der Darstellung des Sehens mit bewaffnetem Auge in allen, sowohl für den elementaren, als auch für den höheren Unterricht bestimmten Lehrbüchern, der Lage und Gröfse der rein mathematischen (virtuellen) Bilder, welche den aus der Lupe oder aus dem Okular des Fernrohrs austretenden Strahlen zugehören, eine mafsgebende Bedeutung beim Sehvorgang beigelegt. — Es ist der Zweck der folgenden Zeilen klarzustellen, dafs die Lage und Gröfse eines virtuellen oder objektiven Bildes bei den zuletzt in das Auge des Beobachters gelangenden Strahlen mit den psychischen, der Gesichtswahrnehmung zu Grunde liegenden Vorgängen in gar keinem Zusammenhang steht, und dafs daher ein Herbeiziehen dieser mathematischen Bilder zur Erklärung der Gesichtswahrnehmungen bei bewaffnetem Auge, welches sogar zur Herstellung sinnloser Wandtafeln Veranlassung gegeben hat, nur verwirrend wirken kann.

Die Erwägung, dafs beim hypermetropischen Auge, wenn dasselbe in accomodationslosem Zustand mittels einer Lupe einen kleinen Gegenstand in vergröfserter Ausdehnung wahrnimmt, ein objektives Bild dieses Gegenstandes mitten in das Gehirn des Beobachters zu liegen kommt, — oder, dafs unter gleichen Bedingungen beim emmetropischen Auge, den aus der Lupe austretenden Bündeln paralleler Strahlen ein in unendlich ferner Ebene liegendes, also auch unendlich grofses, virtuelles Bild entspricht, — mag zur Begründung des eben Gesagten genügen.

Um das Sehen durch eine Lupe bei einem emmetropischen Auge und zwar in accomodationslosem Zustand zu erklären, hat man vielmehr den Verlauf der einzelnen Bündel paralleler Strahlen, welche aus der Lupe austreten, bis auf die Netzhaut zu verfolgen. Die dazu erforderlichen Konstruktionen sind überraschend einfach, wenn man näherungsweise die beiden Knotenpunkte des Auges, welche im sogenannten „reduzierten“ Listingschen Auge nur um 0,398 mm von-

einander entfernt sind, in einen einzigen Punkt K zusammenfallen läfst (vergl. Helmholtz, Physiologische Optik S. 69). Dann trifft jeder im Inneren des Auges durch K gehende Strahl, hinreichend verlängert, den zugehörigen Punkt des Netzhautbildes.

Wird mit unbewaffnetem Auge eine Strecke AB beobachtet, welche senkrecht auf der Sehachse liegt und zwar im Abstand d vom Knotenpunkt K, so erhält man das entsprechende Netzhautbild $\alpha\beta$, indem die Punkte A und B mit K verbunden und diese Verbindungslinie bis zum Durchschnitt mit der Netzhaut verlängert werden. Dann ergiebt sich (wenn der Abstand des Knotenpunktes K von der Netzhaut $= r$ gesetzt wird) die Beziehung

$$\frac{AB}{d} = \frac{\alpha\beta}{r}.$$

Wird nun eine Lupe von der Brennweite f unmittelbar vor das Auge gehalten und das Objekt AB bis in die Hauptbrennebene der Lupe herangeschoben, so dafs also aus der Linse Bündel paralleler Strahlen austreten, so sind zur Konstruktion des Netzhautbildes $\alpha_1\beta_1$ nur Parallelen durch K zu denjenigen Strahlen zu ziehen, welche aus der Lupe austretend auf die Cornea fallen. Dann ergiebt sich aber ohne weiteres aus der Ähnlichkeit entsprechender Dreiecke die Beziehung

$$\frac{AB}{f} = \frac{\alpha_1\beta_1}{r}.$$

Also ist die Vergröfserung der Lupe, d. h. der Quotient

$$\frac{\text{Netzhautbild bei bewaffnetem Auge}}{\text{Netzhautbild bei unbewaffnetem Auge}} \quad \text{oder} \quad \frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha\beta} = \frac{d}{f}.$$

Für kleine Objekte (Pflanzenteile, Insektenteile und dergl.) wird d gewöhnlich der normalen Leseweite für mittlere Druckschrift, nämlich 30 cm, gleichgesetzt. Diese Entfernung wird häufig die „deutliche Sehweite“ genannt; es bedeutet jedoch in der physiologischen Optik dieser Ausdruck eigentlich die Differenz $r - p$, d. h. den Abstand zwischen dem punctum remotissimum und dem punctum proximum oder das Gebiet, in welchem durch Accomodationsthätigkeit die Entstehung scharfer Netzhautbilder möglich ist.

Um die Wirkung eines Opernglases zu erklären und namentlich die durch dieselbe erzielte Vergröfserung abzuleiten, mufs man von der Stellung der konkaven Okularlinse ausgehen, bei welcher die zuletzt austretenden Strahlenbündel parallele Strahlen enthalten. Ist das Opernglas auf einen in der Entfernung a vom Beobachter befindlichen Gegenstand AB gerichtet, und wird das durch die Objektivlinse erzeugte objektive Bild mit A_1B_1, das im bewaffneten Auge

erzeugte Netzhautbild wieder mit $\alpha_1\beta_1$ bezeichnet, so folgt aus der ohne weiteres erkennbaren Ähnlichkeit der in Frage kommenden Dreiecke:

$$\frac{AB}{a} = \frac{\alpha\beta}{r}, \text{ ferner } \frac{AB}{a} = \frac{A_1B_1}{F} \text{ und } \frac{A_1B_1}{f} = \frac{\alpha_1\beta_1}{r},$$

wenn die Hauptbrennweite der Objektivlinse mit F und die der Okularlinse mit f bezeichnet wird. Aus diesen Gleichungen folgt ohne weiteres, dafs die Vergröfserung $\frac{\alpha_1\beta_1}{\alpha\beta} = \frac{F}{f}$ ist.

Werden diesen einfachen Betrachtungen Zeichnungen zu Grunde gelegt, welche in vergröfsertem Mafsstab aber in richtigem Gröfsenverhältnis ausgeführt sind, und in welchen der Verlauf der den Punkten A und B entsprechenden Strahlenbündel bis zu den entsprechenden Netzhautpunkten α und β bezw. α_1 und β_1 genau verfolgt werden kann, so gewinnt die Darstellung des Sehvorganges im bewaffneten Auge, sowohl für die Lupe, als auch für jede Form des Fernrohrs oder des Mikroskops eine grofse Einfachheit.

Möchte diese kurze Mitteilung dazu beitragen, den weitverbreiteten Irrtum hinsichtlich der psychologischen Bedeutung der virtuellen Bilder beim Sehen mit bewaffnetem Auge gänzlich zu beseitigen.

Analytische Darstellung einer differentiierbaren Funktion mit Oscillationen in jedem Intervalle.

(Von Alfred Köpcke in Ottensen.)

In zwei Abhandlungen, Math. Ann. Bd. XXIX, S. 123—140 und Bd. XXXIV, S. 161—171, mit dem Nachtrage Bd. XXXV, S. 104—109, habe ich nachgewiesen, dafs man in der Koordinatenebene eine Reihe von gebrochenen oder stetig gekrümmten Linien zeichnen kann, die sich einer bestimmten Grenzlinie nähern, welche in jedem Intervalle Maxima und Minima bildet und dennoch als Funktion betrachtet überall einen Differentialquotienten besitzt; dieser Differentialquotient ist für den Fall der zweiten Abhandlung, dafs alle Linien stetig gekrümmt sind, auch für die Grenzlinie überall vor- und rückwärts genommen, gleich. Es kann noch die Frage aufgeworfen werden, ob eine Funktion mit den Eigenschaften dieser Grenzlinie auch analytisch darstellbar ist, d. h. ob sich eine Formel aufstellen läfst, nach deren Vorschriften zu jeder Abscisse die zugehörige Ordinate mit beliebig gewünschter Genauigkeit berechnet werden kann. Diese Frage kann allerdings sehr einfach damit be-

antwortet werden, dafs die in den erwähnten Abhandlungen definierten Funktionen $\mathfrak{G}_n(x)$ und $\mathfrak{H}_n(x)$ durch Fouriersche Reihen, die Funktionen $\mathfrak{G}(x)$ und $\mathfrak{H}(x)$ also durch unendliche Reihen Fourierscher Reihen darstellbar sein müssen. Jene Funktionen haben aber einen derartig zusammengesetzten Bau, dafs an ein Hinschreiben der darstellenden trigonometrischen Reihen nicht zu denken ist. Darum sollen im folgenden die Funktionen $\mathfrak{H}_n(x)$ und $\mathfrak{H}(x)$ in einer soweit abgeänderten Weise erklärt werden, dafs sie durch Sinus-Reihen darstellbar sind, deren Koefficienten sich wirklich berechnen lassen.

Zu diesem Zwecke müssen wir mehrfach Funktionen in eine Kosinus-Reihe entwickeln, welche von 0 gegen $\frac{1}{2}$ ebenso gebaut sind, wie von 1 gegen $\frac{1}{2}$, nur dafs das Vorzeichen in den beiden Intervallen verschieden ist; es gilt also für alle $x < \frac{1}{2}$ die Beziehung $f(x) = -f(1-x)$; dabei sind alle diese Funktionen streckenweis geradlinig, also von der Form $ax + b$; gilt diese Form für ein Intervall von x_1 bis x_2 zwischen 0 und $\frac{1}{2}$, so gilt für das symmetrisch zwischen $\frac{1}{2}$ und 1 gelegene Intervall von x_3 bis x_4 der Ausdruck $-a(1-x) - b = ax - (a+b)$. Die Koefficienten der gesuchten Kosinus-Reihe bestehen aus Teilen von der Form

$$2\int (ax+b)\cos mx\pi dx = 2a\int x\cos mx\pi dx + 2b\int \cos mx\pi dx$$
$$= 2\,\frac{(ax+b)\sin mx\pi}{m\pi} + 2a\,\frac{\cos mx\pi}{m^2\pi^2} + c.$$

Die Integrale sind über das Intervall von x_1 bis x_2 zu nehmen. Für das symmetrisch gelegene Intervall von $x_3 = 1 - x_2$ bis $x_4 = 1 - x_1$ ist $2\int (a_1x + b_1)\cos mx\pi dx$ zu bilden; es gelten dafür die Beziehungen:

$$a_1 = a \qquad b_1 = -(a+b),$$
$$a_1x_4 + b_1 = -(ax_1 + b) \quad a_1x_3 + b_1 = -(ax_2 + b),$$
$$\cos mx_{3,4}\pi = (-1)^m \cos mx_{2,1}\pi,$$
$$\sin mx_{3,4}\pi = (-1)^{m+1} \sin mx_{2,1}\pi.$$

Daher gilt:

$$\left[\frac{(a_1x+b_1)\sin mx\pi}{m\pi}\right]_{x_3}^{x_4} = (-1)^{m+1}\left[\frac{(ax+b)\sin mx\pi}{m\pi}\right]_{x_1}^{x_2},$$
$$\frac{a_1}{m^2\pi^2}\left[\cos mx\pi\right]_{x_3}^{x_4} = (-1)^{m+1}\,\frac{a}{m^2\pi^2}\left[\cos mx\pi\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Für ungerade m folgt:

$$\text{I.}\qquad 2\int_{x_1}^{x_2}(ax+b)\cos mx\pi\,dx + 2\int_{x_3}^{x_4}(a_1x+b_1)\cos mx\pi\,dx$$
$$= 4\left[\frac{(ax+b)\sin mx\pi}{m\pi}\right]_{x_1}^{x_2} + 4\,\frac{a}{m^2\pi^2}\left[\cos mx\pi\right]_{x_1}^{x_2}.$$

Für gerade m dagegen verschwindet die linke Seite dieser Gleichung. In Funktionen der geschilderten Art bleiben demnach nur die Kosinus ungerader Vielfacher von $x\pi$ übrig, und die Gröfse m soll in allem Folgenden eine ungerade Zahl bedeuten; der Koefficient von $\cos mx\pi$ ist eine Summe von Gliedern, welche die Form der rechten Seite von I. haben.

Die Funktionen, welche wir entwickeln werden, sind sämtlich stetig und verschwinden sowohl für $x = 0$, wie für $x = \frac{1}{2}$. Infolgedessen ist die Summe der ersten Glieder auf der rechten Seite der Formel I. Null; darum besteht der Koefficient von $\cos mx\pi$ nur aus einer Summe von Gliedern der Form $4\,\frac{a}{m^2\pi^2}\left[\cos mx\pi\right]_{x_1}^{x_2}$.

Die zu behandelnden Funktionen besitzen weiter die Eigenschaft, dafs für fast jede geradlinige Strecke von x_1 bis x_2 $(x_1 < x_2)$ sich eine Gröfse γ so bestimmen läfst, dafs in einem andern gleich grofsen Intervalle x_2' bis x_1' $(x_2' < x_1')$, welches mit dem ersten zu $x = \gamma$ symmetrisch liegt, die Beziehung gilt $f(x) = f(2\gamma - x)$. Für diese zwei geradlinigen Intervalle gilt $a_1 = -a$, wenn die Funktion von x_1 bis x_2 die Werte $ax + b$, von x_2' bis x_1' aber die Werte $a_1x + b_1$ besitzt. Wenn wir dann noch schreiben $\frac{x_1 + x_2}{2} = \alpha$ und $\frac{x_2' + x_1'}{2} = \beta$, so dafs $\frac{\alpha + \beta}{2} = \gamma$ wird, folgt:

$$a\left[\cos mx\pi\right]_{x_1}^{x_2} + a_1\left[\cos mx\pi\right]_{x_2'}^{x_1'}$$
$$= 4a\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\,m\pi\cos\gamma m\pi\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\,m\pi.$$

Die Koefficienten unserer Entwickelungen sind daher Summen von Gliedern der Form:

$$\text{II.}\qquad \frac{16a}{m^2\pi^2}\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\,m\pi\cos\gamma m\pi\sin\frac{\beta - \alpha}{2}\,m\pi.$$

Wenn in den gegen γ symmetrisch gelegenen Intervallen von x_1 bis x_2 und von x_2' bis x_1' die Beziehung $f(x) = f(2\gamma - x)$ nicht gilt, tritt für jedes Intervall einzeln ein Summand auf von der Form:

$$\text{III.}\qquad -\frac{8a}{m^2\pi^2}\sin\frac{x_2 + x_1}{2}\,m\pi\sin\frac{x_2 - x_1}{2}\,m\pi.$$

Die erste Funktion, welche wir entwickeln, soll zwischen $x = 0$ und $x = \frac{1}{4}$ von 0 bis 1 in gerader Linie wachsen, dann zwischen $x = \frac{1}{4}$ und $x = \frac{3}{4}$ in gerader Linie von $+1$ bis -1 abnehmen, endlich zwischen $x = \frac{3}{4}$ und $x = 1$ von -1 geradlinig wieder zu 0 ansteigen. Es ist nur für zwei Intervalle, von 0 bis $\frac{1}{4}$ mit $a = +4$ und von $\frac{1}{4}$ bis $\frac{1}{2}$ mit $a = -4$, der Ausdruck III. zu bilden; man erhält so für die Funktion, welche wir mit $\frac{d\mathfrak{H}_0(x)}{dx}$ bezeichnen wollen, die Reihe:

$$\frac{d\mathfrak{H}_0(x)}{dx} = \frac{16}{\pi^2}\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{1^2}\cos x\pi - \frac{\sqrt{2}+1}{3^2}\cos 3x\pi - \frac{\sqrt{2}+1}{5^2}\cos 5x\pi + \frac{\sqrt{2}-1}{7^2}\cos 7x\pi + \frac{\sqrt{2}-1}{9^2}\cos 9x\pi - \cdots\cdots\right\}.$$

Da die Modulreihe dieser Reihe konvergent ist, kann die Reihe gliederweise integriert werden, so dafs wir haben:

$$\mathfrak{H}_0(x) = \frac{16}{\pi^3}\left\{\frac{\sqrt{2}-1}{1^3}\sin x\pi - \frac{\sqrt{2}+1}{3^3}\sin 3x\pi - \cdots\cdots\right\}.$$

Diese Funktion $\mathfrak{H}_0(x)$, bei deren Bildung wir die Integrationskonstante $= 0$ gesetzt haben, besteht aus drei Parabelbögen, verschwindet in $x = 0$ und $x = 1$ und besitzt in $x = \frac{1}{2}$ ein Maximum.

Die nächste Funktion, welche wir mit $h_1'(x)$ bezeichnen, soll, wie alle übrigen, aus geraden Linien bestehen, welche Punkte mit den Abscissen ξ_1^s und Ordinaten η_1^s verbinden: diese Eckpunkte aber seien folgende:

$$\begin{cases} \xi_1^0 = 0 & \xi_1^1 = \frac{3}{32} & \xi_1^2 = \frac{3}{16} & \xi_1^3 = \frac{7}{32} & \xi_1^4 = \frac{15}{64} \\ \eta_1^0 = 0 & \eta_1^1 = \frac{\eta}{10} & \eta_1^2 = 0 & \eta_1^3 = -\frac{2}{10} & \eta_1^4 = -\frac{4}{10} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \xi_1^5 = \frac{31}{128} & \xi_1^6 = \frac{63}{256} & \xi_1^7 = \frac{1}{4} \\ \eta_1^5 = -\frac{6}{10} & \eta_1^6 = -\left(1 - \frac{\alpha}{256}\right) & \eta_1^7 = -\left(1 + \frac{1}{10}\right), \end{cases}$$

ferner sollen die Beziehungen $h_1'\left(\frac{1}{2} - x\right) = h_1'(x)$ für $0 < x < \frac{1}{4}$ und $h_1'(1 - x) = -h_1'(x)$ für $0 < x < \frac{1}{2}$ gelten, wodurch weitere Ecken $\xi_1^8\eta_1^8$, $\xi_1^9\eta_1^9$, ... entstehen.

Die Gröfse α soll so gewählt werden, dafs $\eta_1^6 = -\mathfrak{H}_0'(\xi_1^6)$ wird; dies ergiebt $\alpha = 4$; zugleich ist dann auch $\eta_1^8 = -\mathfrak{H}_0'(\xi_1^8)$.

Die Gröfse η soll so gewählt werden, dafs $h_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$ ist; dafür mufs der positive Inhalt des Dreiecks über $x = 0$ bis ξ_1^2 numerisch

gleich dem negativen Inhalt des Polygons unter $x = \xi_1^2$ bis $\frac{1}{4}$ sein, dies ergiebt:

$$\eta = \frac{97}{48} - \frac{10}{48.32} = \frac{1547}{48.16}.$$

Beiläufig sei bemerkt, daſs $\eta < 3$, ja $< 2\frac{1}{16}$.

Für die Entwickelung von $h_1'(x)$ gilt Formel II., u. z. ist in ihr $\gamma = \frac{1}{4}$ zu setzen. Die Gröſse a hat der Reihe nach die Werte:

$$\frac{1547}{48.15}, -\frac{1547}{48.15}, -\frac{32}{5}, -\frac{64}{5}, -\frac{128}{5}, -\frac{492}{5}, -\frac{148}{5}.$$

Bezeichnen wir in der gesuchten Reihe den Koefficienten von $\cos mx\pi$ mit $\frac{16}{m^2\pi^2} \cdot \frac{1}{10} \cdot \cos\frac{m\pi}{4} \cdot K_1^m$, so folgt:

$$K_1^m = \frac{1547}{72} \sin\frac{3m\pi}{64}\left(\sin\frac{13m\pi}{64} - \sin\frac{7m\pi}{64}\right)$$
$$- \sum_{s=6}^{s=8} 2^s \sin\frac{m\pi}{2^s} \sin\frac{3m\pi}{2^s}$$
$$- 984 \sin\frac{m\pi}{512} \sin\frac{3m\pi}{512} - 296 \sin\frac{m\pi}{512} \sin\frac{m\pi}{512},$$

$$h_1'(x) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2} \cdot \frac{1}{10}\left\{\frac{K_1^1}{1^2}\cos x\pi - \frac{K_1^3}{3^2}\cos 3x\pi - \frac{K_1^5}{5^2}\cos 5x\pi + \cdots\right\}$$

$$h_1(x) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3} \cdot \frac{1}{10}\left\{\frac{K_1^1}{1^3}\sin x\pi - \frac{K_1^3}{3^3}\sin 3x\pi - \frac{K_1^5}{5^3}\sin 5x\pi + \cdots\right\}.$$

Weil keine Integrationskonstante hinzugefügt ist, verschwindet $h_1(x)$ in $x = 0$ und in $x = 1$. Auſserdem ist $h_1\left(\frac{1}{4}\right) = 0$, $h_1\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ und $h_1\left(\frac{3}{4}\right) = 0$ durch die Wahl der Gröſse η.

Die Summe $\mathfrak{H}_0'(x) + h_1'(x) = \mathfrak{H}_1'(x)$ bildet ein Polygon, das an denselben Abscissen ξ_1^s, wie $h_1'(x)$, Ecken besitzt. $\mathfrak{H}_1'(x)$ verschwindet für $x = 0$, ξ_1^6, ξ_1^8, $\frac{1}{2}$, $1 - \xi_1^8$, $1 - \xi_1^6$ und 1. Ferner ist $\mathfrak{H}_0'(\xi_1^5) = \frac{31}{32}$, $h_1'(\xi_1^5) = -\frac{6}{10}$, also $\mathfrak{H}_1'(\xi_1^5)$ positiv; dagegen ist $\mathfrak{H}_1'(\xi_1^7) = -\frac{1}{10}$, also negativ. Überhaupt ist $\mathfrak{H}_1'(x)$ von $x = 0$ bis ξ_1^6 positiv, von $x = \xi_1^6$ bis ξ_1^8 negativ u. s. w. Die aus lauter Parabelbögen bestehende Funktion $\mathfrak{H}_1(x) = \mathfrak{H}_0(x) + h_1(x)$ besitzt darum in ξ_1^6 ein Maximum, in ξ_1^8 ein Minimum, in $\frac{1}{2}$ ein Maximum, in $1 - \xi_1^8$ ein Minimum, endlich in $1 - \xi_1^6$ ein Maximum.

Es sollen nun durch Addition anderer Funktionen immer mehr Maxima und Minima eingeschaltet werden. Dafür definieren wir die Hilfsfunktionen $u_n(x)$ als Integrale von Funktionen $u_n'(x)$; ein solches $u_n'(x)$ stelle ein Polygon vor, dessen Ecken $\xi_n^s \eta_n^s$ die folgenden seien:

$$\begin{cases} \xi_n^0 = 0 & \xi_n^1 = \frac{3}{32} & \xi_n^2 = \frac{3}{16} & \xi_n^3 = \frac{2^3-1}{2^5} & \xi_n^4 = \frac{2^4-1}{2^5} \\ \eta_n^0 = 0 & \eta_n^1 = \frac{\eta_n}{10^n} & \eta_n^2 = 0 & \eta_n^3 = -\frac{2}{10^n} & \eta_n^4 = -\frac{4}{10^n} \end{cases}$$

— — — — — — — — — — —

$$\begin{cases} \xi_n^{\frac{10^n}{2}} = \dfrac{2^{\frac{10^n}{2}}-1}{2^{\frac{10^n}{2}+2}} & \xi_n^{\frac{10^n}{2}+1} = \dfrac{2^{\frac{10^n}{2}+1}-1}{2^{\frac{10^n}{2}+3}} & \xi_n^{\frac{10^n}{2}+2} = \frac{1}{4} \\ \eta_n^{\frac{10^n}{2}} = -\left(1-\frac{4}{10^n}\right) & \eta_n^{\frac{10^n}{2}+1} = -\left(1-\dfrac{\alpha}{2^{\frac{10^n}{2}+3}}\right) & \eta_n^{\frac{10^n}{2}+2} = -\left(1+\frac{1}{10^n}\right) \end{cases}$$

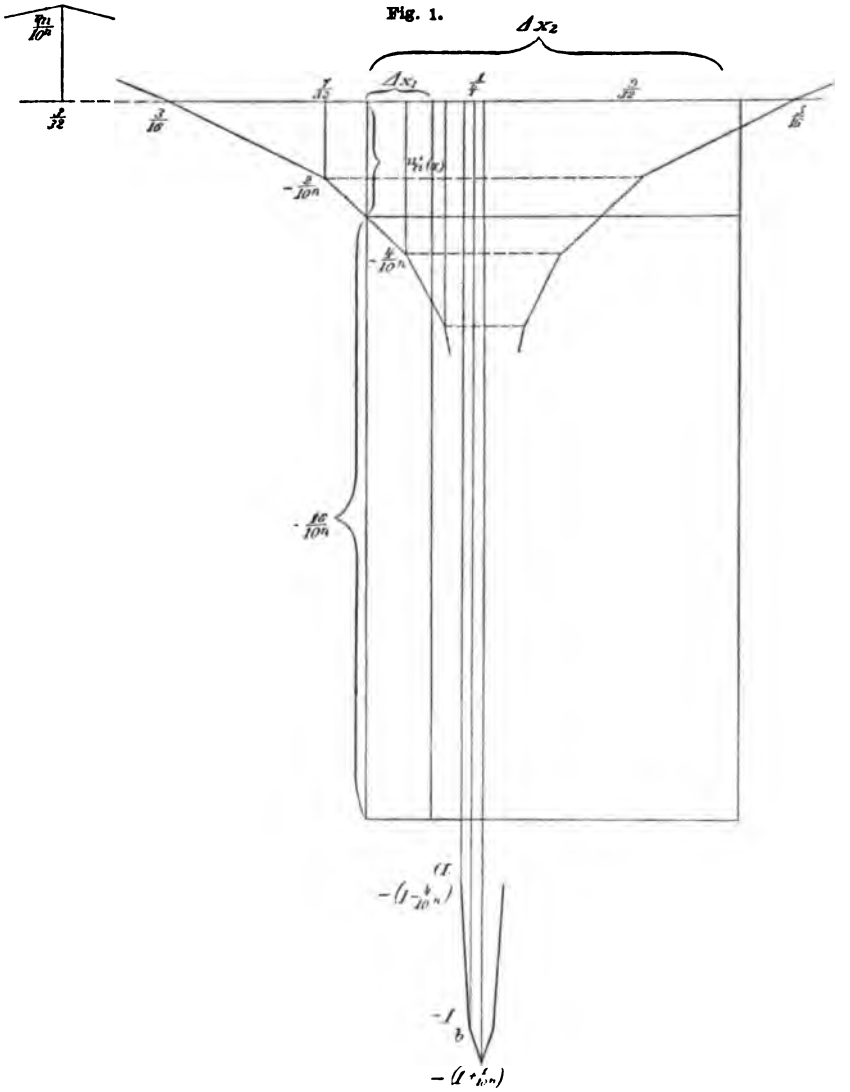
$$\begin{cases} \xi_n^{\frac{10^n}{2}+3} = \frac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+3}} & \xi_n^{\frac{10^n}{2}+4} = \frac{1}{4} + \dfrac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+2}} \\ \eta_n^{\frac{10^n}{2}+3} = -\left(1+\dfrac{\alpha}{2^{\frac{10^n}{2}+3}}\right) & \eta_n^{\frac{10^n}{2}+4} = -\left(1-\frac{4}{10^n}\right), \end{cases}$$

ferner sollen die Beziehungen $u_n'\left(\frac{1}{2}-x\right) = u_n'(x)$ für $0 \leqq x \leqq \xi_n^{\frac{10^n}{2}}$ und $u_n'(1-x) = -u_n'(x)$ für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ gelten. Der Gang der Funktion $u_n'(x)$ für $0 \leqq x \leqq \frac{1}{4}$ ist in Fig. 1 dargestellt, aber mit der Abweichung, dafs die Gröfse $\alpha = 0$ gewählt ist, also $\eta_n^{\frac{10^n}{2}+1} = -1 = \eta_n^{\frac{10^n}{2}+3}$. Es ist wesentlich, dafs hierdurch der Flächeninhalt der aus negativen Ordinaten gebildeten Zunge zwischen $x = \frac{3}{16}$ und $x = \frac{5}{16}$ nicht geändert wird; dieser Flächeninhalt ist bei den obigen Festsetzungen stets derselbe, welchen Wert auch α besitzt; es wird dies deutlich auf Fig. 2, in welcher vier Dreiecke mit der Grundlinie $\dfrac{\alpha}{2^{\frac{10^n}{2}+3}}$ und der Höhe $\dfrac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+3}}$ schraffiert sind; ist $\alpha = 0$, so ist die in Fig. 2 gezeichnete Spitze der Zunge symmetrisch gebaut; ist α nicht Null, so fällt auf einer Seite (auf der linken, wenn α, wie in der Figur, positiv ist) ein Dreieckspaar fort, auf der andern Seite kommt es aber wieder hinzu (anders, als in $h_1'(x)$, wo beiderseits etwas fortfällt und die Spitze symmetrisch bleibt).

Die Gröfse η_n kann hiernach ohne Rücksicht auf den Wert des α so bestimmt werden, dafs $u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{\frac{1}{2}} u_n'(x)dx = 0$; dafür müssen

die beiden Dreiecke mit der Höhe $\frac{\eta_n}{10^n}$ über den Grundlinien 0 bis $\frac{3}{16}$ und $\frac{5}{16}$ bis $\frac{8}{16}$ zusammen denselben Flächeninhalt positiv besitzen,

Fig. 1.



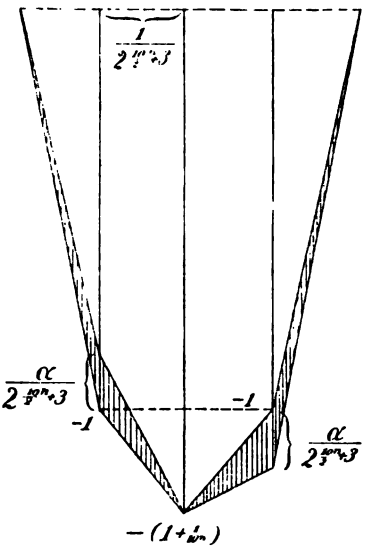
wie die ganze negative Zunge unterhalb der Abscissenstrecke von $\frac{3}{16}$ bis $\frac{5}{16}$. Dies ergiebt den Wert

$$\eta_n = 2 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2^{\frac{10^n}{2}} - 1};$$

beiläufig bemerkt, ist also $\eta_n < 3$.

Die Gröfse α soll so bestimmt werden, dafs $u_n'(x)$, zu einer nktion $v_n'(x)$ addiert, welche von 0 bis $\frac{1}{2}$ die Werte $v + 4(1-v)x$, ı $\frac{1}{2}$ bis 1 aber die Werte $-\left[2 - v - 4(1-v)\left(x - \frac{1}{2}\right)\right]$ besitzt, den Abscissen $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}$ und $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$, vie in $1 - \xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$ und $1 - \xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}$ ·schwindet, wobei v eine beliebige ;itive Gröfse ≤ 2 bedeuten soll. Da- ergiebt sich $\alpha = 4(1-v)$. (In (x) war die Spitze der Fig. 2 darum nmetrisch, weil $\mathfrak{H}_0'(x)$ bereits von $= \frac{1}{4}$ an sank, während $v_n'(x)$ bis $= \frac{1}{2}$ steigen soll und in $x = \frac{1}{2}$ un- tig wird, wenn nicht $v = 2$ ist.)

Fig. 2.



Für die Entwickelung von $u_n'(x)$ t in den meisten Intervallen die rmel II., in welcher $\gamma = \frac{1}{4}$ ist; nur vier Intervalle, welche die in Fig. 2 :eichnete unsymmetrische Spitze bil- ı, müssen nach dem Ausdruck III. einzeln behandelt werden. Die wendung beider Ausdrücke liefert folgende Resultate:

$$K_n^m = \frac{3.2^{\frac{10^n}{2}}+1}{9.2^{\frac{10^n}{2}}-1} \cdot 2^5 \sin\frac{3m\pi}{64}\left(\sin\frac{13m\pi}{64} - \sin\frac{7m\pi}{64}\right)$$

$$- \sum_{s=6}^{s=\frac{10^n}{2}+3} 2^s \sin\frac{m\pi}{2^s}\sin\frac{3m\pi}{2^s}$$

$$- (-1)^{\frac{m-1}{2}}\alpha \sin\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}}+4}\left(\cos\frac{3m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}}+4} - \cos\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}}+4}\right)$$

$$- 2^{\frac{10^n}{2}+3}\sin\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}}+4}\left(4\sin\frac{3m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}}+4} + \sin\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}}+4}\right).$$

Die Potenz $(-1)^{\frac{m-1}{2}}$ gelangt in den Ausdruck, weil die Glie- ', welche α enthalten, mit $\sin\frac{m\pi}{4}$ multipliziert werden sollen, während

alle übrigen Glieder mit $\cos\frac{m\pi}{4}$ zu multiplizieren sind; es ist aber $\sin\frac{m\pi}{4} = (-1)^{\frac{m-1}{2}}\cos\frac{m\pi}{4}$, wenn m, wie immer, ungerade ist. Die Reihe hat dann die Form

$$u_n'(x) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^2}\cdot\frac{1}{10^n}\left\{\frac{K_n^1}{1^2}\cos x\pi - \frac{K_n^3}{3^2}\cos 3x\pi - \frac{K_n^5}{5^2}\cos 5x\pi + \cdots\cdots\right\},$$

K_n^m kann für kein m einen gewissen endlichen, wenn auch mit der Zahl n sehr grofs werdenden Wert überschreiten, es ist z. B. für alle m kleiner als $3.2^{\frac{10^n}{2}+6}$; die Modulreihe der Reihe für $u_n'(x)$ konvergiert daher und durch gliederweise Integration ergiebt sich:

$$u_n(x) = \frac{8\sqrt{2}}{\pi^3}\cdot\frac{1}{10^n}\left\{\frac{K_n^1}{1^3}\sin x\pi - \frac{K_n^3}{3^3}\sin 3x\pi - \cdots\cdots\right\}.$$

Diese Funktion $u_n(x)$ verschwindet für $x = 0$, weil keine Integrationskonstante hinzugefügt ist, und für $x = \frac{1}{2}$, weil die Gröfse η_n so bestimmt ist, dafs $\int_0^{\frac{1}{2}} u_n'(x)dx = 0$ (abweichend von $h_1(x)$ verschwindet $u_n(x)$ in $x = \frac{1}{4}$ nicht).

Die Funktionen $u_n'(x)$, $u_n(x)$, $v_n'(x)$ und $v_n(x)$ und ihre Summen besitzen eine Reihe von Eigenschaften, von denen wir später Gebrauch machen werden, und die wir daher übersichtlich unter I.—IV. zusammenstellen wollen.

I. Die Summe $v_n'(x) + u_n'(x)$ beginnt in $x = 0$ mit dem positiven Werte v, steigt oder fällt dann mit der Steigung oder Neigung $4(1-v) + \frac{32\eta_n}{3\cdot 10^n}$ bis zur ersten Ecke, von dort beträgt die Steigung nur $4(1-v) - \frac{32\eta_n}{3\cdot 10^n}$ bis zur zweiten Ecke, dann $4(1-v) - \frac{32}{10^n}$ bis zur dritten Ecke, $4(1-v) - \frac{64}{10^n}$ bis zur vierten Ecke, u. s. w. immer weniger, bis sie $4(1-v) - \frac{2^{\frac{10^n}{2}+5}}{10^n} + \alpha$ beträgt; $\alpha = 4(1-v)$, daher ist diese letzte Gröfse für jedes positive v jedenfalls negativ, und mit dieser Neigung sinkt bei $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}$ die Summe $v_n'(x) + u_n'(x)$ auf Null. Diese Summe ist daher bis zu diesem Argumentwerte positiv, von dort bis $x = \frac{1}{4}$ sinkt sie auf $-\frac{1}{10^n}$ und steigt dann

wieder, bis sie in $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$ Null wird; dann wird sie wieder positiv und erreicht in $x = \frac{1}{2}$ den Wert $2 - v$.

Hieraus ergiebt sich, dafs das Integral der Summe, nämlich $v_n(x) + u_n(x)$, in $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}$ ein Maximum, in $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$ ein Minimum besitzt.

II. Es ist leicht, die Werte von $u_n(x)$ für die Abscissen 0, $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}$, $\frac{1}{4}$, $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$, $\frac{1}{2}$ zu berechnen. Man erhält:

$$u_n(0) = 0$$

$$u_n\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+3}}\right) = \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 10^n}\right) \cdot \frac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+3}} + \frac{\frac{1}{2}\alpha}{2^{10^n+6}} < \frac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+1}}$$

$$u_n\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{\alpha}{2^{10^n+6}}$$

$$u_n\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+3}}\right) = -\left(1 + \frac{1}{2 \cdot 10^n}\right) \cdot \frac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+3}} + \frac{\frac{1}{2}\alpha}{2^{10^n+6}} > -\frac{1}{2^{\frac{10^n}{2}+1}}$$

$$u_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

Für die Werte von $v_n(x)$ erhält man, ausgehend von $v_n(0)$:

$$v_n\left(\xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}\right) < v_n(0) + \frac{v+1}{8}$$

$$v_n\left(\frac{1}{4}\right) = v_n(0) + \frac{v+1}{8}$$

$$v_n\left(\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}\right) > v_n(0) + \frac{v+1}{8}$$

$$v_n\left(\frac{1}{2}\right) = v_n(0) + \frac{1}{2}$$

Daher folgt für die Summe beider Funktionen:

$$(v_n + u_n)_{\xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}} < (v_n + u_n)_{\frac{1}{2}}$$

$$(v_n + u_n)_{\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}} > (v_n + u_n)_0$$

d. h. das Maximum bei $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}$ ist kleiner, als der Wert für $x = \frac{1}{2}$, das Minimum bei $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$ ist gröfser, als der Wert für $x = 0$.

III. Der gröfste Wert, den $u_n(x)$ erreicht, ist $\frac{\eta_n}{10^n} \cdot \frac{3}{32}$ in $x = \frac{3}{16}$, der kleinste $-\frac{\eta_n}{10^n} \cdot \frac{3}{32}$ in $x = \frac{5}{16}$. Bis $x = \frac{3}{16}$ ist u_n positiv und $< \frac{\eta_n}{10^n} \cdot x$.

Zwischen $x = \frac{3}{16}$ und $\frac{5}{16}$ wird u_n negativ (spätestens zwischen $\frac{1}{4}$ und $\xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$, nämlich bei positivem α), aber ist numerisch höchstens gleich $\frac{\eta_n}{10^n} \cdot \frac{3}{32} < \frac{\eta_n}{10^n} \cdot x$.

Von $x = \frac{5}{16}$ an wird u_n wieder numerisch kleiner als

$$\frac{\eta_n}{10^n} \cdot \frac{3}{32} < \frac{\eta_n}{10^n} \cdot x.$$

Ebenso ist $u_n\left(\frac{1}{2} - x\right)$ anfangs positiv $< \frac{\eta_n}{10^n} \cdot x$, dann negativ, aber numerisch höchstens $\frac{\eta_n}{10^n} \cdot \frac{3}{32} < \frac{\eta_n}{10^n} \cdot x$. Wir bemerken daher die Ungleichheiten:

$$\left| u_n(x) \right| < \frac{\eta_n}{10^n} \cdot x \qquad \left| u_n\left(\tfrac{1}{2} - x\right) \right| < \frac{\eta_n}{10^n} \cdot x$$

IV. Wenn man in der Figur für $u_n'(x)$ eine Abscisse x und eine zweite gröfsere $x + \Delta x$ beliebig wählt und dann in beiden Punkten die Ordinaten zeichnet, so entsteht zwischen diesen Ordinaten und der Abscissenachse der Flächenraum $u_n(x + \Delta x) - u_n(x) = \Delta u_n(x)$; ob er nur aus positiven, nur aus negativen Teilen, oder aus Teilen mit verschiedenem Vorzeichen besteht, hängt von der Wahl der Gröfsen x und Δx ab. Errichtet man aber über Δx ein Rechteck mit der Höhe $\frac{\eta_n}{10^n}$, so schliefst dieses in allen Fällen sämtliche positiven Teile von $\Delta u_n(x)$ ein; daher gilt

(a) $$\Delta u_n(x) < \frac{\eta_n}{10^n} \cdot \Delta x$$

Nun beachte man, dafs der Inhalt der ganzen ins Negative sich erstreckenden Zunge der Figur numerisch $2 \cdot \frac{\eta_n}{10^n} \cdot \frac{3}{32}$ beträgt. Ist $x = \frac{3}{16}$, $\Delta x = \frac{1}{16}$, so mufs ein Rechteck über Δx, welches numerisch den Inhalt der Zunge besitzen soll, die Höhe $\frac{3\eta_n}{10^n}$ haben. Da $\eta_n < 3$, ist also ein Rechteck mit der Höhe $\frac{9}{10^n}$ noch gröfser. Ist für das-

selbe $x = \frac{3}{16}$ der Zuwachs $\Delta x < \frac{1}{16}$, so fällt von der halben Zunge (die für $\Delta x = \frac{1}{16}$ den Zuwachs $\Delta u_n(x)$ bildete und numerisch nicht halb so groſs ist, wie das Rechteck), solange sie mit der Spitze über das Rechteck hinausragt, mehr fort, als von dem Rechteck; wenn schliefslich $\Delta u_n(x)$ ganz von dem Rechteck eingeschlossen wird, bleibt es auch bei weiterer Verkleinerung des Δx eingeschlossen. Wird andrerseits $\Delta x > \frac{1}{16}$, so wächst das Rechteck, welches schon mehr als die ganze Zunge betrug, noch weiter, während die Zunge erst in $\Delta x = \frac{2}{16}$ fertig ist; dort beträgt das Rechteck also mehr als das Doppelte der Zunge; über $x + \Delta x = \frac{5}{16}$ hinaus wird $\Delta u_n(x)$ numerisch kleiner, das Rechteck wird immer gröfser, also gilt für $x = \frac{3}{16}$ allgemein

$$\Delta u_n(x) > -\frac{9}{10^n} \cdot \Delta x$$

Ist $x = \frac{7}{32}$, so ist der Inhalt des Zungenteils unterhalb der durch die Ordinate $-\frac{2}{10^n}$ gelegten Parallelen zur x-Achse:

$$\frac{3\eta_n}{10^n} \cdot \frac{1}{16} - \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{10^n} = \frac{3(\eta_n - 1)}{16 \cdot 10^n},$$

also hat ein gleich groſses Rechteck mit der Basis $\frac{1}{32}$ (bis zur Ordinate in $x = \frac{1}{4}$ reichend) die Höhe $\frac{6(\eta_n - 1)}{10^n}$. Da $\eta_n < 3$, genügt die Höhe $\frac{12}{10^n}$.

Ebenso genügt unterhalb der Parallelen durch die Ordinate $-\frac{4}{10^n}$ die Höhe $\frac{12}{10^n}$; denn der von dieser Parallelen zur x-Achse abgeschnittene Teil der Zunge hat den Inhalt $\frac{6\left(\eta_n - 1\frac{1}{2}\right)}{32 \cdot 10^n}$, die genaue Höhe für die Basis $\frac{1}{64}$ ist also $\frac{12\left(\eta_n - 1\frac{1}{2}\right)}{10^n}$; da $\eta_n < 2\frac{1}{2}$, genügt $\frac{12}{10^n}$.

Beachtet man weiter $\eta_n < 2\frac{1}{4}$, $\eta_n < 2\frac{1}{8}$ u. s. w. bis $\eta_n < 2 + \frac{1}{\frac{10^n}{2^2} - 1}$, so findet man, dafs die Höhe $\frac{12}{10^n}$ immer für das Rechteck ausreicht (auch an der Ecke b der Figur, wo wegen der Abnahme um $\frac{4}{10^n}$ statt $\frac{2}{10^n}$ die Rechnung etwas anders ausfällt); falls x Abscisse irgend einer der Ecken ist, gilt also:

$$\Delta u_n(x) > \left[u_n'(x) - \frac{12}{10^n}\right] \cdot \Delta x$$

$x + \Delta x$ darf dabei gröfser als $\frac{1}{4}$ werden, weil schon bis an die Vertikallinie in $\frac{1}{4}$ das Rechteck den Inhalt des ganzen Zungenteils unterhalb des Rechtecks $u_n'(x) \cdot \Delta x$ übersteigt. Aus demselben Grunde gilt die Ungleichheit auch dann, wenn die Spitze der Zunge durch irgend einen von 0 verschiedenen Wert von x unsymmetrisch wird (wie Fig. 2.).

Gehört x nicht zu einer der Ecken, sondern zu einer Ordinate zwischen zwei Ecken, so genügt es meistens, zur Höhe des Rechtecks noch $\frac{2}{10^n}$ hinzuzufügen; nur zwischen a und b kann $\frac{4}{10^n}$ hinzukommen; auch für $x < \frac{3}{16}$ genügen diese $\frac{4}{10^n}$; jedenfalls gilt daher

$$\text{(b)} \qquad \Delta u_n(x) > \left[u_n'(x) - \frac{16}{10^n}\right] \cdot \Delta x \qquad x + \Delta x < \tfrac{1}{2}$$

Die Figur zeigt zwei Fälle für Δx_1 und Δx_2.

Hiermit sind wir über die Eigenschaften von $u_n'(x)$ und $u_n(x)$ genügend unterrichtet. Wir betrachten jetzt eine Funktion, die für die x Werte zwischen $\varkappa$ und $\varkappa + \beta$ $\left(0 < \varkappa < \varkappa + \beta < \frac{1}{2}\right)$ die Werte $2\beta \cdot u_n\left(\frac{x - \varkappa}{2\beta}\right)$, für x zwischen $1 - (\varkappa + \beta)$ und $1 - \varkappa$ die Werte $2\beta \cdot u_n\left(1 - \frac{1 - \varkappa - x}{2\beta}\right)$ besitzt, im übrigen aber verschwindet; d. h. die Funktion besteht aus den beiden im Mafsstabe 2β verkleinerten und getrennten Hälften der Funktion $u_n(x)$. Die Differentialkurve dieser Funktion ist im ersten Intervall durch die Funktion $u_n'\left(\frac{x - \varkappa}{2\beta}\right)$, im zweiten durch $u_n'\left(1 - \frac{1 - \varkappa - x}{2\beta}\right)$ erklärt, im übrigen Null. Für einen beliebigen Wert $x = x_1$ zwischen $\varkappa$ und $\varkappa + \beta$ gilt der Wert $u_n'\left(\frac{x_1 - \varkappa}{2\beta}\right)$, für den Wert $1 - x_1$, welcher im andern Intervall liegt, gilt der Wert $u_n'\left(1 - \frac{1 - \varkappa - (1 - x_1)}{2\beta}\right) = u_n'\left(1 - \frac{x_1 - \varkappa}{2\beta}\right)$; da nach den Eigenschaften von $u_n'(x)$ dieser letztere $= -u_n'\left(\frac{x_1 - \varkappa}{2\beta}\right)$, erfüllt diese Differentialkurve die Bedingung, welche für die Anwendung der Ausdrücke II. und III. erforderlich ist. Man erhält dann, wenn man den Koefficienten von $\cos mx\pi$ in der Form $\frac{16}{m^2\pi^2} \cdot \frac{1}{10^n} \cdot c_n^m$ schreibt, das Resultat:

$$c_n^m =$$

$$\frac{1}{2\beta}\cdot\cos\left(\varkappa+\tfrac{1}{2}\beta\right)m\pi\left\{\frac{3\cdot 2^{\frac{10^n}{2}}+1}{9\cdot 2^{\frac{10^n}{2}}-1}\cdot 2^5\sin\frac{3m\pi}{64}\cdot 2\beta\left(\sin\frac{13m\pi}{64}\cdot 2\beta-\sin\frac{7m\pi}{64}\cdot 2\beta\right)\right.$$

$$-\sum_{s=6}^{s=\frac{10^n}{2}+3} 2^s\sin\frac{m\pi}{2^s}\cdot 2\beta\sin\frac{3m\pi}{2^s}\cdot 2\beta$$

$$\left.-2^{\frac{10^n}{2}+3}\sin\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}+4}}\cdot 2\beta\left(4\sin\frac{3m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}+4}}\cdot 2\beta+\sin\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}+4}}\cdot 2\beta\right)\right\}$$

$$-\frac{\alpha}{2\beta}\cdot\sin\left(\varkappa+\tfrac{1}{2}\beta\right)m\pi\sin\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}+4}}\cdot 2\beta\left(\cos\frac{3m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}+4}}\cdot 2\beta-\cos\frac{m\pi}{2^{\frac{10^n}{2}+4}}\cdot 2\beta\right)$$

Diese Gröfse c_n^m ist noch eine Funktion von $\varkappa$, β und α und soll als solche c_n^m $(\varkappa, \beta, \alpha)$ geschrieben werden.

Ich denke mir jetzt die Strecke von 0 bis 1 in $2r$ gleiche Teile von der Gröfse $\frac{1}{2r} = \beta$ zerlegt; dann sei auf je zwei symmetrisch zu $x = \frac{1}{2}$ gelegene Teile, z. B. von $\frac{p-1}{2r}$ bis $\frac{p}{2r}$ und $\frac{2r-p}{2r}$ bis $\frac{2r-p+1}{2r}$ eine Funktion wie die vorige Differentialkurve aufgebaut, nachdem deren Werte mit einer Konstanten A_{n-1}^p multipliziert sind; auch sei in jeder dieser Funktionen der Wert α ein anderer: α_{n-1}^p; dann kann die so entstandene vollständige Funktion $h_n'(x)$ in eine Kosinus-Reihe entwickelt werden, deren Koefficienten die Form haben $\frac{16}{m^3\pi^3}\cdot\frac{1}{10^n}\cdot C_n^m$, worin

$$C_n^m = \sum_{p=1}^{p=r} A_{n-1}^p\cdot c_n^m\left(\frac{p-1}{2r},\ \frac{1}{2r},\ \alpha_{n-1}^p\right)$$

$$h_n'(x) = \frac{16}{\pi^3}\cdot\frac{1}{10^n}\left\{\frac{C_n^1}{1^3}\cos x\pi + \frac{C_n^3}{3^3}\cos 3x\pi + \cdots\cdots\right\}$$

$$h_n(x) = \frac{16}{\pi^3}\cdot\frac{1}{10^n}\left\{\frac{C_n^1}{1^3}\sin x\pi + \frac{C_n^3}{3^3}\sin 3x\pi + \cdots\cdots\right\}$$

$h_n'(x)$ ist in allen $x = \frac{p}{2r}$ Null; auch $h_n(x)$ ist in diesen Werten Null, denn $h_n(0) = 0$, da keine Integrationskonstante hinzugefügt ist, und sonst ist

$$\int_{\frac{p-1}{2r}}^{\frac{p}{2r}} h_n'(x)dx = c \cdot \int_0^{\frac{1}{2}} u_n'(x)dx = 0,$$

worin c ein Konstante bedeutet.

Addiert man $h_n'(x)$ zu einer Funktion $V_n'(x)$, welche zwischen $\varkappa$ und $\varkappa + \beta$ die Werte

$$A_{n-1}^p v_n'\left(\frac{x-\varkappa}{2\beta}\right) = A_{n-1}^p v_n'\left(rx - \frac{p-1}{2}\right)$$

besitzt, zwischen $1 - \varkappa - \beta$ und $1 - \varkappa$ aber nach der Formel $V_n'(1-x) = -V_n'(x)$ gebaut ist, so ergiebt sich aus den unter I. und II. angeführten Eigenschaften von v_n' und u_n' das Folgende. In $x = \frac{p-1}{2r} = \varkappa$ beginnt die Summe mit dem positiven (wenn $A_{n-1}^p > 0$ ist) Werte $A_{n-1}^p \cdot v$; in $x = \varkappa + \frac{1}{2}\beta$ hat sie den Wert $= -\frac{A_{n-1}^p}{10^n}$; in $x = \varkappa + \beta$ ist sie $A_{n-1}^p \cdot (2-v)$; wenn $\alpha_{n-1}^p = 4(1-v)$ gewählt ist, verschwindet sie in $x_1 = \varkappa + 2\beta \cdot \xi_n^{\frac{10^n}{2}+1}$ und in $x_2 = \varkappa + 2\beta \cdot \xi_n^{\frac{10^n}{2}+3}$. In dem symmetrisch gelegenen Intervall ist sowohl $h_n'(x)$ wie $V_n'(x)$ symmetrisch gebaut und dann negativ genommen; denselben Bau zeigt dort also die Summe beider Funktionen.

Das Integral dieser Summe lautet für das Intervall von $\frac{p-1}{2r}$ bis $\frac{p}{2r}$:

$$\frac{1}{r} A_{n-1}^p \left[v_n\left(rx - \frac{p-1}{2}\right) + u_n\left(rx - \frac{p-1}{2}\right)\right]$$

und besitzt, falls A_{n-1}^p positiv ist, in x_1 ein Maximum, in x_2 ein Minimum; ist A_{n-1}^p negativ, so tritt zuerst in x_1 ein Minimum, in x_2 das Maximum ein. In beiden Fällen liegen die Werte dieses Maximums und Minimums zwischen den Werten der Funktion in $\varkappa$ und $\varkappa + \beta$. Im symmetrisch gelegenen Intervalle tritt für ein positives A_{n-1}^p zuerst das Minimum, dann das Maximum ein, für ein negatives umgekehrt.

Sei nun $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ irgend ein Polygon, welches der Bedingung $\mathfrak{H}_{n-1}'(x) = -\mathfrak{H}_{n-1}'(1-x)$ für $x < \frac{1}{2}$ genügt; aufserdem mögen alle Abscissenwerte, in denen $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ eine Ecke bildet oder gleich Null ist (wenn in diesem Nullwert auch keine Ecke vorhanden ist),

die Form $\frac{p}{2r}$ haben; wählt man dann die Gröfsen A_{n-1}^{p} und v nach den Formeln:

$$\text{(A)} \qquad A_{n-1}^{p} = \frac{\mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p-1}{2r}\right) + \mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p}{2r}\right)}{2}$$

und

$$v \cdot A_{n-1}^{p} = \mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p-1}{2r}\right),$$

also

$$\text{(B)} \qquad v = \frac{2\mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p-1}{2r}\right)}{\mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p-1}{2r}\right) + \mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p}{2r}\right)}$$

und

$$\alpha_{n-1}^{p} = 4(1-v) = 4 \cdot \frac{\mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p}{2r}\right) - \mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p-1}{2r}\right)}{\mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p}{2r}\right) + \mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p-1}{2r}\right)},$$

so besitzt die Summe $\mathfrak{H}_n(x) = \mathfrak{H}_{n-1}(x) + h_n(x)$ in jedem Intervalle von der Gröfse $\frac{1}{2r}$ ein Maximum und ein Minimum, die aufserdem an Wert zwischen den Werten am Anfang und am Ende des betreffenden Intervalles liegen. In je zweien dieser Intervalle, die zu $x = \frac{1}{2}$ symmetrisch liegen, haben auch die Maxima und Minima gegen $x = \frac{1}{2}$ symmetrische Lage, so dafs $\mathfrak{H}_n(x)$ wieder ebenso symmetrisch gebaut ist, wie $\mathfrak{H}_{n-1}(x)$, und $\mathfrak{H}_n'(x)$ wieder der Bedingung $\mathfrak{H}_n'(x) = -\mathfrak{H}_n'(1-x)$ genügt.

Die Gröfsen v und α_{n-1}^{p} würden unendlich oder unbestimmt werden, wenn A_{n-1}^{p} jemals Null sein könnte. Machen wir aber die Voraussetzung, dafs $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ nur in einzelnen Punkten, nie in einer ganzen Strecke verschwindet, und dafs diese Punkte alle von der Form $x = \frac{p}{2r}$ sind, so kann von den Gröfsen $\mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p-1}{2r}\right)$ und $\mathfrak{H}_{n-1}'\left(\frac{p}{2r}\right)$ nur eine Null sein, und falls keine von ihnen verschwindet, müssen beide dasselbe Zeichen haben. Hieraus folgt zunächst, dafs $v \leqq 2$, wie es für die Funktion $v_n(x)$ verlangt war. Aufserdem aber folgt, dafs auch $\mathfrak{H}_n'(x)$ nur in einzelnen Punkten Null sein kann; denn in einem Intervalle von $\varkappa$ bis $\varkappa + \beta$ ist

$$\mathfrak{H}_n'(x) = A_{n-1}^{p}\left[v_n'\left(\frac{x-\varkappa}{2\beta}\right) + u_n'\left(\frac{x-\varkappa}{2\beta}\right)\right],$$

und die Gröfse in der Klammer kann nach der unter I. behandelten Eigenschaft nur in zwei Punkten, höchstens noch in $x = \varkappa$ (wenn

$v = 0$) oder $x = \varkappa + \beta$ (wenn $v = 2$) verschwinden; wählt man nun bei der Fortsetzung der Funktionenreihe das neue r zur Bildung von $\mathfrak{H}_{n+1}'(x)$ so grofs, dafs alle diese Nullpunkte von $\mathfrak{H}_n'(x)$ die Form $\frac{p}{2r}$ erhalten, so verschwindet auch $\mathfrak{H}_{n+1}'(x)$ nur in Punkten, u. s. w.

Wählt man zuerst $\mathfrak{H}_{n-1}'(x) = \mathfrak{H}_1'(x)$, so würde es genügen, $\frac{1}{2r} = \frac{1}{256}$ zu setzen, denn die Abscissen der Ecken und Nullwerte von $\mathfrak{H}_1'(x)$ sind dieselben wie diejenigen der Ecken und Nullwerte von $h_1'(x)$, und diese haben sämtlich die Form $\frac{p}{256}$. Soll aber die Funktion $\mathfrak{H}(x)$, welcher sich die $\mathfrak{H}_n(x)$ für $n = \infty$ nähern, differentiierbar sein, so ist es nötig die Teile $\frac{1}{2r}$ noch kleiner zu wählen, nämlich so klein, dafs $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ in jedem der Intervalle um weniger als $\frac{1}{10^{n-1}}$ im Werte schwankt. Die Polygone $\mathfrak{H}_1'(x)$ und alle folgenden $\mathfrak{H}_n'(x)$ haben, wie schon erwähnt wurde, die Eigenschaft, innerhalb der Intervalle $\frac{1}{2r}$ nie das Zeichen zu wechseln, wenn r grofs genug gewählt ist, so dafs alle Nullwerte von $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ die Form $\frac{p}{2r}$ haben. Infolgedessen hat jedes A_{n-1}^p mit allen Werten von $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ in dem Intervalle $\frac{p-1}{2r}$ bis $\frac{p}{2r}$, zu welchem es gehört, dasselbe Zeichen, denn es ist selbst einer dieser Werte. Nun ist:

$$\text{(c)} \qquad \mathfrak{H}_n'(x) = \mathfrak{H}_{n-1}'(x) + \frac{A_{n-1}^p \cdot \gamma_n}{10^n} \qquad \eta_n \geqq \gamma_n \geqq -(10^n + 1)$$

Dabei sind alle $\eta_n < 2\frac{1}{16} = \vartheta$. Wenn wir voraussetzen dürfen, dafs alle Werte der Funktion $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ numerisch kleiner sind als die Gröfse

$$\left(1 + \frac{\vartheta}{10}\right)\left(1 + \frac{\vartheta}{10^2}\right) \cdots \left(1 + \frac{\vartheta}{10^{n-1}}\right),$$

zeigt uns die Gleichung (c), dafs für positive γ_n sicher gilt:

$$\left|\mathfrak{H}_n'(x)\right| \leqq \left(1 + \frac{\vartheta}{10}\right) \cdots \left(1 + \frac{\vartheta}{10^n}\right),$$

für negative γ_n aber

entweder $\quad |\mathfrak{H}_n'(x)| < |\mathfrak{H}_{n-1}'(x)|$

oder $\quad \left|\mathfrak{H}_n'(x)\right| < \left|\frac{A_{n-1}^p \cdot \gamma_n}{10^n}\right| < \left(1 + \frac{\vartheta}{10}\right) \cdots \left(1 + \frac{\vartheta}{10^n}\right)$

Es sind daher bei jener Voraussetzung alle Werte der sämtlichen

$\mathfrak{H}_n'(x)$ numerisch kleiner als das unendliche Produkt $\prod_1^\infty\left(1+\frac{\vartheta}{10^n}\right)$.

Die Voraussetzung ist aber erfüllt, denn $|\mathfrak{H}_0'(x)| \leq 1$ und für $n=1$ gilt bereits die Gleichung c. Für das unendliche Produkt erhält man leicht die Beziehungen

$$\lg\prod_1^\infty\left(1+\frac{\vartheta}{10^n}\right)=\frac{\vartheta}{9}-\frac{\vartheta^2}{2}\cdot\frac{1}{99}+\frac{\vartheta^3}{3}\cdot\frac{1}{999}-\cdots<\frac{\vartheta}{9-\vartheta}=\frac{11}{37}<\lg 2,$$

also ist

$$\prod_1^\infty\left(1+\frac{\vartheta}{10^n}\right)<2$$

Die Gröfsen $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ sind also numerisch kleiner als 2; da sie in jedem Intervalle $\frac{1}{2r}$ das Zeichen nie wechseln, kann der Unterschied zwischen dem gröfsten und kleinsten Werte im Intervalle auch nur kleiner als 2 sein; da $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ in einem solchen Intervalle geradlinig verläuft, kann also, wenn dasselbe in 16^{n-1} gleiche Teile zerlegt wird, die Schwankung in jedem Teile nicht mehr

$$\frac{2}{16^{n-1}}=\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{16}\cdot\frac{1}{16^{n-3}}<\frac{1}{10^{n-1}}$$

betragen. Das kleinste Intervall in $\mathfrak{H}_1'(x)$ hiefs

$$\frac{1}{256}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{10}{2^2}+2},$$

daher mufs bei der Bildung von $h_2'(x)$ gesetzt werden (damit $\mathfrak{H}_1'(x)$ nur um $\frac{1}{10}$ schwankt):

$$\frac{1}{2r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{10}{2^2}+2}\cdot\frac{1}{16};$$

bei der Bildung von $h_3'(x)$ folgt dann (damit $\mathfrak{H}_2'(x)$ nur um $\frac{1}{10^2}$ schwankt):

$$\frac{1}{2r}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\frac{10}{2^2}+2}\cdot\frac{1}{2^4}\cdot\frac{1}{\frac{10^2}{2^2}+2}\cdot\frac{1}{2^8},$$

für $h_n'(x)$, damit $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ nur um $\frac{1}{10^{n-1}}$ schwankt:

$$\frac{1}{2r}=\frac{1}{2^{\nu_n}}\cdots\cdots\nu_n=2n^2-1+\tfrac{5}{9}(10^{n-1}-1).$$

Will man auf diesen Intervallen von der Kleinheit $\frac{1}{2^{\nu_n}}$ die Funktion $h_n'(x)$ aufbauen, so mufs man die Gröfsen A_{n-1}^p und dafür

die Gröfsen $\mathfrak{H}'_{n-1}\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$ berechnen; diese setzen sich wieder als Summen zusammen aus $\mathfrak{H}'_0\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$, $h_1'\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$, ... $h'_{n-1}\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$; alle diese Gröfsen könnte man durch bereits fertige Kosinus-Reihen berechnen, ihre Werte können aber auch durch eine endliche Anzahl von Rechnungen erhalten werden. Denn es ist für $\frac{p-1}{2^{\nu_n-1}} \leqq x \leqq \frac{p}{2^{\nu_n-1}}$:

$$(C) \quad h'_{n-1}(x) = A^p_{n-2} u'_{n-1}\left(2^{\nu_{n-1}-1} \cdot x - \frac{p-1}{2}\right) = A^p_{n-2} u'_{n-1}(\xi).$$

Die Werte $u'_{n-1}(\xi)$ sind aber leicht mit Hilfe der Werte a, welche bereits zur Bildung der Koefficienten K^m_{n-1} und c^m_{n-1} benutzt werden mufsten, zu berechnen. Wenn diese Werte der Reihe nach mit a^1_{n-1}, a^2_{n-1}, ... und die Intervalle $\xi^{s+1}_{n-1} - \xi^s_{n-1}$, für welche sie gelten, mit ξ^1_{n-1}, ξ^2_{n-1}, ... bezeichnet werden, und wenn noch $a^0_{n-1} = 0$, $\xi^0_{n-1} = 0$ gesetzt wird, ist

$$(D) \qquad u'_{n-1}(\xi) = \sum_{s=0}^{s=t} a^s_{n-1} \xi^s_{n-1} + a^{t+1}_{n-1} \cdot \left[\xi - \sum_{s=0}^{s=t} \xi^s_{n-1}\right]$$

für einen Wert ξ im Intervalle ξ^{t+1}_{n-1}. Da sämtliche a^s_{n-1} und ξ^s_{n-1} rational sind, ist auch $u'_{n-1}(\xi)$ rational für alle rationalen ξ; darum sind alle A^p_{n-1} und α^p_{n-1} rationale Gröfsen, die durch endlich viele Rechnungen bestimmt werden können.

Berechnet man dann die Koefficienten

$$(E) \qquad C^m_n = \sum_{p=1}^{p=2^{\nu_n-1}} A^p_{n-1} \cdot c^m_n\left(\frac{p-1}{2^{\nu_n}}, \frac{1}{2^{\nu_n}}, \alpha^p_{n-1}\right)$$

$$n > 1 \qquad m = 2q + 1$$

und schreibt

$$C^m_0 = (-1)^{\frac{m-1}{2}} \cdot \sqrt{2} - 1 \qquad C^m_1 = K^m_1 \cos\frac{m\pi}{4},$$

so sind die Reihen

$$\mathfrak{H}_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{16}{\pi^3} \cdot \frac{1}{10^n} \sum_{m=2q+1}^{\infty} \frac{C^m_n}{m^3} \sin mx\pi$$

$$\mathfrak{H}'_n(x) = \sum_{n=0}^{n} \frac{16}{\pi^3} \cdot \frac{1}{10^n} \sum_{m=2q+1}^{\infty} \frac{C^m_n}{m^2} \cos mx\pi$$

für $n = \infty$ konvergent und stellen zwei Funktionen $\mathfrak{H}(x)$ und $\mathfrak{H}'(x)$ dar, von denen die erste stetig ist und in jedem beliebigen Intervalle

Maxima und Minima besitzt, die zweite aber den überall unstetigen Differentialquotienten der ersteren bildet.

Um zu beweisen, dafs die Reihe für $\mathfrak{H}(x)$ konvergiert, braucht man sich nur auf eine der unter III. entwickelten Ungleichheiten zu berufen. Es ist ja

$$h_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}+\xi\right)=\frac{A_{n-1}^{p+1}}{2^{\nu_n-1}}\cdot u_n(2^{\nu_n-1}\cdot\xi) \text{ für } \xi\leq\frac{1}{2^{\nu_n}},$$

also folgt aus der ersten jener Ungleichheiten unmittelbar

$$\left|h_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}+\xi\right)\right|<\left|\frac{A_{n-1}^{p+1}}{10^n}\cdot\eta_n\cdot\xi\right|<\frac{3P}{10^n},$$

wenn mit P der Wert von $\prod_1^\infty\left(1+\frac{\vartheta}{10^n}\right)$ bezeichnet wird. Wählt man n so grofs, dafs $\frac{P}{10^n}<\varepsilon$ ist, wo ε eine beliebig klein gegebene Gröfse bedeutet, und liegt dann x der Reihe nach zwischen $\frac{p_1}{2^{\nu_n}}$ und $\frac{p_1+1}{2^{\nu_n}}$, zwischen $\frac{p_2}{2^{\nu_n+1}}$ und $\frac{p_2+1}{2^{\nu_n+1}}$, u. s. w., so gilt

$$\left|h_{n+1}(x)\right|<\frac{3P}{10^{n+1}},\quad \left|h_{n+2}(x)\right|<\frac{3P}{10^{n+2}},\ \cdots\cdots$$

also

$$\left|h_{n+1}(x)+h_{n+2}(x)+\cdots\cdots\right|=\left|r_n(x)\right|<\frac{3P}{10^n}<3\varepsilon,$$

d. h. der Rest der Reihe verschwindet für jedes x, darum ist die Reihe gleichmäfsig konvergent, und weil sie nur aus stetigen Funktionen gebildet wird, auch stetig.

Weit mehr Umstände bereitet der Nachweis, dafs auch die Reihe für $\mathfrak{H}'(x)$ konvergent ist. Sie ist auch nur bedingt konvergent, nämlich bei der vorgeschriebenen Reihenfolge der Funktionen $h_n'(x)$. Denn nur für diese Reihenfolge gilt die Bemerkung, dafs in der Gleichung (c) die Gröfsen $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)$ und A_{n-1}^p dasselbe Zeichen besitzen, und auf diese Eigenschaft mufs der Konvergenzbeweis sich stützen. Zu beachten ist aufserdem immer, dafs A_{n-1}^p nicht Null sein kann.

Zuerst ist überall, wo $\mathfrak{H}_{n-1}'(x)=0$ ist, auch $h_n'(x)=0$, weil die Abscissen solcher Nullpunkte die Form $\frac{p}{2r}$ haben und für das neue r behalten; also ist auch $\mathfrak{H}_n'(x)=0$ und allgemein $h_{n+1}'(x)=h_{n+2}'(x)=\cdots\cdots=0$, so dafs $\mathfrak{H}'(x)=\mathfrak{H}_{n-1}'(x)=0$ gilt. Im folgenden nehme ich daher an, dafs für das betrachtete x keine der Gröfsen $\mathfrak{H}_n'(x)$ verschwindet.

Zu einem bestimmten n gehören unendlich viele Gröfsen $\mathfrak{H}'_{n+m}(x)$. Da sie nach einem früheren Beweise sämtlich numerisch kleiner sind als P, so sind auch ihre obere und untere Grenze Q_n und q_n immer endliche Gröfsen.

Sei wieder n so grofs gewählt, dafs $\frac{P}{10^n} < \varepsilon$. Wir wollen dann zuerst den Fall behandeln, dafs Q_n und q_n nicht verschiedenes Zeichen haben (wohl aber soll eine der Gröfsen Null sein dürfen).

In diesem Falle giebt es einen Wert für n, für welchen gilt

$$q_n \leq \mathfrak{H}'_n(x) \leq q_n + \varepsilon \tag{1}$$

Aufserdem ergiebt mehrfache Benutzung der Gleichung (c):

$$\mathfrak{H}'_{n+m}(x) = \mathfrak{H}'_n(x) + \frac{A^{p_1}_n \gamma_1}{10^{n+1}} + \cdots\cdots + \frac{A^{p_m}_{n+m-1} \gamma_m}{10^{n+m}} \tag{d}$$

$$3 > \gamma_r \geq -(10^{n+r} + 1).$$

Alle Gröfsen A haben gleiches Zeichen mit q_n und Q_n, $\mathfrak{H}'_n(x)$ und $\mathfrak{H}'_{n+m}(x)$, etwa das positive; die rechte Seite der Gleichung (d) wird daher gröfser, wenn statt der A überall P, statt der γ überall 3 geschrieben wird, d. h. es gilt

$$\mathfrak{H}'_{n+m}(x) \leq \mathfrak{H}'_n(x) + 3P\left(\frac{1}{10^{n+1}} + \cdots\cdots + \frac{1}{10^{n+m}}\right) \tag{2}$$

$$< \mathfrak{H}'_n(x) + \frac{3P}{10^n} < \mathfrak{H}'_n(x) + 3\varepsilon.$$

Aus (1) und (2) folgt

$$q_n \leq \mathfrak{H}'_{n+m}(x) < q_n + 4\varepsilon.$$

Die Gröfsen $\mathfrak{H}'_{n+m}(x)$ nähern sich daher einer festen Grenze, welche Null oder positiv ist.

Sind q_n und Q_n beide negativ (oder $Q_n = 0$, $q_n < 0$), so ergeben dieselben Schlüsse, dafs sich die $\mathfrak{H}'_{n+m}(x)$ einer Grenze nähern, welche Null oder negativ ist.

Ist endlich Q_n positiv, q_n negativ, dann seien n_1, n_2, n_3 u. s. w. diejenigen Werte von n, für welche in den $\mathfrak{H}'_n(x)$ ein Zeichenwechsel eintritt. Sei z. B. $\mathfrak{H}'_{n_1}(x)$ negativ, $\mathfrak{H}'_{n_1+1}(x)$ aber positiv. Die Intervalle von $\frac{p-1}{2^{\nu}n+1}$ bis $\frac{p}{2^{\nu}n+1}$ sind so klein gewählt, dafs $\mathfrak{H}'_n(x)$ von A^p_n um höchstens $\frac{1}{10^n}$ abweicht, man kann daher schreiben

$$\mathfrak{H}'_{n_1+1}(x) = A^p_{n_1} + \vartheta \cdot \frac{1}{10^{n_1}} + \frac{A^p_{n_1} \cdot \gamma_{n_1}}{10^{n_1+1}} \tag{3}$$

$$3 > \gamma_{n_1} \geq -(10^{n_1+1} + 1).$$

$A^p_{n_1}$ und auch $A^p_{n_1} + \theta \cdot \frac{1}{10^{n_1}}$ sind negativ, die rechte Seite aber soll positiv sein; darum mufs γ_{n_1} negativ sein; setzt man statt γ_{n_1} den Wert $-(10^{n_1+1}+1)$, so entsteht rechts $\theta \cdot \frac{1}{10^{n_1}} - \frac{A^p_{n_1}}{10^{n_1+1}}$, also ist $(10 < 10P)$:

$$\left| \mathfrak{H}'_{n_1+1}(x) \right| \leqq \left| \theta \cdot \frac{1}{10^{n_1}} \right| + \left| \frac{A^p_{n_1}}{10^{n_1+1}} \right| < \frac{11P}{10^{n_1+1}}$$

oder:

$$0 < \mathfrak{H}'_{n_1+1}(x) < \frac{11P}{10^{n_1+1}}.$$

Ist umgekehrt $\mathfrak{H}'_{n_2}(x)$ positiv, $\mathfrak{H}'_{n_2+1}(x)$ negativ, so folgt

$$0 > \mathfrak{H}'_{n_2+1}(x) > -\frac{11P}{10^{n_1+1}}.$$

Für die Werte $n_1 + m$ zwischen $n_1 + 1$ und $n_2 + 1$ darf man die Gleichung (2) benutzen und erhält:

$$0 < \mathfrak{H}'_{n_1+m}(x) < \mathfrak{H}'_{n_1+1}(x) + \frac{3P}{10^{n_1+1}} < \frac{2P}{10^{n_1}}$$

$$m = 1, 2, \ldots\ldots n_2 - n_1.$$

Ebenso ist:

$$0 > \mathfrak{H}'_{n_2+m}(x) > \mathfrak{H}'_{n_2+1}(x) - \frac{3P}{10^{n_2+1}} > -\frac{2P}{10^{n_2}}$$

$$m = 1, 2, \ldots\ldots n_3 - n_2.$$

Da die Reihe der Zahlen n_1, n_2, ... der Annahme nach unendlich ist, besitzen die $\mathfrak{H}'_{n+m}(x)$ den Grenzwert Null.

Wenn die Reihe $\mathfrak{H}'(x)$ konvergent ist, braucht ihr Wert doch nicht den Differentialquotienten der Funktion $\mathfrak{H}(x)$ vorzustellen. Dafür ist nach einem Lehrsatze von Dini (Fondamenti per la teorica delle funzioni di variabili reali, pag. 113, Teorema X) noch aufserdem nötig, dafs die drei Gröfsen

$$\frac{r_{n+1}(x)}{\Delta x}, \quad \frac{r_{n+1}(x+\Delta x)}{\Delta x}, \quad \frac{\Delta \mathfrak{H}_{n+1}(x)}{\Delta x} - \mathfrak{H}'_{n+1}(x)$$

beliebig klein sind für dasselbe n, dessen Gröfse von der Kleinheit des Increments Δx abhängig sein darf, wenn es nur für alle Δx unter einer gewissen Kleinheit gröfser bleibt, als eine feste Gröfse m.

Sei wieder n so grofs gewählt, dafs $\frac{P}{10^n} < \varepsilon$. Dann aber wähle man n, falls nicht schon seine Gröfse dafür ausreicht, so grofs, dafs zwischen x und $x + \Delta x$ wenigstens eine der Gröfsen $\frac{p}{2^{r_n+2}}$ liegt;

sind s_1 solcher Gröfsen, nämlich $\frac{p_1+1}{2^{\nu_n+2}}, \ldots\ldots \frac{p_1+s_1}{2^{\nu_n+2}}$ zwischen x und $x+\Delta x$ vorhanden, so kann man schreiben:

$$x = \frac{p_1+1}{2^{\nu_n+2}} - \Delta_1 \qquad x+\Delta x = \frac{p_1+s_1}{2^{\nu_n+2}} + E_1$$

$$\Delta x = \Delta_1 + \frac{s_1-1}{2^{\nu_n+2}} + E_1;$$

dann gilt:

$$\left| h_{n+2}(x) \right| = \left| h_{n+2}\left(\frac{p_1+1}{2^{\nu_n+2}} - \Delta_1\right) \right| < \frac{3P}{10^{n+2}} \cdot \Delta_1$$

$$\left| h_{n+2}(x+\Delta x) \right| = \left| h_{n+2}\left(\frac{p_1+s_1}{2^{\nu_n+2}} + E_1\right) \right| < \frac{3P}{10^{n+2}} \cdot E_1.$$

Liegen zwischen denselben Gröfsen x und $x+\Delta x$ die Werte $\frac{p_2+1}{2^{\nu_n+3}}, \ldots\ldots \frac{p_2+s_2}{2^{\nu_n+3}}$, so dafs auch gilt

$$\Delta x = \Delta_2 + \frac{s_2-1}{2^{\nu_n+3}} + E_2,$$

so ist $\Delta_2 \leq \Delta_1$ und $E_2 \leq E_1$, und man hat

$$\left| h_{n+3}(x) \right| < \frac{3P}{10^{n+3}} \cdot \Delta_2 \qquad \left| h_{n+3}(x+\Delta x) \right| < \frac{3P}{10^{n+3}} \cdot E_2$$

u. s. w.

Mit $r_{n+1}(x)$ bezeichnen wir die unendliche Reihe $h_{n+2}(x) + h_{n+3}(x) + \cdots\cdots$. Für diese ergiebt sich aus der Fortsetzung der Betrachtung:

$$\left| r_{n+1}(x) \right| < 3P\left(\frac{\Delta_1}{10^{n+2}} + \frac{\Delta_2}{10^{n+3}} + \cdots\right) < \frac{3P}{10^{n+1}} \cdot \Delta_1$$

$$\left| r_{n+1}(x+\Delta x) \right| < 3P\left(\frac{E_1}{10^{n+2}} + \frac{E_2}{10^{n+3}} + \cdots\right) < \frac{3P}{10^{n+1}} \cdot E_1.$$

Diese Ungleichheiten gelten, sobald mindestens eine der Gröfsen $\frac{p}{2^{\nu_n+2}}$ zwischen x und $x+\Delta x$ liegt, ganz gleichgültig, ob auch eine der Gröfsen $\frac{p}{2^{\nu_n+1}}$ oder $\frac{p}{2^{\nu_n}}$ dazwischen liegt. Da Δ_1 und E_1 kleiner sind als Δx, folgt, dafs die ersten beiden von den drei im Dinischen Lehrsatze aufgeführten Gröfsen numerisch kleiner sind als $\frac{3P}{10^{n+1}} < \varepsilon$.

Die Funktion $h_{n+1}(x)$ ist im Intervall $\frac{p}{2^{\nu_n+1}}$ bis $\frac{p+1}{2^{\nu_n+1}}$ das verkleinerte Bild der Funktion $u_{n+1}(x)$, multipliziert mit A_n^{p+1}. Wenn $x = \frac{p}{2^{\nu_n+1}} + \xi$ und Δx klein genug ist, damit $\xi + \Delta x < \frac{1}{2^{\nu_n+1}}$, hat man:

$$\Delta h_{n+1}(x) = \frac{A_n^{p+1}}{2^{\nu_{n+1}-1}} \left\{ u_{n+1}(2^{\nu_{n+1}-1} \cdot [\xi + \Delta x]) - u_{n+1}(2^{\nu_{n+1}-1} \cdot \xi) \right\},$$

und hieraus folgt mit Hilfe der unter IV. entwickelten Ungleichheiten für jedes positive A_n^{p+1}:

$$\Delta h_{n+1}(x) < \frac{A_n^{p+1} \cdot \eta_n}{10^{n+1}} \cdot \Delta x \qquad \Delta h_{n+1}(x) > \left[h'_{n+1}(x) - \frac{16 A_n^{p+1}}{10^{n+1}} \right] \cdot \Delta x$$

also auch:

$$(A^1) \qquad h'_{n+1}(x) - \frac{16 A_n^{p+1}}{10^{n+1}} < \frac{\Delta h_{n+1}(x)}{\Delta x} < \frac{A_n^{p+1} \cdot \eta_n}{10^{n+1}}.$$

Um auf $\mathfrak{H}_{n+1}(x)$ überzugehen, beachte man, dafs in dem behandelten Intervalle von $\frac{p}{2^{\nu_{n+1}}}$ bis $\frac{p+1}{2^{\nu_{n+1}}}$ die Funktion $\mathfrak{H}_n'(x)$ nur um $\frac{1}{10^n}$ im Werte schwankt; es ist daher

$$\Delta x \left[\mathfrak{H}_n'(x) - \frac{1}{10^n} \right] < \Delta \mathfrak{H}_n(x) < \Delta x \left[\mathfrak{H}_n'(x) + \frac{1}{10^n} \right].$$

Also folgt:

$$(B^1) \quad \mathfrak{H}'_{n+1}(x) - \frac{1}{10^n} - \frac{16 A_n^{p+1}}{10^{n+1}} < \frac{\Delta \mathfrak{H}_{n+1}(x)}{\Delta x} < \mathfrak{H}_n'(x) + \frac{1}{10^n} + \frac{A_n^{p+1} \cdot \eta_n}{10^{n+1}}.$$

Man wähle nun zunächst n so grofs $= m$, dafs nicht nur $\frac{P}{10^m} < \varepsilon$, sondern aufserdem $\mathfrak{H}'_{n+1}(x) - \mathfrak{H}'_n(x)$ für alle $n \geq m$ kleiner als ε ist, was der Konvergenz von $\mathfrak{H}'(x)$ wegen möglich sein mufs; dann wähle man Δx so klein, dafs die Gröfsen x und $x + \Delta x$ in dasselbe Intervall von $\frac{p}{2^{\nu_{m+1}}}$ bis $\frac{p+1}{2^{\nu_{m+1}}}$ fallen; zu jedem derartig kleinen Δx giebt es ein n, welches nicht kleiner als m ist, und für welches alle drei im Dinischen Lehrsatze aufgeführten Gröfsen beliebig klein sind. Um zu einem solchen Δx dieses zugehörige n zu finden, wähle man das kleinste n, für welches eine oder mehre der Gröfsen $\frac{p}{2^{\nu_{n+2}}}$ zwischen x und $x + \Delta x$ liegen; dann sind ja die Gröfsen $\frac{r_{n+1}(x)}{\Delta x}$ und $\frac{r_{n+1}(x+\Delta x)}{\Delta x}$ numerisch kleiner als ε; aufserdem aber gilt, da keine der Gröfsen $\frac{p}{2^{\nu_{n+1}}}$ zwischen x und $x + \Delta x$ liegt, durch Subtraktion von $\mathfrak{H}'_{n+1}(x)$ von der Ungleichheit (B^1):

$$-\frac{1}{10^n} - \frac{16 A_n^{p+1}}{10^{n+1}} < \frac{\Delta \mathfrak{H}_{n+1}(x)}{\Delta x} - \mathfrak{H}'_{n+1}(x) < \mathfrak{H}_n'(x) - \mathfrak{H}'_{n+1}(x) + \frac{1}{10^n} + \frac{A_n^{p+1} \eta_n}{10^{n+1}}$$

oder

$$-3\varepsilon < \frac{\Delta \mathfrak{H}_{n+1}(x)}{\Delta x} - \mathfrak{H}'_{n+1}(x) < 3\varepsilon.$$

Dieselbe Ungleichheit würde sich für ein negatives A ergeben, womit bewiesen ist, dafs $\mathfrak{H}'(x)$ den Differentialquotienten von $\mathfrak{H}(x)$ vorstellt.

Übrigens mufs darauf aufmerksam gemacht werden, dafs nur die Existenz des Differentialquotienten und seine Übereinstimmung mit dem Werte $\mathfrak{H}'(x)$ bewiesen ist; zu seiner Berechnung ist die Reihe für $\mathfrak{H}'(x)$ nicht geeignet, da nur die Existenz der Zahl m bewiesen ist, aber kein Weg zu ihrer Berechnung vorliegt. Dagegen ist die Reihe für $\mathfrak{H}(x)$ geeignet zur Berechnung der Funktionswerte mit beliebig gewünschter Genauigkeit. Ihre Koefficienten lassen sich in beliebiger Anzahl durch die Formel (E) berechnen; die in derselben vorkommenden Gröfsen A^p_{n-1} und α^p_{n-1} sind durch die Formeln (A) und (B) definiert und lassen sich mit Hilfe der Formeln (C) und (D) berechnen.

Hiernach bleibt nur noch zu zeigen, dafs $\mathfrak{H}(x)$ in jedem beliebigen Intervalle Maxima — und dann auch Minima — besitzt. $\mathfrak{H}_{n-1}(x)$ hat in jedem der Intervalle $\frac{p}{2^{\nu_n-1}}$ bis $\frac{p+1}{2^{\nu_n-1}}$ ein Maximum und ein Minimum und kann aufserdem in $\frac{p}{2^{\nu_n-1}}$ oder $\frac{p+1}{2^{\nu_n-1}}$ selbst ein Maximum oder Minimum besitzen. Nun läfst sich für ein beliebig vorgelegtes Intervall n so grofs wählen, dafs mindestens zwei der Gröfsen $\frac{p}{2^{\nu_n-1}}$ im Intervall liegen; dann giebt es also auch im Intervall mindestens ein $x = \xi$, für welches $\mathfrak{H}_{n-1}(\xi)$ ein Maximum der Funktion $\mathfrak{H}_{n-1}(x)$ ist. ξ hat dabei jedenfalls die Form $\frac{p}{2^{\nu_n}}$. Auch $\mathfrak{H}_n(\xi)$ ist ein Maximum der Funktion $\mathfrak{H}_n(x)$, denn $h_n(\xi) = 0$ und $h'_n(\xi) = 0$, und A^p_{n-1} ist positiv, A^{p+1}_{n-1} ist negativ, nach diesen Gröfsen aber richtet sich das Zeichen von $h'_n(x)$ im Bereiche vor und hinter ξ.

Es sei jetzt von den beiden Gröfsen $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$ und $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p+1}{2^{\nu_n}}\right)$ die erstere die gröfsere. Zwischen ihnen besitzt $\mathfrak{H}_n(x)$ ein Maximum M und ein Minimum m; da $h_{n+m}(x)$ in $\frac{p}{2^{\nu_n}}$ und $\frac{p+1}{2^{\nu_n}}$ verschwindet, gilt nach der unter (II) angeführten Eigenschaft der Summe $v_n(x) + u_n(x)$:

$$\mathfrak{H}\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right) = \mathfrak{H}_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right) > M > m > \mathfrak{H}_n\left(\frac{p+1}{2^{\nu_n}}\right) = \mathfrak{H}\left(\frac{p+1}{2^{\nu_n}}\right).$$

Auch die Maxima und Minima, welche $\mathfrak{H}_{n+2}(x)$, $\mathfrak{H}^n{}_{+3}(x)$ u. s. w.

in diesem Intervalle von $\frac{p}{2^{\nu_n}}$ bis $\frac{p+1}{2^{\nu_n}}$ besitzen, liegen zwischen den beiden Werten $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$ und $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p+1}{2^{\nu_n}}\right)$; daher sind überhaupt alle Werte der $\mathfrak{H}_{n+m}(x)$ aus diesem Intervall zwischen den genannten beiden Grenzwerten enthalten. $\mathfrak{H}(x)$ kann daher im Intervall keinen Wert besitzen, der gröfser wäre als $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$ (ebenso würde folgen, dafs $\mathfrak{H}(x)$ im Intervall nicht gröfser als $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p+1}{2^{\nu_n}}\right)$ sein kann, wenn wir $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p+1}{2^{\nu_n}}\right) > \mathfrak{H}_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$ vorausgesetzt hätten); aber auch diesen gröfsten Wert selbst kann $\mathfrak{H}(x)$ nicht innerhalb des Intervalls noch einmal annehmen; denn falls in einem $x = \xi_1$ aus dem Intervall $\mathfrak{H}(\xi_1) = \mathfrak{H}_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$ wäre, giebt es innerhalb des Intervalls zwei Werte $\frac{r}{2^{\nu_n+m}}$ und $\frac{r+1}{2^{\nu_n+m}}$, zwischen denen ξ_1 liegt, und dann gilt nach dem bereits Bewiesenen

entweder $$\mathfrak{H}\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right) > \mathfrak{H}_{n+m}\left(\frac{r}{2^{\nu_n+m}}\right) \geq \mathfrak{H}(\xi_1),$$

oder $$\mathfrak{H}\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right) > \mathfrak{H}_{n+m}\left(\frac{r+1}{2^{\nu_n+m}}\right) \geq \mathfrak{H}(\xi_1),$$

je nachdem $\mathfrak{H}_{n+m}(x)$ für $\frac{r}{2^{\nu_n+m}}$ oder $\frac{r+1}{2^{\nu_n+m}}$ gröfser ist; beides aber widerspricht der Annahme. Ist nun $\mathfrak{H}_n\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$ für $\mathfrak{H}_n(x)$ ein Maximum, so hat $\mathfrak{H}(x)$ aufser in $\frac{p}{2^{\nu_n}}$ in dem ganzen Intervalle von $\frac{p-1}{2^{\nu_n}}$ bis $\frac{p+1}{2^{\nu_n}}$ nur Werte, welche kleiner sind als $\mathfrak{H}\left(\frac{p}{2^{\nu_n}}\right)$, d. h. dieser Wert ist auch für die Funktion $\mathfrak{H}(x)$ ein Maximum.

Ottensen, den 1. Oktober 1889.

Spektralapparat mit automatischer Einstellung der Prismen.

(Von Dr. Hugo Krüfs in Hamburg.)

Die Aufstellung eines Prismas in das Minimum der Ablenkung für die zu beobachtenden Strahlen ist eine vor allen anderen Stellungen bevorzugte. Nur in diesem Falle bleiben homocentrisch auf das

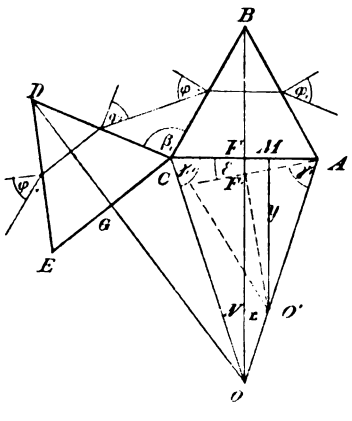
Prisma fallende Strahlen homocentrisch[1]), fallen die Vereinigungspunkte von horizontalen und vertikalen Linien zusammen.[2]) In der Stellung des Prismas im Minimum der Ablenkung ist die Vergrößerung gleich der Einheit; es ist ferner[3]) der Absorptions- und der Reflexionsverlust am kleinsten, namentlich für das an sich dunklere brechbarere Ende des Spektrums, und die notwendige Größe der Prismen am geringsten.

Man stellt bei Anwendung nur eines Prismas in einem Spektralapparat dasselbe häufig fest im Minimum der Ablenkung für den hellsten Teil des Spektrums auf, während es in einigen Fällen doch auch schon bei einem Prisma wünschenswert sein kann, es für jede beobachtete Spektralstelle im Minimum der Ablenkung zu haben.

Bei der Benutzung einer größeren Anzahl von Prismen ist es aber unbedingt notwendig, daß die Prismen sämtlich im Minimum der Ablenkung für jeden zu beobachtenden Strahl stehen.

Diese Einstellung der Prismen kann entweder auf sehr mühsame Art mit der Hand geschehen[4]) oder durch einen Mechanismus, welcher gleichzeitig alle Prismen und das Beobachtungsfernrohr in die richtige Stellung zum festen Collimatorrohr bringt. Ein derartiger Mechanismus ergiebt sich aus der Betrachtung der zu erfüllenden Bedingungen.

Fig. 1.



Bestehen bei einer Prismenkette sämtliche Prismen aus derselben Glasart und besitzen sie alle den gleichen brechenden Winkel α, so müssen alle Einfalls- und Austrittswinkel φ und ψ einander gleich sein. Infolgedessen bildet jede zweite Fläche eines Prismas mit der ersten Fläche des nächsten Prismas den gleichen Winkel β, und es sind alle Winkel γ der Grundflächen der Prismen zu einander ebenfalls gleich. Sind nun alle Prismen außerdem gleich groß, wie solches gewöhnlich der Fall ist, so bilden die Grundflächen der Prismen Tangentialflächen an einen Kreiscylinder, oder deren Schnitte mit der Zeichenebene, die Geraden AC, $CF(=2b)$ u. s. w., Tangenten an einen Kreis, dessen Mittelpunkt O ist.

1) Helmholtz, Physiolog. Optik S. 249 ff.
2) Zech, Zeitschrift f. Math. u. Physik 24, 168 (1879).
3) Krüß, Zeitschrift f. Instr.-Kunde 5, 181 (1885).
4) Kirchhoff, Abhlg. d. Bayr. Akad. d. Wiss. 1861, S. 63.

Der Radius dieses Kreises ergiebt sich

$$r = b \tan \gamma.$$

Da für einen Strahl anderer Brechbarkeit die Winkel φ und ψ, also auch β und γ sich ändern, so ändert sich auch die Gröfse dieses Radius in

$$r' = b \tan \gamma'.$$

Bezieht man die Lage des Mittelpunktes O auf ein Koordinatensystem, dessen Achsen AF und FO sind, so ergiebt sich

$$x = b - \frac{b}{r} y,$$

wo r die Gröfse des Radius für diejenige Stellung des Prismas ist, in der die Basis mit der x-Achse zusammenfällt.

Ferner ist

$$y = b \frac{\sin \gamma}{\cos \gamma'}$$

und der Weg OO', welchen der Mittelpunkt macht,

$$w = \frac{x}{\cos \frac{1}{2} (\beta - \alpha)}.$$

Die Koordinaten des zweiten Eckpunktes des $n$ten Prismas werden

$$x_n = x_{n-1} + 2b \cos E_n$$
$$y_n = y_{n-1} + 2b \sin E_n,$$

wo $E_n = 2 (n - 1) \left(\frac{\pi}{2} - \gamma + \varepsilon\right) + \varepsilon$ den Winkel bedeutet, welcher bei dem $n$ten Prisma die der brechenden Kante gegenüberliegende Fläche mit der x-Achse bildet, entsprechend dem Winkel ε beim ersten Prisma.

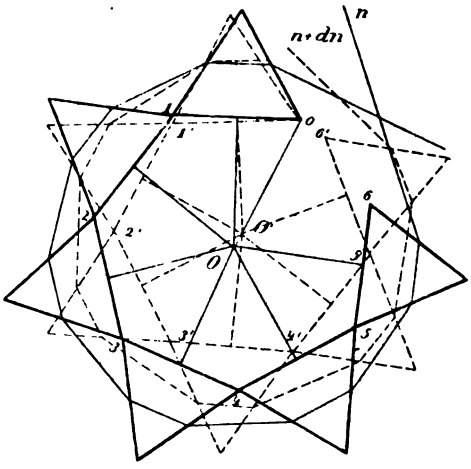
Aus den vorstehenden Betrachtungen ergiebt sich die mechanische Anordnung zur automatischen Einstellung einer Reihe von Prismen auf das Minimum der Ablenkung, wie sie zuerst von dem englischen Optiker Browning[1]) und nach ihm in den meisten Fällen benutzt worden, und in Fig. 2 schematisch dargestellt ist.

Die erste Kante o des ersten Prismas ist fest aber um die senkrechte Achse o drehbar auf der Grundplatte befestigt, die anderen Kanten 1 bis 5 sind derart miteinander verbunden, dafs sie sich gegeneinander um vertikale Achsen drehen können, deren Verlängerung durch diese Punkte geht. Sodann verbindet man jedes Prisma fest mit einem Arm, welcher senkrecht auf der Mitte der Grundfläche

1) Monthly Notices of the Roy. Astron. Soc. 30, 198 (1870).

steht; sämtliche Arme werden durch einen centralen Stift O miteinander verbunden, jedoch so, dafs letzterer in jedem Arme in einem Schlitz geht, und endlich ermöglicht man, dafs dieser Centralstift sich in der Geraden Oo in einem führenden Schlitz bewegen kann. Um aus der Einstellung im Minimum für den Strahl n in diejenige für den Strahl $(n + dn)$ zu gelangen, mufs das Centrum O den Weg OO' in der Richtung Oo machen, und man kann die bewegende Kraft in irgend einem Punkte des Systemes wirken lassen.

Fig. 2.



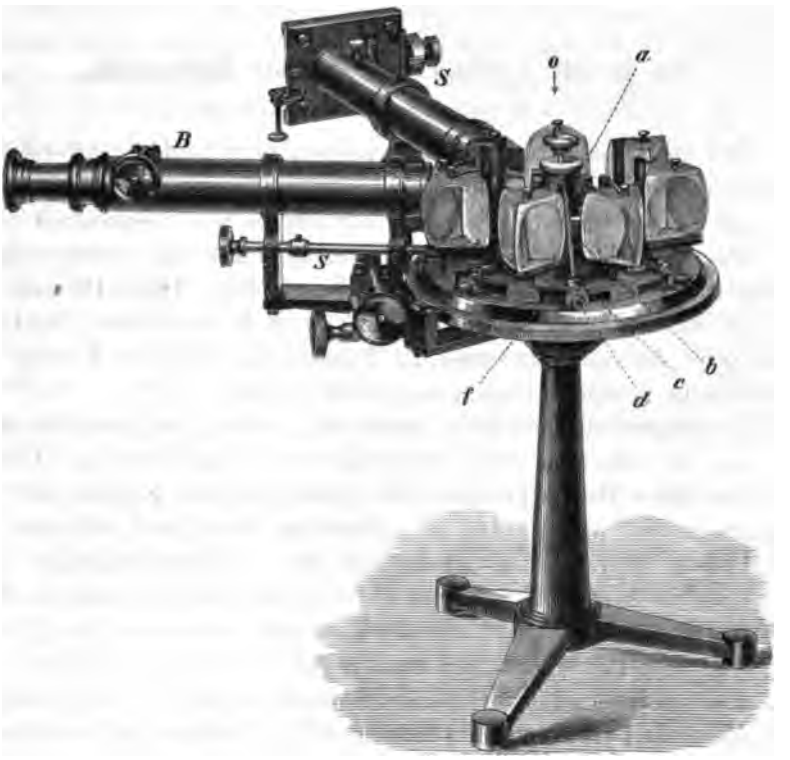
Der mechanischen Ausführung dieser Vorrichtung tritt erschwerend entgegen die Notwendigkeit, die verschiedenen Schlitze in ihrer ganzen Länge einerseits sehr leicht, ohne grofse Reibung, andererseits sehr sicher gehen zu lassen, um toten Gang zu vermeiden. Nachdem ich mich bereits bei Ausführung mehrerer Apparate nach der skizzierten Einrichtung mit dieser Schwierigkeit beschäftigt hatte, kam ich bei der Herstellung eines Apparates mit sechs Prismen für das hiesige physikalische Staatslaboratorium auf den Gedanken, die Bewegung in Schlitzen durch die leichter ausführbare Drehung um Achsen zu ersetzen, und gelangte so zur Konstruktion des in Fig. 3 dargestellten Spektral-Apparates.

Bei demselben ist die Achse O fest im Mittelpunkte des Prismentellers aufgestellt. An ihr können sich sechs einzelne Ringe auf und nieder bewegen und an jedem derselben befindet sich eine um eine horizontale Achse a drehbare Stange b, deren anderes Ende um eine zweite horizontale Achse c drehbar mit dem Ansatzstücke d verbunden ist. Zwischen je zweien dieser Ansatzstücke befindet sich eine feste Brücke f, auf welche das Prisma gestellt, mit welcher es bewegt wird.

Das Spaltrohr S ist fest an dem Prismatische befestigt, durch seine Träger geht eine horizontale Stange s, wie sie in Figur 3 auch bei dem Beobachtungsrohre B zu sehen ist. Diese horizontale Stange s des Spaltrohrs ist mit dem Ansatzstücke d vor dem ersten Prisma ein für allemal verbunden, jedoch so, dafs die Stange s sich in den

Trägern horizontal verschieben kann. Ebenso verbindet man die entsprechende Stange *s* des Beobachtungsrohres *B*, welches frei um die Achse *O* beweglich ist, mit dem Ansatzstücke *d* nach dem letzten Prisma. Dreht man nun das Beobachtungsfernrohr um die Achse *O*,

Fig. 3.



so wird der ganze Mechanismus mit in Bewegung gesetzt. Die an der Achse *O* verschiebbaren Ringe heben oder senken sich und der Radius des Cylinders, an welchen die Grundflächen der Prismen Tangentialebenen sind, wird kleiner oder gröfser entsprechend der Bewegung des Beobachtungsrohres. Zwei rechtwinklige Prismen, eins vor dem Spaltrohre, ein anderes vor dem Beobachtungsrohre, lenken die Lichtstrahlen je um 90 Grad ab. Hierdurch gelangen die beiden Rohre in solche Stellung zu einander, dafs es ohne weitere Schwierigkeit möglich ist, nicht nur 6 Prismen zur Zeit zu benützen, sondern auch 5, 4 ... 1 Prisma. Es wird zu dem Ende nur die Schraube *s* am Beobachtungsfernrohre *B* zurückgeschoben und dadurch die Verbindung mit dem letzten Ansatzstücke *d* aufgehoben. Nach Abnahme

der Prismen, welche nicht benutzt werden sollen, kann dann das Beobachtungsfernrohr mit seinem Reflexionsprisma frei um die Achse *O* gedreht und mit irgend einem der vorhergehenden Ansatzstücke *d* durch die Schraube *s* wieder verbunden werden.

Die sociale Gesetzgebung und die Mathematik.

(Von Wilhelm Lazarus in Hamburg.)

Der Begründung des Gesetzentwurfes, betreffend die Alters- und Invalidenversicherung, welcher dem deutschen Reichstag im Jahre 1888 von der Reichsregierung vorgelegt worden, ist eine Denkschrift über die Höhe der finanziellen Belastung, welche durch das Gesetz voraussichtlich hervorgerufen werden wird, hinzugefügt. Diese Denkschrift zerfällt in drei Abschnitte und enthält aufserdem eine „mathematische Anlage“ von etwa 12 Folioseiten, in denen die für die Berechnung nötigen Formeln abgeleitet werden.

Ich glaube nicht zu irren, wenn ich annehme, dafs dies der erste Fall ist, in welchem eine mathematische Abhandlung zur Unterstützung eines Gesetzentwurfs dem gesetzgebenden Körper von der Regierung vorgelegt worden ist. Allerdings finden sich auch bei der Begründung des Gesetzes, betreffend die Unfallversicherung, Ableitungen mathematischer Formeln, jedoch bei weitem nicht in ähnlichem Mafse. Jedenfalls dürfte die Thatsache interessant genug sein, um auch vom mathematischen Standpunkt gewürdigt zu werden, und sicherlich verdient sie in der Geschichte der Mathematik volle Beachtung.

Abgesehen von ihrer Anwendung auf das Rechnen hat die Mathematik in frühester Zeit hauptsächlich als Stütze der Mefskunst gedient, man könnte vielleicht sagen, dafs sie für diese geschaffen worden ist. Nicht nur die Lehre von dem Messen auf der Erde, in noch hervorragenderer Weise wurde das Messen in den Himmelsräumen zu einem Teil der angewendeten Mathematik. Aber je weiter sich die mathematische Wissenschaft theoretisch entwickelte, desto vielseitiger und reicher sind auch ihre Anwendungen geworden, so dafs sie jetzt fast in allen Zweigen der Naturwissenschaften eine Rolle spielt. Und mit der Wahrscheinlichkeitstheorie und ihrer allmählichen Entwickelung, vornehmlich seit der zweiten Hälfte des vorigen Jahrhunderts, hat sich der Mathematik ein weiteres sehr grofses Gebiet erschlossen. Zuerst galt es freilich nur, die Sätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung zur Lösung derjenigen Aufgaben zu benutzen, welche bei Lotterien und

anderen Glücksspielen auftauchen, bei Anleihen und finanziellen Geschäften der verschiedensten Art. Seit den letzten 50 Jahren indes finden wir Anwendungen der Mathematik auf allen Gebieten der statistischen Forschung, der Volkswirtschaft, der Versicherung sowie der Gesellschaftswissenschaft, und mehr und mehr wird die Methode auf diesen Gebieten eine mathematische.

Von diesem Gesichtspunkt aus werden wir uns keineswegs darüber wundern dürfen, dafs die deutsche Reichsregierung bei der Begründung eines der grofsartigsten Gesetze, welches jemals zur Erörterung gelangt ist, die Mathematik benutzt hat, um in der unzweideutigen Sprache mathematischer Formeln ihre Absichten klarzulegen und den Nachweis der Durchführbarkeit ihrer Pläne zu führen. Aber freudig überraschen durfte es uns doch, zu beobachten, wie die Reichsregierung durch dieses Vorgehen bekundet, sie setze stillschweigend voraus, das Verständnis für mathematische Formen sei bereits soweit allgemein geworden, dafs sie auch dem Nichtmathematiker, und als solche mufs man doch wohl die grofse Mehrzahl der Mitglieder des Reichstags bezeichnen, eine mathematische Abhandlung zur Unterstützung ihres Antrags vorlegen dürfe. Und selbst wenn die Reichsregierung in dieser Annahme etwas zu weit gegangen und der Zeit vorausgeeilt wäre, so ist doch die Thatsache selbst höchst beachtenswert und um so bezeichnender, wenn man sich vergegenwärtigt, in welcher Entfernung vom praktischen Leben die Mathematik früherer Jahre zu stehen pflegte. Bei Gelegenheit der Feier des 200jährigen Bestehens der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg wird der Blick unwillkürlich zurückgelenkt in die Vergangenheit, und so werden die Gegensätze zwischen früher und jetzt doppelt lebhaft empfunden.

Der Gesetzentwurf, betreffend die Alters- und Invalidenversicherung, hat im Reichstag eine so wesentliche Umgestaltung erfahren, dafs die in dem mathematischen Anhang der Denkschrift entwickelten Formeln gröfstenteils nur noch ein historisches Interesse beanspruchen dürfen, da sie bei den vollständig veränderten Grundlagen des Gesetzes für dasselbe nicht mehr passen. Für die jetzt getroffenen Bestimmungen müssen wesentlich andere Formeln aufgestellt werden.

Nach dem ursprünglichen Gesetzentwurf sollten die Beiträge zur Deckung des Kapitalwertes der von der Versicherungsanstalt voraussichtlich zu zahlenden Renten ausreichen; es mufste also der Gesamtwert der Anwartschaft auf die Rente der Rechnung zu Grunde gelegt werden. Das jetzt erlassene Gesetz bestimmt, dafs die Beiträge zunächst nur für die nächsten 10 Jahre festgestellt werden sollen, und zwar so, dafs durch dieselben der Kapitalwert der Renten, welche

von der Versicherungsanstalt voraussichtlich in dieser Zeit zu bewilligen sind, gedeckt wird. Die in Betracht kommenden Anwartschaften beziehen sich also nur auf die nächsten zehn Jahre, und dementsprechend wird die obere Grenze der Summation zu bestimmen sein. Aber auch hiervon abgesehen, sind die Feststellungen über die Rente in dem Gesetz so ganz andere wie in dem Entwurf, dafs man nicht auf die früheren Formeln zurückkommen, sondern vorziehen wird, die Entwickelung derselben auf Grundlage der Gesetzesbestimmungen neu vorzunehmen.

In allen Fällen wird jedoch die Ermittelung der Aktivitätsordnung, welche den ersten Abschnitt der Anlage bildet, und die Berechnung des Kapitalwertes einer Invalidenrente, die wir im Beginn des zweiten Abschnittes finden, als Grundlage der weiteren Entwickelung der Formeln anzusehen sein, und daher möchten wir nicht unterlassen, unsere Bedenken gegen die Berechnung des Kapitalwertes der Invalidenrente, wie sie hier geschieht, geltend zu machen.

Der Kapitalwert der Rente setzt sich zusammen aus den auf den gegenwärtigen Zeitpunkt diskontierten Rentenzahlungen, und diese sind abhängig von der Absterbeordnung der Invaliden. Bei dieser Absterbeordnung kommt es aber nicht nur auf das Alter der Invaliden an, sondern auch auf die Zeit, seit welcher die Invalidität eingetreten ist. Die mathematische Anlage bezeichnet die Wahrscheinlichkeit für einen Invaliden vom Alter x, vor Erreichung des Alters $(x + 1)$ zu sterben, durch ${}^{i}s_x$, ohne dabei zu unterscheiden, seit wie lange die Invalidität bestanden hat; diese Unterscheidung mufs aber gemacht werden.

Betrachtet man eine Tabelle der Wahrscheinlichkeiten ${}^{i}s_x$, beginnend mit dem Alter, in welchem zuerst Invalidität auftritt, bis zur höchsten Altersklasse, so findet man im Gegensatz zu sonstigen Sterblichkeitsbeobachtungen eine während einer längeren Reihe von Jahren abnehmende Sterblichkeit, bis dieselbe endlich ein Minimum erreicht und sodann mit dem Alter wieder zunimmt. Aus der der Denkschrift beigefügten Tabelle 1 ergiebt sich z. B. die Sterbenswahrscheinlichkeit für Invaliden ${}^{i}s_x$ (nach Zimmermann)

Alter 16	0,1182
26	0,0795
36	0,0639
46	0,0525
56	0,0487
66	0,0653 u. s. w.

Die Erklärung für diese auffallende Erscheinung finden wir in der

verschiedenartigen Besetzung der Altersklassen mit Personen, bezüglich der Zeit, welche seit ihrem Eintritt in die Invalidität verstrichen ist. Während sich in der niedrigsten Altersklasse nur solche Invaliden befinden, die erst in demselben Jahre arbeitsunfähig geworden sind, ist schon die nächste Altersklasse zusammengesetzt aus Invaliden, deren Invalidität im vorhergehenden Jahre, und aus solchen, bei denen sie in demselben Jahr entstanden ist. Und so geht es weiter; in den vorgerückteren Altersgruppen finden wir Invaliden, deren Invaliditätsalter, wenn wir uns dieses Ausdruckes bedienen dürfen, ein sehr verschiedenes ist.

Die Beobachtung hat aber gelehrt, dafs mit dem Eintreten der Invalidität auch zunächst eine hohe Sterblichkeit verknüpft ist, dafs diese mit der Zunahme der Invaliditätsdauer abnimmt, bis sie ein gewisses Minimum erreicht, von welchem ab sie nun mit dem weiter zunehmenden Alter wieder steigt. Die Sterbenswahrscheinlichkeit des Invaliden ist also nicht allein von seinem Lebensalter, sondern auch von seinem Invaliditätsalter abhängig. Die in der Tabelle bei dem Alter von 16 Jahren angegebene Sterbenswahrscheinlichkeit 0,1182 bezieht sich auf Invaliden, welche sämtlich erst in demselben Jahr arbeitsunfähig geworden sind, während die Sterbenswahrscheinlichkeit 0,0639 bei dem Alter von 36 Jahren eine durchschnittliche Sterbenswahrscheinlichkeit der Gruppe ist; in derselben befinden sich Invaliden bis zu dem Invaliditätsalter von 20 Jahren. Es ist durchaus nicht ausgeschlossen, dafs denjenigen 36jährigen Invaliden, welche im ersten Jahr der Invalidität stehen, eine gröfsere Sterbenswahrscheinlichkeit zukommt als den 16jährigen.

Fügen wir der Bezeichnung für die Sterbenswahrscheinlichkeit der Invaliden links das Alter hinzu, in welchem die Invalidität eingetreten ist, so bedeutet

$$ {}^{i}_{x}s_{x+\Delta} $$

die Wahrscheinlichkeit, dafs eine Person, welche im Alter x invalide geworden, und welche das Alter $x+\Delta$ erreicht hat, im Alter zwischen $x+\Delta$ und $x+\Delta+1$ sterben wird. Dagegen bezeichnet ${}^{i}s_{x+\Delta}$ einen Durchschnittswert aus ${}^{i}_{x}s_{x+\Delta}$, ${}^{i}_{x+1}s_{x+\Delta}$, ${}^{i}_{x+2}s_{x+\Delta}$, $\cdots$ ${}^{i}_{x+\Delta}s_{x+\Delta}$, welcher in einer Gruppe von Invaliden des Alters $x+\Delta$ mit dem Invaliditätsalter bis zu Δ beobachtet worden ist.

Beachtet man diesen Umstand, so mufs man auch bei der Berechnung der Invalidenrente auf denselben Rücksicht nehmen, und demgemäfs ändert sich die in der mathematischen Anlage zur Denkschrift gegebene Ableitung in folgender Weise:

Von A_x Aktiven des Alters x werden im Laufe des nächsten Jahres $A_x i_x$ Personen invalide, von diesen Invaliden erleben

das Alter $x+1$ $A_x i_x \left(1 - \frac{1}{2}\, {}^{i}s_x\right) = {}_xP_{x+1}$ Personen. Davon erleben
das Alter $x+2$ ${}_xP_{x+1}\left(1 - {}^{i}s_{x+1}\right) = {}_xP_{x+2}$ „
das Alter $x+3$ ${}_xP_{x+2}\left(1 - {}^{i}s_{x+2}\right) = {}_xP_{x+3}$ „ u. s. w.

Die diskontierten Zahlen der Invaliden bezeichnen wir durch ${}_xP'_{x+1}$, ${}_xP'_{x+2}$, ${}_xP'_{x+3}$, ... u. s. w. und finden dann die Invalidenrente für einen Invaliden des Alters x, welcher im Alter m invalide geworden ist gleich

$${}^{i}_{m}R_x = \frac{\sum_{h=0}^{h=y} {}_mP'_{x+h}}{{}_mP'_x}, \text{ wo } x+y \text{ das höchste Alter bedeutet.}$$

Es wird also der Wert der Invalidenrente beim Eintritt der Invalidität im Alter x gleich

$${}^{i}_{x}R_x = \frac{\sum_{h=0}^{h=y} {}_xP'_{x+h}}{{}_xP'_x},$$

abweichend von der Formel in der mathematischen Anlage zur Denkschrift.

Über den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Funktionen.[1])

(Von J. Schröder in Hamburg.)

Im folgenden wird in Kürze der Gang des Beweises mitgeteilt, dafs die nur von den Konstanten des algebraischen Gebildes abhängige Gröfse, um welche sich, abgesehen von dem bekannten Exponentialfaktor die hyperelliptischen σ- und ϑ-Funktionen unterscheiden, in der That allgemein den von Herrn F. Klein vermuteten Wert hat (Kl. 75):

$$C = c \cdot \sqrt{\frac{A}{(2\pi)^p}} \sqrt[8]{\Delta_{\varphi_{p+1-2\mu}} \Delta_{\psi_{p+1+2\mu}}}. \tag{1}$$

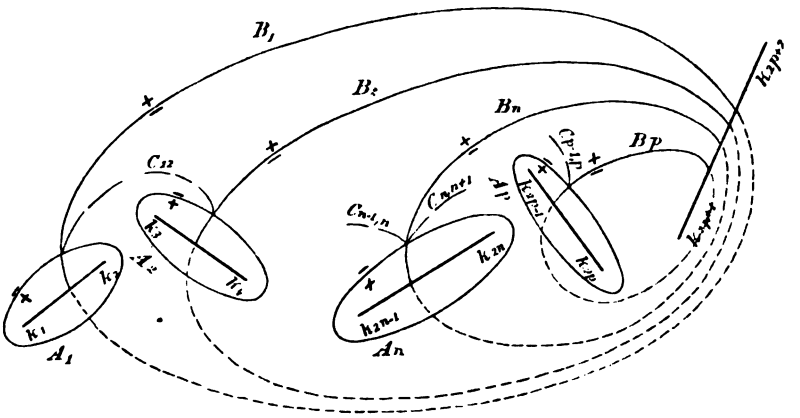
1) In genauerer Ausführung hat der Verfasser diese Arbeit der philosophischen Fakultät zu Göttingen als Dissertation vorgelegt. Da sich die Untersuchung unmittelbar an Herrn F. Kleins Abhandlung im Bd. XXXII der math. Annalen anschliefst, so werden die dort gewählten Bezeichnungen hier beibehalten und nicht wieder besonders erklärt. Citate auf die soeben genannte Arbeit werden im folgenden durch Kl. bezeichnet.

Obgleich für die durch $\mu = 0$ und $\mu = 1$ charakterisierten σ-Funktionen dies Resultat bereits aus Herrn Thomaes Untersuchungen (Crelles Journal Bd. 71) entnommen werden kann, so kommen wir doch bei dieser Gelegenheit auf den Fall $\mu = 0$ (d. h. auf die Bestimmung des Nullwertes der für verschwindende Argumente nicht verschwindenden ϑ-Funktionen) zurück, um diese Aufgabe unter Zugrundelegung der σ-Funktionen zu behandeln. Hinsichtlich der Methode weicht unsere Rechnung indessen nicht wesentlich von Herrn Thomaes Entwicklung ab, da wir gleichfalls die Riemannschen Differentialgleichungen:

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\varrho^2} = 4\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\varrho\varrho}}, \qquad \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}} = 2\pi i \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{\varrho\varrho'}}$$

als hauptsächliche Hilfsmittel heranziehen. Nach Erledigung des Falles $\mu = 0$ werden dann die zu $\mu = 1, 2, \ldots$ gehörigen $C_{\varphi\psi}$ durch Betrachtung von ϑ-Quotienten gefunden.

Schliefslich sei noch bemerkt, dafs wir, ohne der Allgemeinheit unserer Betrachtungen dadurch zu schaden, auf der zweiblättrigen



Riemannschen Fläche ein bestimmtes Querschnittsystem zu Grunde legen. Dasselbe sei durch die vorstehende Figur veranschaulicht.

Auf diese Zerschneidung des algebraischen Gebildes sind im folgenden immer die Perioden ω, τ etc. zu beziehen.

I. Abschnitt.

Die Bestimmung von $\vartheta(0, 0, \ldots 0)$.

1.

Den Ausgangspunkt unserer Betrachtungen bildet die Gleichung (Kl. 73):

$$(3)\quad \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p) = C \cdot e^{G_2(w_1, w_2, \ldots w_p)} \cdot \sigma_{\varphi_{p+1}\psi_{p+1}}(w_1, w_2, \ldots w_p),$$

wofür auch

$$(4)\quad \vartheta(v_1, v_2, \ldots v_p) = C\{1 + (G_2(w_1, \ldots w_p) + \Gamma_2(w_1, \ldots w_p)) + \cdots\}$$

geschrieben werden kann, sofern die Potenzentwicklung des betreffenden σ in folgender Form angenommen wird:

$$(5)\quad \sigma(w_1, \ldots w_p) = 1 + \Gamma_2(w_1, \ldots w_p) + \Gamma_4(w_1, \ldots w_p) + \cdots$$

Aus der Bedingung, dafs $\vartheta(v_1, \ldots v_p)$ den Funktionalgleichungen (2) genügen soll, ergeben sich nun aus (4) Bestimmungsgleichungen für $\frac{\partial \log C}{\partial \tau_{\varrho\varrho'}}$ $(\varrho \gtreqless \varrho')$, durch deren Kombination man das exakte Differential

$$(6)\quad d\log C = \sum_{\varrho=1}^{\varrho=p} \sum_{\varrho'=1}^{\varrho'=p} \frac{\partial \log C}{\partial \tau_{\varrho\varrho'}} d\tau_{\varrho\varrho'}$$

bildet. Da nun erstens auf Grund der Gleichungen (2)

$$\frac{\partial \log C}{\partial \tau_{\varrho\varrho'}} = \left(\frac{\partial \log \vartheta}{\partial \tau_{\varrho\varrho'}}\right)_{v_1=0, \ldots v_p=0} = \frac{1}{\gamma \pi i}\left(\frac{\partial^2 \log \vartheta}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}}\right)_{0, \ldots 0}$$

$$\begin{bmatrix}\gamma = 4, \text{ wenn } \varrho = \varrho' \\ \gamma = 2, \quad " \quad \varrho \lesseqgtr \varrho'\end{bmatrix}$$

ist, und zweitens C nicht als Funktion der ϑ-Moduln τ, sondern als Funktion der Verzweigungswerte $k_1, k_2, \ldots k_{2p+2}$ ausgedrückt werden soll, so ist (6) in folgende Gestalt umzusetzen:

$$(7)\quad 4\pi i d\log C = \sum_{1}^{2p+2} \sum_{\substack{1 \\ (\varrho \leq \varrho')}}^{p} \sum_{1}^{p} \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}}\right)_{0, 0, \ldots 0} \cdot \frac{\partial \tau_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\lambda} dk_\lambda.$$

Für die weitere Umformung dieser Gleichung ist zweierlei nötig, nämlich erstens die Herleitung des Ausdrucks: $\left(\frac{\partial^2 \log \vartheta}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}}\right)_{0, 0, \ldots 0}$ aus (4) und zweitens die Substitution des Wertes für $\frac{\partial \tau_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\lambda}$.

Die genaue Durchführung der Rechnung liefert nun:

$$(8)\quad \left(\frac{\partial^2 \log \vartheta}{\partial v_\varrho \partial v_{\varrho'}}\right)_{0, 0, \ldots 0} = \sum_{1}^{p} \sum_{1}^{p} \frac{\partial^2 (G_2(w_1, \ldots w_p) + \Gamma_2(w_1, \ldots w_p))}{\partial w_r \partial w_{r'}} \omega_{r\varrho}\omega_{r'\varrho'}$$

$$(9) \qquad \frac{\partial \tau_{\varrho\varrho'}}{\partial k_\lambda} = \frac{4\pi i}{A^2 f'(k_\lambda)} \cdot \sum_1^p{}^{\iota} A_{\iota\varrho} k_\lambda^{p-\iota} \cdot \sum_1^p{}^{\iota'} A_{\iota'\varrho'} k_\lambda^{p-\iota'},$$ [1])

wobei bezüglich der Gleichung (9) erklärt werden mufs, dafs unter A die Determinante

$$A = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \dots & \omega_{1p} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \dots & \omega_{2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p1} & \omega_{p2} & \dots & \omega_{pp} \end{vmatrix}$$

und unter A_{ik} die zum Elemente ω_{ik} gehörige Unterdeterminante $(p-1)$ter Ordnung verstanden wird. Nach Substitution der Ausdrücke (8) und (9) in (7) gewinnt man eine Gleichung, die sich bei Berücksichtigung des für $G_2(w_1, w_2, \dots w_p)$ von Herrn Klein entwickelten Wertes (vgl. Kl. 74) nach gehöriger Zusammenziehung auf folgende charakteristische Form bringen läfst:

$$(10) \quad d\log C = 2\sum_1^{2p+2}{}^{\lambda} \left\{ G_2(k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \dots k_\lambda^0) + \Gamma_2(k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \dots k_\lambda^0) \right\} \frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}.$$

2.

Behufs Integration der Gleichung (4) müssen die Werte der in den $w_1, w_2 \dots w_p$ quadratischen und homogenen Formen G_2 und Γ_2 für die besonderen Argumente $k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \dots k_\lambda^0$ festgestellt werden. Aus der Theorie der Integrale II. G. folgert man:

$$(11) \quad G_2(k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \dots k_\lambda^0) = \tfrac{1}{4} f'(k_\lambda) \frac{\partial \log A}{\partial k_\lambda} + \frac{p}{16(2p+1)} f''(k_\lambda),$$

während sich aus invariantentheoretischen Gründen[2])

$$(12) \qquad \Gamma_2(k_\lambda^{p-1}, k_\lambda^{p-2}, \dots k_\lambda^0) = c \cdot [(\varphi\psi)^2 \varphi_z^{p-1} \psi_z^{p-1}]_{z=k_\lambda}$$

erweist, wo φ und ψ die beiden Partialformen $(p+1)$ten Grades bedeuten, in welche die Grundform f_{2p+2} behufs Bildung des in Glg. (3) gemeinten σ zerlegt werden mufs; unter c ist ferner eine vorläufig unbestimmte numerische Konstante verstanden. Auf Grund

---

1) Wie die Gleichung (9) mit Hilfe der Integrale II. G. hergeleitet wird, soll hier nicht näher angegeben werden; bemerkt sei aber, dafs sich der rechter Hand angegebene Wert in völliger Übereinstimmung mit dem von Herrn Thomae entwickelten Ausdruck für $\frac{\partial a_{\mu\nu}}{\partial k_\lambda}$ befindet (vgl. Cr. J. Bd. 71. p. 212).

2) Vgl. Kl. § 11.

von (11) und (12) geht dann unsere Fundamentalgleichung (10) über in:

$$d\log C = d\log\sqrt{A} + \sum_{1}^{2p+2}{}_{\lambda}\left\{\frac{p}{8(2p+1)}f''(k_\lambda) + 2c(\varphi\psi)^2\varphi_{k_\lambda}^{p-1}\psi_{k_\lambda}^{p-1}\right\}\frac{dk_\lambda}{f'(k_\lambda)}. \tag{13}$$

Hierin ersetzen wir nun $f''(k_\lambda)$ und $f'(k_\lambda)$ durch entsprechende Bildungen der Partialformen φ und ψ; es bestehen nämlich die Relationen:

$$\begin{cases} f'(k_\lambda) = \varphi(k_\lambda)\,\psi'(k_\lambda) + \varphi'(k_\lambda)\,\psi(k_\lambda) \\ f''(k_\lambda) = \varphi(k_\lambda)\psi''(k_\lambda) + 2\varphi'(k_\lambda)\,\psi'(k_\lambda) + \varphi''(k_\lambda)\psi(k_\lambda), \end{cases} \tag{14}$$

welche sich noch vereinfachen, je nachdem der Verzweigungswert k_λ Nullstelle von φ oder ψ ist. Daneben besteht die weitere Gleichung:

$$(\varphi\psi)^2\varphi_{k_\lambda}^{p-1}\psi_{k_\lambda}^{p-1} = -\frac{2}{(p+1)^2}\varphi'(k_\lambda)\,\psi'(k_\lambda) + \frac{1}{p(p+1)}\left\{\varphi(k_\lambda)\,\psi''(k_\lambda) + \varphi''(k_\lambda)\psi(k_\lambda)\right\}. \tag{15}$$

Mit Rücksicht auf (14) und (15) nimmt nunmehr (13) die folgende Gestalt an:

$$d\log C = d\log\sqrt{A} + \sum_{(\varphi)}{}^{\lambda}\left\{\frac{\psi'(k_\lambda)}{\psi(k_\lambda)}\left(\frac{p}{4(2p+1)} - \frac{4c}{(p+1)^2}\right) + \frac{\varphi''(k_\lambda)}{\varphi'(k_\lambda)}\left(\frac{p}{8(2p+1)} + \frac{2c}{p(p+1)}\right)\right\}dk_\lambda$$
$$+ \sum_{(\psi)}{}^{\lambda}\left\{\frac{\varphi'(k_\lambda)}{\varphi(k_\lambda)}\left(\frac{p}{4(2p+1)} - \frac{4c}{(p+1)^2}\right) + \frac{\psi''(k_\lambda)}{\psi'(k_\lambda)}\left(\frac{p}{8(2p+1)} + \frac{2c}{p(p+1)}\right)\right\}dk_\lambda, \tag{16}$$

wo die erste Summe über alle Nullstellen von φ, die zweite über alle Nullstellen von ψ zu erstrecken. Die Gleichung (16) ist nach einer einfachen Umordnung leicht integrierbar, da auch die rechts stehenden Summen als exakte Differentiale darstellbar sind. Bezeichnet man mit Δ_φ und Δ_ψ die Diskriminanten von resp. φ und ψ, so hat man nach (16):

$$d\log C = d\log\sqrt{A} + \left(\frac{p}{4(2p+1)} - \frac{4c}{(p+1)^2}\right)\left\{d\log\left(\prod_{(\varphi)}\psi(k_\lambda)\cdot\prod_{(\psi)}\varphi(k_\lambda)\right)\right\}$$
$$+ \left(\frac{p}{8(2p+1)} + \frac{2c}{p(p+1)}\right)\left\{d\log\left(\Delta_\varphi\cdot\Delta_\psi\right)\right\}.$$

Mithin wird

$$C = \vartheta(0, 0, \ldots 0) = \mathfrak{C}\cdot\sqrt{A}\cdot(\Delta_\varphi\Delta_\psi)^{\frac{p}{8(2p+1)}+\frac{2c}{p(p+1)}}$$
$$\cdot\left(\prod_{(\varphi)}\varphi(k_\lambda)\right)^{\frac{p}{4(2p+1)}-\frac{4c}{(p+1)^2}}. \tag{17}$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung ist alles bestimmt bis auf die Integrationskonstante $\mathfrak{C}$ und die rein numerische Gröfse c. Die letztere bestimmt sich durch die Bedingung, dafs der in den einzelnen Verzweigungswerten homogen geschriebene ϑ-Nullwert in jedem einzelnen k_λ von der nullten Dimension sein mufs. Nun ist aber die Gesamtdimension der rechten Seite von (17) in Bezug auf irgend eines der k_λ gegeben durch die Zahl:

$$-\frac{p}{4}+2p\left\{\frac{p}{8(2p+1)}+\frac{2c}{p(p+1)}\right\}+2(p+1)\left\{\frac{p}{4(2p+1)}-\frac{4c}{(p+1)^2}\right\}.$$

Verlangt man, dafs dieser Ausdruck zu Null wird, so mufs

$$c=\frac{p(p+1)^2}{16(2p+1)} \tag{18}$$

werden. Dies hat zur Folge, dafs die Gleichung (17) sich auf folgende Form reduziert:

$$\vartheta(0,0,\ldots 0)=\mathfrak{C}\cdot\sqrt{A}\cdot\sqrt[8]{\Delta_\varphi\,\Delta_\psi}. \tag{19}$$

Den Wert der Integrationskonstanten $\mathfrak{C}$ stellt man am besten durch Ausführung eines Grenzüberganges fest, indem untersucht wird, was aus dem betreffenden ϑ bei paarweisem Zusammenrücken der Verzweigungswerte wird. Aus der von Herrn Thomae zu dem Ende angestellten Untersuchung[1]) entnehmen wir, dafs

$$\mathfrak{C}=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{1}{(2\pi)^p}} \tag{20}$$

zu setzen ist, wobei wir mit ε eine unbekannte Einheitswurzel bezeichnen. Auf die Bestimmung derartiger Faktoren lassen wir uns hier und auch im folgenden grundsätzlich nicht ein.

Als Endresultat ergiebt sich jetzt:

$$\vartheta(0,0,\ldots 0)=\varepsilon\cdot\sqrt{\frac{A}{(2\pi)^p}}\cdot\sqrt[8]{\Delta_\varphi\cdot\Delta_\psi}. \tag{21}$$

II. Abschnitt.

Bestimmung der zu $\mu>0$ gehörigen $C_{\varphi\psi}$.

3.

Sobald eines der zu $\mu=0$ gehörigen C bekannt ist, kann jedes der übrigen C durch Betrachtung eines ϑ-Quotienten ermittelt werden.[2])

1) Crelles Journal, Bd. 71, p. 216.

2) Vgl. Riemann, Abelsche Funktionen; Ges. Werke p. 134. — Ferner: Prym, Denkschriften der Schweizerischen naturforschenden Gesellschaft, Bd. 22. Zürich 1866.

Zur Bildung dieses Quotienten verwendet man aufser dem zu dem bekannten Nullwert gehörigen ϑ ein beliebiges anderes ϑ. Als jenes wollen wir insbesondere das sog. fundamentale ϑ wählen, welches in Bezug auf das von uns verabredete Querschnittsystem dadurch charakterisiert ist, dafs es dem zur Zerspaltung

$$f_{2p+2} = \varphi_0 \cdot \psi_0 = \varphi(k_1, k_3, \ldots k_{2p+1}) \cdot \psi(k_2, k_4, \ldots k_{2p+2})$$

gehörigen σ korrespondiert. Die andere in Betracht kommende ϑ-Funktion sei eine solche, welche einem $\sigma_{\varphi_{p+1-2\mu} \cdot \psi_{p+1+2\mu}}$ $(\mu > 0)$ entspricht. Die Zerspaltung $\varphi_{p+1-2\mu} \cdot \psi_{p+1+2\mu} = \varphi \cdot \psi$ denken wir uns der Bequemlichkeit halber aus $\varphi_0 \cdot \psi_0$ dadurch hergeleitet, dafs wir von φ_0 die 2μ ersten Faktoren: $(x - k_1)(x - k_3) \ldots (x - k_{4\mu-1})$ fortlassen und zu ψ_0 hinzufügen, so dafs:

$$(22)\begin{cases} \varphi = (x - k_{4\mu+1})(x - k_{4\mu+3}) \ldots (x - k_{2p+1}) \\ \psi = (x - k_2)(x - k_4) \ldots (x - k_{2p+2})(x - k_1)(x - k_3) \ldots (x - k_{4\mu-1}) \end{cases}$$

wird. Der Quotient beider ϑ hat dann bei Berücksichtigung der Definitionsformel der σ-Funktionen[1]) den folgenden Wert:

$$(23) \qquad \frac{\vartheta_{\varphi\psi}(v_\alpha)}{\vartheta_{\varphi_0\psi_0}(v_\alpha)} = \varrho \cdot 2^\mu \cdot \frac{C_{\varphi\psi}}{C_{\varphi_0\psi_0}} \cdot \frac{D_{\varphi\psi}}{D_{\varphi_0\psi_0}}.$$

Hierbei bedeutet ϱ ein Zeichen, unter welchem wir Einheitswurzeln, Potenzen von (-1) und ähnliche numerische Faktoren, auf deren genaue Fixierung wir hier kein besonderes Gewicht legen, zusammenfassen. Die Bedeutung des ϱ wird von Gleichung zu Gleichung wechseln.

Während in der Gleichung (23) linker Hand die v_α, definiert durch die Formel:

$$v_\alpha = \int_{y'}^{x'} dv_\alpha + \int_{y''}^{x''} dv_\alpha + \cdots + \int_{y^{(\nu)}}^{x^{(\nu)}} dv_\alpha$$

als Argumente auftreten, sind rechts die Grenzen x und y der Integrale selbst die Argumente. Die Anzahl ν mufs dabei der Bedingung $\nu \geqq \mu$ unterliegen, damit die Determinante $D_{\varphi\psi}$ nicht ihre Bedeutung verliert. Nehmen wir insbesondere $\nu = \mu$ an, so gilt unsere Formel (23) für alle diejenigen Lagen der Punkte x und y, für welche die Zähler- und Nennerdeterminante nicht gleichzeitig verschwinden. Wir können auch die bisher gänzlich willkürlich gelassenen Punkte x und y in Verzweigungspunkte rücken lassen, wenn wir nur das gleichzeitige Verschwinden von Zähler und Nenner vermeiden. Eine solche

1) Kl. § 9.

passende Auswahl treffen wir nun sicher, wenn wir für die Punkte $y', y'', \ldots y^{(\mu)}$ μ von den ψ und ψ_0 nicht gemeinsamen Nullstellen von ψ eintragen, und wenn überdies die $x', x'', \ldots x^{(\mu)}$ durch μ von den ψ und ψ_0 gemeinsamen Wurzeln ersetzt werden. Dieser Festsetzung entspricht die Substitution:

$$(24) \qquad \begin{cases} x' = k_2, & x'' = k_4, \ \ldots \ x^{(\mu)} = k_{2\mu} \\ y' = k_1, & y'' = k_3, \ \ldots \ y^{(\mu)} = k_{2\mu-1}. \end{cases}$$

Für diese Argumente nimmt die Gleichung (23) nach gehöriger Zwischenrechnung die Form an:

$$(25) \qquad \frac{\vartheta_{\varphi\psi}\left(\int_{k_1}^{k_2} + \int_{k_3}^{k_4} + \cdots + \int_{k_{2\mu-1}}^{k_{2\mu}}\right)}{\vartheta_{\varphi_0\psi_0}\left(\int_{k_1}^{k_2} + \int_{k_3}^{k_4} + \cdots + \int_{k_{2\mu-1}}^{k_{2\mu}}\right)}$$

$$= \varrho \cdot 2^{\mu} \cdot \frac{C_{\varphi\psi}}{C_{\varphi_0\psi_0}} \cdot \sqrt{\frac{R\begin{pmatrix} k_1, k_3, \ldots, k_{2\mu-1} \\ k_{4\mu+1}, k_{4\mu+3}, \ldots, k_{2p+1} \end{pmatrix}}{R\begin{pmatrix} k_1, k_3, \ldots k_{2\mu-1} \\ k_{2\mu+2}, k_{2\mu+4}, \ldots k_{2p+2} \end{pmatrix} R\begin{pmatrix} k_{2\mu+1}, \ldots, k_{4\mu-1} \\ k_2, \ldots, k_{2\mu} \end{pmatrix}}}.$$

Das Symbol R ist dabei als das Produkt aller Faktoren $(k_\alpha - k_\beta)$ zu verstehen, bei denen α und β jedesmal einen Index aus der oberen und unteren Argumentenreihe bedeuten, nie aber derselben Horizontalen entnommen sein dürfen. Aufserdem sind die Differenzen $(k_\alpha - k_\beta)$ stets so zu schreiben, dafs der kleinere Index dem gröfseren voraufgeht.

Aufser der Substitution (24) kann nun ebenso gut die folgende Auswahl getroffen werden:

$$(26) \qquad \begin{cases} x' = k_2, & x'' = k_4, \ \ldots \ x^{(\mu)} = k_{2\mu} \\ y' = k_{2\mu+1}, & y'' = k_{2\mu+3}, \ \ldots \ y^{(\mu)} = k_{4\mu-1}. \end{cases}$$

Alsdann geht (23) über in:

$$(27) \qquad \frac{\vartheta_{\varphi\psi}\left(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}}\right)}{\vartheta_{\varphi_0\psi_0}\left(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}}\right)}$$

$$= \varrho \cdot 2^{\mu} \cdot \frac{C_{\varphi\psi}}{C_{\varphi_0\psi_0}} \cdot \sqrt{\frac{R\begin{pmatrix} k_{2\mu+1}, k_{2\mu+3}, \ldots, k_{4\mu-1} \\ k_{4\mu+1}, k_{4\mu+3}, \ldots, k_{2p+1} \end{pmatrix}}{R\begin{pmatrix} k_1, k_3, \ldots, k_{2\mu-1} \\ k_2, k_4, \ldots, k_{2\mu} \end{pmatrix} R\begin{pmatrix} k_{2\mu+1}, \ldots, k_{4\mu-1} \\ k_{2\mu+2}, \ldots, k_{2p+2} \end{pmatrix}}}.$$

Abgesehen von dem numerischen Faktor unterscheidet sich die Gleichung (27) nur dadurch von (26), dafs die völlig gleichberechtigten Punktgruppen

$$(k_1, k_3, \ldots k_{2\mu-1}) \quad \text{und} \quad (k_{2\mu+1}, k_{2\mu+3}, \ldots k_{4\mu-1})$$

miteinander vertauscht sind.

4.

Die linke Seite der Gleichung (27) läfst sich nun so umformen, dafs sie im wesentlichen dem reciproken Wert der linken Seite von (25) gleich wird. Diese Umsetzung stützt sich auf den Satz: „Vermehrt man die Argumente einer ϑ-Funktion um eine geeignete Periodenhälfte, so kann dafür, abgesehen von einem gewissen Exponentialfaktor, eine bestimmte andere, für die ursprünglichen Argumente gebildete ϑ-Funktion gesetzt werden.“ Bezeichnet man nun mit $\frac{P}{2}$ die folgende Periodenhälfte:

$$\frac{P}{2} = \int_{k_1}^{k_{2\mu+1}} + \int_{k_3}^{k_{2\mu+3}} + \cdots + \int_{k_{2\mu-1}}^{k_{4\mu-1}},$$

so wird:

$$\vartheta_{\varphi\psi}\Big(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}}\Big) = L_1\,\vartheta_{\varphi_0\psi_0}\Big(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}} + \frac{P}{2}\Big)$$

$$\vartheta_{\varphi_0\psi_0}\Big(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}}\Big) = L_2\,\vartheta_{\varphi\psi}\Big(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}} + \frac{P}{2}\Big)$$

oder:

$$(28)\quad \begin{cases} \vartheta_{\varphi\psi}\Big(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}}\Big) = L_1\,\vartheta_{\varphi_0\psi_0}\Big(\int_{k_1}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{2\mu-1}}^{k_{2\mu}}\Big) \\ \vartheta_{\varphi_0\psi_0}\Big(\int_{k_{2\mu+1}}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{4\mu-1}}^{k_{2\mu}}\Big) = L_2\,\vartheta_{\varphi\psi}\Big(\int_{k_1}^{k_2} + \cdots + \int_{k_{2\mu-1}}^{k_{2\mu}}\Big) \end{cases}$$

Mit L_1 und L_2 haben wir hier zwei Exponentialfaktoren bezeichnet, deren Quotient sich auf Grund genauerer Überlegungen gleich einer Einheitswurzel ergiebt. Auf die nähere Bestimmung des Wertes derselben gehen wir hier nicht ein.

Durch Substitution der Ausdrücke (28) geht die Gleichung (27) in folgende Form über:

$$(29)\qquad \frac{\vartheta_{\varphi_0\psi_0}\left(\int_{k_1}^{k_2}+\cdots+\int_{k_{2\mu-1}}^{k_{2\mu}}\right)}{\vartheta_{\varphi\psi}\left(\int_{k_1}^{k_2}+\cdots+\int_{k_{2\mu-1}}^{k_{2\mu}}\right)} = \varrho\cdot 2^{\mu}\cdot\frac{C_{\varphi\psi}}{C_{\varphi_0\psi_0}}\cdot\sqrt{\frac{R\begin{pmatrix}k_{2\mu+1},\ k_{2\mu+3},\ \ldots,\ k_{4\mu-1}\\ k_{4\mu+1},\ k_{4\mu+3},\ \ldots,\ k_{2p+1}\end{pmatrix}}{R\begin{pmatrix}k_1,\ k_3,\ \ldots,\ k_{2\mu-1}\\ k_2,\ k_4,\ \ldots,\ k_{2\mu}\end{pmatrix}R\begin{pmatrix}k_{2\mu+1},\ \ldots,\ k_{4\mu-1}\\ k_{2\mu+2},\ \ldots,\ k_{2p+2}\end{pmatrix}}}.$$

Jetzt verbinden wir (25) und (29) durch Multiplikation der resp. Seiten und erhalten als Bestimmungsgleichung für $C_{\varphi\psi}$:

$$(30)\qquad C^2_{\varphi\psi} = \frac{\varrho}{2^{2\mu}}\cdot C^2_{\varphi_0\psi_0}\sqrt{\frac{R\begin{pmatrix}k_1,\ k_3,\ \ldots,\ k_{4\mu-1}\\ k_2,\ k_4,\ \ldots,\ k_{2p+1}\end{pmatrix}}{R\begin{pmatrix}k_1,\ k_3,\ \ldots,\ k_{4\mu-1}\\ k_{4\mu+1},\ \ldots,\ k_{2p+1}\end{pmatrix}}},$$

wenn man die sich aus der Definition des Symbols R ergebende Rechnungsregel:

$$(31)\qquad R\begin{pmatrix}a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m\\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_q\end{pmatrix}\cdot R\begin{pmatrix}b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n\\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_q\end{pmatrix} = R\begin{pmatrix}a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m,\ b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n\\ c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_q\end{pmatrix}$$

beachtet.

In die Gleichung (30) tragen wir nun schliefslich noch das für $C_{\varphi_0\psi_0}$ laut (21) bekannte Resultat ein:

$$C_{\varphi_0\psi_0} = \varepsilon\sqrt{\frac{A}{(2\pi)^p}}\sqrt[8]{\Delta_{\varphi_0}\Delta_{\psi_0}}.$$

Dann resultiert nach gehöriger Reduktion die Gleichung:

$$C^2_{\varphi\psi} = \frac{\varrho}{2^{2\mu}}\frac{A}{(2\pi)^p}\cdot\sqrt[4]{\Delta_{\varphi(k_{4\mu+1},\ldots k_{2p+1})}\cdot\Delta_{\psi(k_2,k_4,\ldots k_{2p+2};\ k_1,k_3,\ldots k_{4\mu-1})}}$$

oder endlich

$$(32)\qquad C_{\varphi\psi} = \frac{\varrho}{2^{\mu}}\sqrt{\frac{A}{(2\pi)^p}}\sqrt[8]{\Delta_{\varphi_{p+1-2\mu}}\cdot\Delta_{\psi_{p+1+2\mu}}}.$$

Mit dieser Gleichung haben wir den Zielpunkt unserer Betrachtungen erreicht; denn es ist hiermit bewiesen, dafs die Gröfse $C_{\varphi\psi}$, welche zu dem speciellen $\vartheta_{\varphi\psi}$ gehörte, dessen Betrachtung uns mit Rücksicht auf das zu Grunde gelegte Querschnittsystem bequem schien

einen genau den Erwartungen von Herrn Klein entsprechenden Wert hat. Infolge der Gleichberechtigung der zu einem bestimmten μ gehörigen ϑ-Funktionen gilt das Resultat (32) ohne weiteres allgemein, so dass damit der in Aussicht genommene Beweis erbracht ist.

Kegelschnitt-Anzahlen als Funktionen der Raum-Dimension n.

(Von H. Schubert in Hamburg.)

Die Forschungen in der n-dimensionalen Geometrie haben entweder den Zweck, mit Benutzung der geometrischen Ausdrucksweise die höhere Algebra zu fördern, oder aber den wirklich geometrischen Zweck, die Begriffe, Methoden und Resultate der Geometrie zu verallgemeinern, dadurch ihr inneres Wesen zu enthüllen und so fruchtbringend auf die Forschung im vorstellbaren dreidimensionalen Raume einzuwirken. Demgemäfs mufs es zu den Hauptaufgaben der abzählenden n-dimensionalen Geometrie gehören, als Funktionen von n diejenigen Anzahlen zu erkennen, welche angeben, wieviel Gebilde bestimmter Definition gegebene Bedingungen in einem n-dimensionalen linearen Raume erfüllen. Für den Fall, dafs dieses Gebilde ein Punkt, ein Strahl, eine Ebene oder überhaupt ein p-dimensionaler linearer Raum ist, habe ich die wichtigsten der soeben erwähnten Funktionen in früheren Arbeiten*) entwickelt. Hier soll nun statt eines linearen Raumes das elementarste, d. h. ein-dimensionale Punktgebilde zweiten Grades, der Kegelschnitt, zu Grunde gelegt werden; mit dem Ziele, die Funktion zu entwickeln, welche ausdrückt, wieviel Kegelschnitte die folgenden Bedingungen erfüllen:

1. ihre Ebene durch jeden von a gegebenen $(n-3)$-dimensionalen linearen Räumen zu schicken,
2. auf b gegebenen $(n-2)$-dimensionalen linearen Räumen je einen Punkt zu besitzen (schneiden),
3. auf c gegebenen $(n-1)$-dimensionalen linearen Räumen je eine Tangente zu besitzen (berühren).

Da eine Ebene durch $3(n-2)$ einfache Bedingungen, und ein Kegelschnitt in fester Ebene durch 5 einfache Bedingungen bestimmt

*) 1) „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen des dreidimensionalen Satzes, dafs es zwei Strahlen giebt, welche vier gegebene Strahlen schneiden.“ (Mitt. der Math. Ges. in Hamburg, Bd. I, Heft 4, 1884.)

2) „Die n-dimensionalen Verallgemeinerungen der fundamentalen Anzahlen unseres Raumes“ (Math. Annalen, Bd. 26, 1885), hier kurz citiert mit „Fund. Anz“.

3) „Anzahl-Bestimmungen für lineare Räume beliebiger Dimension“ (Acta math., Bd. 8, 1886), hier kurz citiert mit „Lineare Räume“.

ist, so ist die Konstantenzahl des Kegelschnitts, also auch die Summe $a + b + c$, gleich $3n - 1$. Für $n = 2$ mufs $a = 0$ und $b + c = 5$ sein. Die darauf bezüglichen 6 Anzahlen 1, 2, 4, 4, 2, 1 sind längst bekannt. Für $n = 3$, mufs $a \leqq 3$ und $a + b + c = 8$ sein. Die darauf bezüglichen 30 Anzahlen sind zuerst von Chasles (Comptes rendus 1867) berechnet. Zu ihnen gehört auch das zuerst von Herrn Lüroth (Crelles Journal, Bd. 68) gefundene Resultat, dafs es 92 Kegelschnitte giebt, welche 8 gegebene Strahlen schneiden. Für $n = 4$ mufs $a < 6$ und $a + b + c = 11$ sein. Die darauf bezüglichen 63 Anzahlen ergeben sich leicht aus den Tabellen auf Seite 298 meiner Abhandlung „über Räume zweiten Grades" (Mitteil. der Math. Ges. in Hamburg, Bd. I, Heft 9). Alle diese Anzahlen sind also die Werte, welche sich aus der von uns gesuchten Funktion durch Einsetzung von n gleich 2, 3 oder 4 ergeben müssen. Diese Funktion, welche von n, a, b, c, wo $a + b + c = 3n - 1$ ist, abhängt, wird im folgenden ganz allgemein entwickelt. Jedoch nur für den besonderen Fall $b = 0$ konnte der Verfasser ihr auch eine befriedigend einfache Form geben.

Die von mir in meinen „Fund. Anz." eingeführte abgekürzte Bezeichnung für Grundgebilde und Grundbedingungen, die sich als sehr fruchtbar erwiesen hat, behalte ich auch hier bei.

I. Die Anzahl-Funktion für die Kegelschnitt-Ausartung η.

Die Anzahlen für Kegelschnitte im $[n]$ lassen sich leicht durch die Anzahlen ausdrücken, die sich auf die beiden Kegelschnitt-Ausartungen δ und ε beziehen. δ ist ein Kegelschnitt, dessen Punkte zwei Strahlen bilden, und dessen Tangenten zwei zusammenfallende Strahlbüschel bilden, deren Scheitel der Schnittpunkt jener beiden Strahlen ist. ε ist ein Kegelschnitt, dessen Punkte zwei zusammenfallende Strahlen bilden, und dessen Tangenten zwei Strahlbüschel bilden, deren Scheitel beide auf dem Strahle liegen, der die beiden zusammenfallenden Strahlen in sich vereinigt. Läfst man nun auch noch die beiden Strahlen von δ oder die beiden Scheitel von ε sich vereinigen, so kommt man zu einer und derselben Ausartung η, und zwar ist diese letzte Kegelschnitt-Ausartung η ein Gebilde, das aus einer Ebene e, einem in dieser Ebene liegenden Strahle s und einem in diesem Strahle liegenden Punkte p besteht. Da von den Anzahlen für dieses Gebilde die Anzahlen für δ und ε und deshalb auch für den Kegelschnitt schliefslich abhängen, so mufs es unsere erste Aufgabe sein, die Anzahl

$$\eta e^a s^b p^c,$$

wo $a + b + c = 3n - 3$ ist, allgemein durch n, a, b, c auszudrücken.

In Übereinstimmung mit den Grundlagen meines Bedingungs-Kalküls bedeuten die Zeichen e, s, p natürlich auch die Bedingungen, welche aussprechen, dafs die Ebene e die einfache Grundbedingung $(n-3, n-1, n)$ erfüllt, d. h. mit einem gegebenen $[n-3]$ einen Punkt gemein hat, bzw., dafs der Strahl s die einfache Grundbedingung $(n-2, n)$ erfüllt, d. h. mit einem gegebenen $[n-2]$ einen Punkt gemein hat, bzw., dafs der Punkt p die einfache Grundbedingung $(n-1)$ erfüllt, d. h. auf einem gegebenen $[n-1]$ liegt. Diese Bedingungen schreiben wir auch η selbst zu, wenn einer der drei Bestandteile von η sie erfüllt. Zunächst läfst sich nun die Bedingung s^b, welche verlangt, dafs der Strahl s mit b gegebenen $[n-2]$ je einen Punkt gemein haben soll, als Summe von Vielfachen nichtzusammengesetzter Bedingungen darstellen, wie ich in § 5 der Fund. Anz. gezeigt habe. Hiernach ist für den Strahl s:

$$1) \qquad s^b = \varphi(b,1)\cdot(n-b-1,n) + \varphi(b,2)\cdot(n-b,n-1) + \varphi(b,3)\cdot(n-b+1,n-2) + \cdots$$

wo als letzter Addende bei geradem b:

$$\varphi\left(b, \tfrac{1}{2}b+1\right)\cdot\left(n-\tfrac{1}{2}b-1, n-\tfrac{1}{2}b\right)$$

und bei ungeradem b:

$$\varphi\left(b, \tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\right)\cdot\left(n-\tfrac{1}{2}b-\tfrac{3}{2}, n-\tfrac{1}{2}b+\tfrac{1}{2}\right)$$

auftritt. Hierbei sind die Koefficienten φ in folgender Weise durch Binomialkoefficienten ausdrückbar:

$$2) \qquad \varphi(b,k) = (b-1)_{k-1} - (b-1)_{k-3}{}^{1}).$$

Um nun aus F. 1) die Bedingung $s^b p^c$, welche sich auf das aus Strahl s und incidentem Punkt p bestehende Gebilde beziehen soll, abzuleiten, beachten wir, dafs p^c die Bedingung bedeutet, dafs p auf c gegebenen $[n-1]$, d. h. auf einem gegebenen $[n-c]$ liegen soll, so dafs wir also die Bedingungen $(n-b-1, n)$, $(n-b, n-1)$ u. s. w. sämtlich mit $(n-c, n)$ symbolisch zu multiplizieren haben. Bei jeder dieser Multiplikationen erhalten wir durch Anwendung der allgemeinen Formeln 9) oder 10) meiner Fund. Anz. eine Summe von Grundbedingungen. Ersetzt man dann die mit φ bezeichneten Koefficienten

1) Die Bezeichnung p_q bedeutet immer den Binomialkoefficienten $\frac{p!}{q!\,(p-q)!}$

gemäfs F. 2) durch Binomialkoefficienten, so erhält man nach Anwendung bekannter auf letztere bezüglicher Relationen:

$$3)\quad s^b p^c = b_0 \cdot (n-b-c, n) + b_1 \cdot (n-b-c+1, n-1) + \cdots + b_{c-1} \cdot (n-b-1, n-c+1) + (b_c - b_0) \cdot (n-b, n-c) + (b_{c+1} - b_1) \cdot (n-b+1, n-c-1) + \cdots,$$

welche Summe soweit fortzusetzen ist, bis die Bedingungssymbole (v, w) sinnlos werden, weil v nicht mehr kleiner als w ist.

Um nun von Formel 3) auf die dem Gebilde η zugeschriebene Bedingung $e^a s^b p^c$ schliefsen zu können, hat man die in 3) auftretenden, auf den Strahl s bezüglichen Symbole als Bedingungen aufzufassen, die der Ebene e auferlegt sind. So erhält man:

$$4)\quad \eta e^a s^b p^c = b_1 \cdot f(n-b-c+1, n-1, n) + b_2 \cdot f(n-b-c+2, n-2, n) + \cdots + (b_c - b_0) \cdot f(n-b, n-c, n) + (b_{c+1} - b_1) \cdot f(n-b+1, n-c-1, n) + \cdots,$$

wo $f(x, y, n)$ die Zahl der Ebenen bedeutet, welche die Bedingung (x, y, n) und aufserdem die von uns mit e bezeichnete Bedingung so oft erfüllen, wie erforderlich ist, damit diese Zahl endlich wird, also $x + y + n - 3$ mal. Die eben erwähnte Zahl $f(x, y, n)$ ist aber von mir in den „Linearen Räumen" (Acta Math., Bd. 8, S. 110) auf zweierlei Weise allgemein ausgedrückt, nämlich sowohl durch Binomialkoefficienten wie auch durch Fakultäten. Mit Benutzung der ersten dieser Darstellungsweisen erhält man:

$$5)\quad \eta e^a s^b p^c = A \cdot (a_{n-2} - a_{n-1}) + B \cdot a_n,$$

wo der Koefficient A sich in folgender Weise zusammensetzt:

$$6)\quad \begin{aligned} A = {} & b_1 \cdot [(2n-b-c-1)_{n-2} - (2n-b-c-1_{n-1}] \\ & + b_2 \cdot [(2n-b-c-1)_{n-3} - (2n-b-c-1)_{n-2}] \\ & + \cdots + (b_c - b_0) \cdot [(2n-b-c-1)_{n-c-1} - (2n-b-c-1)_{n-c}] + \cdots \end{aligned}$$

und wo der Koefficient B gleich einem ähnlich gebildeten Ausdrucke ist. Um A kürzer auszudrücken, benutzen wir die bekannte Relation:

$$b_0 \cdot x_p + b_1 \cdot x_{p-1} + \cdots b_b \cdot x_{p-b} = (b + x)_p.$$

Dadurch erhalten wir zunächst:

$$7)\quad A = (2n-c-1)_{n-1} - b_0 \cdot (2n-b-c-1)_{n-1} - (2n-c-1)_n + b_0 \cdot (2n-b-c-1)_n - C - D + E + F,$$

wo bei geradem $b + c$ die Buchstaben C, D, E, F die folgenden Ausdrücke bedeuten:

$$C = b_{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}} \cdot (2n-b-c-1)_{n-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{3}{2}} + \cdots + b_b \cdot (2n-b-c-1)_{n-1-\cdots}$$

$$D = b_0 \cdot (2n-b-c-1)_{n-c-1} + \cdots + b_{\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}} \cdot (2n-b-c-1)_{n-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}}$$

$$E = b_{\frac{1}{2}b+\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}} \cdot (2n-b-c-1)_{n-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}} + \cdots + b_b \cdot (2n-b-c-1)_{n-b}$$

$$F = b_0 \cdot (2n-b-c-1)_{n-c} + \cdots + b_{\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}} \cdot (2n-b-c-1)_{n-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}}$$

Ersetzt man in C und E den Binomialkoefficienten b_b durch b_0, b_{b-1} durch b_1 u. s. w., so lassen sich C und D, sowie E und F so zusammensetzen, dafs man

$$C + D = b_0 \cdot (2n-b-c)_{n-c} + b_1 \cdot (2n-b-c)_{n-c-1} + \cdots + b_{\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}} \cdot (2n-b-c)_{n-\frac{1}{2}b-\frac{1}{2}c+\frac{1}{2}}$$

und für $E + F$ genau denselben Ausdruck erhält. Also ist $-C-D+E+F=0$. Dieses Resultat ergiebt sich auch, falls $b+c$ ungerade ist. Demnach ist:

8) $A = (2n-c-1)_{n-1} - (2n-c-1)_n - (a-n+2)_{n-1} + (a-n+2)_n$.

In derselben Weise erhält man für den in 5) eingeführten Koefficienten B:

9) $B = (2n-c-3)_{n-2} - (2n-c-3)_{n-1} - (a-n)_{n-2} + (a-n)_{n-1}$.

Hieraus folgt:

10) $A \cdot (a_{n-2} - a_{n-1}) = (a_{n-2} - a_{n-1}) \cdot [(2n-c-1)_{n-1} - (2n-c-1)_n] + G$

11) $B \cdot a_n = a_n \cdot [(2n-c-3)_{n-2} - (2n-c-3)_{n-1}] + H$,

wo G und H leicht erkennbare, nur von a und n abhängige Ausdrücke sind. Ersetzt man in ihnen die Binomialkoefficienten durch Fakultäten, so erhält man durch Vereinigung:

$$G = \frac{a!\,(3n-a-3)}{n!\,(n-1)!\,(a-2n+2)!} \text{ und } H = \frac{a!\,(a+3-3n)}{n!\,(n-1)!\,(a-2n+2)!},$$

woraus $G + H = 0$ folgt. Wir erhalten also schliefslich die gesuchte Anzahlfunktion in folgender einfachen Form:

12) $\eta\, e^a s^b p^c = a_n \cdot [(2n-c-3)_{n-2} - (2n-c-3)_{n-1}] + (a_{n-2} - a_{n-1}) \cdot [(2n-c-1)_{n-1} - (2n-c-1)_n]$.

Dieser Ausdruck stellt also, bei jeder beliebigen Zahlengruppe n, a, c und $b = 3n-3-a-c$, für das Gebilde, das aus Ebene, Strahl und Punkt, die ineinander liegen, besteht, immer die Zahl dar, welche angiebt, wieviel solcher

Gebilde ihre Ebene a gegebene $(n-3)$-dimensionale lineare Räume schneiden lassen, ihren Strahl b gegebene $(n-2)$-dimensionale lineare Räume schneiden lassen und ihren Punkt in c gegebene $(n-1)$-dimensionale lineare Räume werfen.

Es mögen noch einige Specialisierungen der Form 12) hier Platz finden. Für $a < n-2$ ergiebt sich $\eta = 0$, weil die Ebene dann nicht bestimmbar und das aus Strahl und Punkt bestehende Gebilde überbestimmt ist. Für $a = n-2$, wo die Ebene eindeutig bestimmt ist, sobald das restierende Gebilde festgelegt ist, ergeben sich die auf letzteres bezüglichen Anzahlen aus:

13) $$\eta e^{n-2} s^b p^c = (2n-c-1)_{n-1} - (2n-c-1)_n .$$

Da $\eta e^{n-2} s^b p^c$ mit dem auf s bezüglichen Symbol $(n-c, n)(n-2, n)^{2n-1-c}$ identisch ist, so ergiebt sich die rechte Seite von F. 13) auch aus der Formel, die ich auf Seite 46 des 26. Bandes der Math. Ann. aufgestellt und dort mit 5) bezeichnet habe. Noch specieller ergiebt sich aus F. 13) für $c = 1$ die von Herrn Franz Meyer auf S. 132 des 21. Bandes der Math. Ann. invariantentheoretisch bestimmte Anzahl. Setzt man in F. 12 $c = 1$, so ergiebt sich die Anzahl-Funktion für das aus Ebene und incidentem Strahl bestehende Gebilde. Setzt man dann aufser $c = 1$ auch $b = 2$, d. h. $a = 3n - 6$, so ergiebt sich die von mir in den „Linearen Räumen" bestimmte Zahl der Ebenen, welche $3n - 6$ gegebene $[n-3]$ schneiden.

Es bleibt noch übrig, die gefundene Anzahl-Funktion auch durch Fakultäten auszudrücken. Ersetzt man die in 2) auftretenden Binomialkoefficienten durch Fakultäten, so erhält man schliefslich

14) $$\eta e^a s^b p^c = \frac{c \,.\, a!\,(2n-c-3)!\,.\,J}{n!\,(n-1)!\,(n-c)!\,(a-n+2)!},$$

wo

$$J = (2n-c-2)(2n-c-1)(2n-a-3) + (n-c)(a-n+1)(a-n+2)$$

zu setzen ist.

Bisher hatten wir dem Gebilde η nur die einfache Ebenen-Bedingung $(n-3,\ n-1,\ n)$, wenn auch a-mal, auferlegt. Man könnte ihm statt dessen auch die Bedingung (u, v, w) auferlegen. Dann erhält man die gesuchte Anzahl-Funktion, wenn man die Bedingungssymbole in 3) als der Ebene auferlegt auffafst und dann mit (u, v, w) symbolisch multipliziert. Soll η gerade bestimmt sein, so mufs $u + v + w = b + c$ sein. Dann aber geben alle symbolischen Multiplikationen Null, aufser:

$$(u, v, w)(n-w, n-v, n-u) = 1 .$$

Folglich ist $\eta(u, v, w) s^b p^c$ gleich demjenigen Koefficienten in 3), der mit $(n - w, n - v, n - u)$ multipliziert erscheint, wenn man jedes in 2) vorkommende Symbol (g, h) als mit (g, h, n) identisch auffafst. So ergiebt sich, dafs $\eta(u, v, w) s^b p^c$ nur dann von Null verschieden ist, wenn $u = 0$ ist, und dafs ferner:

15) $$\eta(0, v, w) s^b p^{v+w-b} = b_v - b_w$$

ist. Aus diesem sehr einfachen Resultate ergiebt sich z. B. für $v = n - 1$, $w = n$, $b = 2n - 2$ die schon oben erwähnte Zahl der Strahlen, welche $2n - 2$ gegebene $(n - 2)$-dimensionale lineare Räume schneiden, in der Form $(2n - 2)_{n-1} - (2n - 2)_n$. Ferner erhält man für $v = 1$, $w = n$, $b = n$ das auch unmittelbar leicht erkennbare Resultat $\eta(0, 1, n) s^n p^1 = n - 1$.

II. Die Anzahl-Funktion für die Kegelschnitt-Ausartung ε.

Um vermöge der Formel 12) in I. auch die Anzahl-Funktion für die Ausartung ε in geschlossener Form zu erhalten, müssen wir von einer auf Binomialkoefficienten und Potenzen der Zahl zwei bezüglichen Hilfsformel Gebrauch machen, die sich in folgender Weise ableiten läfst. Man setze in

16) $$\psi(e, h) = e_0 + e_1 + e_2 + \cdots + e_h$$

jeden Binomialkoefficienten e_i gleich $(e - 1)_{i-1} + (e - 1)_i$. Dann erhält man die Rekursionsformel:

17) $$\psi(e, h) = 2 \cdot \psi(e - 1, h) - (e - 1)_h.$$

Nun folgt aus 16): $\psi(h, h) = 2^h$, also durch wiederholte Anwendung von 17) nacheinander:

$$\psi(h, h) = 2^h,$$
$$\psi(h + 1, h) = 2^{h+1} - h_h,$$
$$\psi(h + 2, h) = 2^{h+2} - 2^1 \cdot h_h - (h + 1)_h,$$
. . . . . .
$$\psi(g + 1, h) = 2^{g+1} - [2^{g-h} \cdot h_h + 2^{g-h-1} \cdot (h + 1)_h + \cdots + g_h],$$

oder:

18) $$g_h + 2^1 \cdot (g - 1)_h + \cdots + 2^{g-h} \cdot h_h = 2^{g+1} - \psi(g + 1, h).$$

Setzt man in 18) $g - k - 1$ statt g, multipliziert man dann mit 2^{k+1} und subtrahiert von 18), so erhält man die gesuchte Hilfsformel:

19) $$g_h + 2^1 \cdot (g - 1)_h + \cdots + 2^k (g - k)_h = 2^{k+1} \cdot \psi(g - k, h) - \psi(g + 1, h).$$

Das Gebilde ε, dessen Anzahl-Funktion wir jetzt suchen, besteht

aus einer Ebene e, einem darin befindlichen Strahle s und zwei Punkten p, die beide auf s liegen. Durch Zusammenfallen dieser beiden Punkte p entsteht aus dem Gebilde in ε das in I. behandelte Gebilde η. Wendet man daher die n-dimensionale Verallgemeinerung des Korrespondenzprinzips an, so erhält man:

$$p + p = 2 \cdot s + \eta,$$

oder:

20) $$p - s = \tfrac{1}{2} \cdot \eta.$$

Diese Gleichung multipliziere man symbolisch mit der Summe

$$p^{c-1} + p^{c-2}s + p^{c-3}s^2 + \cdots + s^{c-1},$$

wobei man beachte, dafs der Punkt auf η doppelt zu rechnen ist, wenn η ein ausgeartetes ε ist. So erhält man:

21) $$p^c - s^c = \tfrac{1}{2}\eta\,[2^{c-1} \cdot p^{c-1} + 2^{c-2} \cdot p^{c-2}s + \cdots + s^{c-1}].$$

Nun multipliziere man 21) symbolisch mit $e^a s^b$, wo $a + b = 3n - 2 - c$ ist, weil die Konstantenzahl von ε $3n - 2$ beträgt. Beachtet man dann, dafs

$$s^c e^a s^b = 0$$

ist, weil keine die Lage der Punkte feststellende Bedingung gegeben ist, so erhält man:

22) $$e^a s^b p^c = 2^{c-2} \cdot \eta e^a s^b p^{c-1} + 2^{c-3} \cdot \eta e^a s^{b+1} p^{c-2} + \cdots + 2^0 \cdot \eta e^a s^{b+c-2} p^1.$$

Man hat daher behufs allgemeiner Bestimmung der auf ε bezüglichen Anzahl $e^a s^b p^c$ in Formel 22) nacheinander für c die Zahlen $1, 2, \ldots$ bis $c - 1$ einzusetzen, dabei beziehungsweise mit $2^0, 2^1, \ldots$ bis 2^{c-2} zu multiplizieren und die erhaltenen Ausdrücke zu addieren. So erhält man bei Benutzung von 12) einen Ausdruck von der Form:

$$(a_{n-2} - a_{n-1})(K - L) + a_n (M - N),$$

wobei K, L, M, N folgende Summen darstellen:

$$K = (2n-2)_{n-1} + 2^1 \cdot (2n-3)_{n-1} + \cdots + 2^{c-2} \cdot (2n-c)_{n-1},$$
$$L = (2n-2)_n + 2^1 \cdot (2n-3)_n + \cdots + 2^{c-2} \cdot (2n-c)_n,$$
$$M = (2n-4)_{n-2} + 2^1 \cdot (2n-5)_{n-2} + \cdots + 2^{c-2} \cdot (2n-c-2)_{n-2},$$
$$N = (2n-4)_{n-1} + 2^1 \cdot (2n-5)_{n-1} + \cdots + 2^{c-2} \cdot (2n-c-2)_{n-1}.$$

Hieraus wird mit Anwendung der oben entwickelten Hilfsformel 19):

$$K = 2^{c-1} \cdot \psi(2n-e,\ n-1) - \psi(2n-1,\ n-1),$$
$$L = 2^{c-1} \cdot \psi(2n-c,\ n) - \psi(2n-1,\ n),$$
$$M = 2^{c-1} \cdot \psi(2n-c-2,\ n-2) - \psi(2n-3,\ n-2),$$
$$N = 2^{c-1} \cdot \psi(2n-c-2,\ n-1) - \psi(2n-3,\ n-1).$$

Nun ist aber nach der in 16) ausgesprochenen Definition von ψ:

$$\psi(2n-c,\ n)-\psi(2n-c,\ n-1)=(2n-c)_n$$
$$\text{und: } \psi(2n-1,\ n)-\psi(2n-1,\ n-1)=(2n-1)_n.$$

Dadurch kommt:

$$K-L=-2^{c-1}\cdot(2n-c)_n+(2n-1)_n$$
$$\text{und: } M-N=-2^{c-1}\cdot(2n-c-2)_{n-1}+(2n-3)_{n-1}.$$

Folglich ergiebt sich:

$$23)\quad e^a s^b p^c = a_n\cdot[(2n-3)_{n-1}-2^{c-1}\cdot(2n-c-2)_{n-1}] + (a_{n-2}-a_{n-1})\cdot[(2n-1)_n-2^{c-1}\cdot(2n-c)_n]$$

als allgemeine Anzahl-Funktion des aus einer Ebene e, zwei darin befindlichen Punkten p und deren Verbindungsstrahl s bestehenden Gebildes ε.

Einige Specialisierungen sind von Interesse. Ist $c=1$, so werden die in den eckigen Klammern stehenden Ausdrücke zu Null. Also ist $\varepsilon e^a s^b p^1=0$, was geometrisch selbstverständlich ist. Ist $c=2$, so ergiebt sich die schon in I. erwähnte Anzahl-Funktion für das aus Ebene und incidentem Strahl bestehende Gebilde. Setzt man $a=n-2$, so erhält man die Anzahl-Funktion für das aus einem Strahle und zwei darin befindlichen Punkten bestehende Gebilde, nämlich

$$24)\qquad e^{n-2}s^b p^c=(2n-1)_n-2^{c-1}\cdot(2n-c)_n.$$

Ist hier $c>n$, so ist $(2n-c)_n=0$, und es ergiebt sich das merkwürdige Resultat, dafs dann die Anzahl-Funktion unabhängig von c wird. Wenn also zur Bestimmung der Lage zweier Punkte in einem n-dimensionalen, linearen Raume mehr als n $(n-1)$-dimensionale lineare Räume gegeben sind, in denen die Punkte liegen sollen, und entsprechend weniger als n $(n-2)$-dimensionale lineare Räume, die von dem Verbindungsstrahle geschnitten werden sollen, so ist in allen diesen n Fällen die Anzahl der Punktepaare eine und dieselbe, nämlich $(2n-1)_n$. Die Unabhängigkeit dieser Zahl von c ergiebt sich übrigens auch aus 20), weil in allen diesen Fällen die Zahl η der von den ε gebildeten einstufigen Systeme Null sein mufs. Endlich setzen wir noch $b=0$, d. h. $c=3n-2-a$. Dann erhalten wir nach einigen Umformungen:

$$25)\quad e^a p^{3n-2-a}=a_n\cdot(2n-3)_{n-1}+(a_{n-2}-a_{n-1})\cdot(2n-1)_n + a_{2n-2}\cdot[(2n-2)_{n-1}-(2n-2)_n]\cdot 2^{3n-3-a}.$$

Analog wie η in Formel 15) läfst sich auch ε ausdrücken. Man geht zu diesem Zweck von Formel 21) aus, setzt für die darin be-

findlichen Symbole das, was sich aus Formel 15) ergiebt, und benutzt bei dieser Addition die Hilfsformel 19). So erhält man:

$$(0, v, w)\, s^b p^c = 2^{c-1} \cdot \psi(b, v) - \psi(b + c - 1, v) \\ - 2^{c-1} \cdot \psi(b, w) + \psi(b + c - 1, w),$$

woraus sich gemäfs der Definition von ψ (Formel 16) ergiebt:

26) $$(0, v, w)\, s^b p^c = (v + w)_w + (v + w)_{w-1} + \cdots + (v + w)_{v+1} \\ - 2^{c-1} \cdot [b_w + b_{w-1} + \cdots + b_{v+1}],$$

wobei natürlich $v + w = b + c - 1$ sein mufs, damit sich die Konstantenzahl $3n - 2$ des Gebildes ε ergiebt. Um ein Beispiel zu geben, wählen wir $v = 1$, $w = n$, $b = n$, $c = 2$. Dann kommt:

$$(0, 1, n)\, s^n p^2 = (n + 1)_n + (n + 1)_{n-1} + \cdots + (n + 1)_2 \\ - 2 \cdot [n_n + n_{n-1} + \cdots + n_2] \\ = 2^{n+1} - n - 3 - 2 \cdot [2^n - n - 1] = n - 1,$$

was man auch aus meinen Fund. Anz. (§. 5, F. 5) erhalten kann, wenn man beachtet, dafs $(0, 1, n)\, s^n p^2$ gleich der Zahl der Strahlen sein mufs, welche einen gegebenen Strahl und n gegebene $(n - 2)$-dimensionale lineare Räume schneiden. Aufserdem specialisieren wir noch Formel 26) für den Fall $b = 0$ und erhalten:

27) $$(0, v, w)\, p^c = (v + w)_w + (v + w)_{w-1} + \cdots + (v + w)_{v+1},$$

wo $c = v + w + 1$ sein mufs.

Um auch $(0, v, w)\, e^a p^c$ bestimmen zu können, mufs man allgemein die einer Ebene auferlegte Bedingung $(0, v, w)\, e^a$ durch Bedingungen ausdrücken können, die nicht zusammengesetzt sind. Dies gelingt dadurch, dafs man von der in den „Linearen Räumen" mit 2) bezeichneten Formel wiederholt Gebrauch macht. Man erhält dann:

28) $$(0, v, w)\, e^a = \Sigma (a_i - a_{i-w+v})(0, v - a + i, w - i),$$

welche Summe von $i = a - v + 1$ bis $i = \frac{1}{2} a - \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} w - \frac{1}{2}$ zu erstrecken ist, wenn $a + w - v$ ungerade ist, und bis $\frac{1}{2} a - \frac{1}{2} v + \frac{1}{2} w - 1$, wenn $a + w - v$ gerade ist. Multipliziert man nun 28) mit p^c, und bezieht die entstehenden Bedingungen auf das Gebilde ε, so erhält man vermittelst der Formel 27), da $v + w = a + c - 1$ sein mufs:

29) $$(0, v, w)\, e^a p^c = \Sigma (a_i - a_{i-w+v}) [(c - 1)_{w-i} \\ + (c - 1)_{w-i-1} + \cdots + (c - 1)_{c-w+i}],$$

welche Summe auf dieselben Werte von i zu erstrecken ist, wie die in Formel 28) stehende Summe.

III. Die Anzahl-Funktion für den allgemeinen Kegelschnitt.

Die in I. und II. eingeführten Bedingungen e, s, p bedeuten für den allgemeinen Kegelschnitt beziehungsweise, dafs seine Ebene einen $(n-3)$-dimensionalen linearen Raum schneiden soll, dafs er einen $(n-2)$-dimensionalen linearen Raum schneiden, und dafs er einen $(n-1)$-dimensionalen linearen Raum berühren soll. Zwischen den Anzahlen für diese drei Bedingungen und den Anzahlen für die schon in I. definierten Ausartungen δ und ε bestehen bekanntlich die beiden Gleichungen:

30) $$2s = p + 2e + \varepsilon,$$

31) $$2p = s + \delta,$$

aus denen folgt:

32) $$p - \tfrac{2}{3}e = \tfrac{2}{3}\delta + \tfrac{1}{3}\varepsilon.$$

Multipliziert man diese Gleichung mit $\left[p^{c-1} + \frac{2}{3}p^{c-2}c + \cdots \left(\frac{2}{3}\right)^{c-1} e^{c-1}\right] e^a$, so erhält man links $p^c e^a - \left(\frac{2}{3}\right)^c e^{c+a}$. Ist nun $c + a$ gleich der Konstantenzahl $3n - 1$ des Kegelschnitts, so verschwinden rechts die sämtlichen auf δ bezüglichen Symbole, weil diese Ausartung nur dann bestimmbar ist, wenn Bedingungen s gegeben sind. Was ferner die auf ε bezüglichen Symbole anbetrifft, so verschwinden von ihnen diejenigen, bei denen weniger als vier Bedingungen p gegeben sind. Endlich ist e^{c+a} gleich Null, weil ein Kegelschnitt nicht bestimmbar ist, wenn keine andern Bedingungen gegeben sind, als solche, die sich auf seine Ebene beziehen. Deshalb erhält man bei jener Multiplikation:

33) $$p^c e^a = \varepsilon e^a \left[\tfrac{1}{3}p^{c-1} + \tfrac{2}{3^2}p^{c-2}e + \tfrac{2^2}{3^3}p^{c-3}e^2 + \cdots \frac{2^{c-5}}{3^{c-4}}p^4 e^{c-5}\right].$$

Nun sind aber in II. (Formel 23 oder 25) die auf ε bezüglichen Anzahlen allgemein ausgedrückt. Wir können daher die in 33) rechts stehenden Symbole nach Formel 25) durch a und n ausdrücken, und erhalten $p^c e^a$ gleich der Summe, die sich ergiebt, wenn man in 25) der Reihe nach a durch a, $a+1$, $a+2$, ... bis $a + c - 5$, d. h. $3n - 6$, ersetzt, dabei beziehungsweise mit $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3^2}$, ... $\frac{2^{c-5}}{3^{c-4}}$ multipliziert und die erhaltenen Produkte addiert. So erhält man für den allgemeinen Kegelschnitt:

34) $$p^c e^a = (2n-3)_{n-1} \cdot P + (2n-1)_n \cdot Q + [(2n-2)_{n-1} - (2n-2)_n] \cdot R,$$

wo

$$P = \tfrac{1}{3}\, a_n + \frac{2^1}{3^2}(a+1)_n + \cdots \frac{2^{c-5}}{3^{c-4}}(3n-6)_n,$$

$$Q = \tfrac{1}{3}\,(a_{n-2} - a_{n-1}) + \frac{2^1}{3^2}\Big[(a+1)_{n-2} - (a+1)_{n-1}\Big] + \cdots$$

$$+ \frac{2^{c-5}}{3^{c-4}}\Big[(3n-6)_{n-2} - (3n-6)_{n-1}\Big],$$

und

$$R = 2^{3n-3-a}\cdot\Big[\tfrac{1}{3}\cdot a_{2n-2} + \frac{1}{3^2}\cdot(a+1)_{2n-2} + \cdots + \frac{1}{3^{c-4}}\cdot(3n-6)_{2n-2}\Big].$$

Wenn wir, um Beispiele für dieses Resultat zu haben, $n = 4$ setzen und aufserdem a die Werte 0 bis 6 erteilen, so erhalten wir sieben Zahlen, welche auch aus den Tabellen bestimmbar sind, die ich in Bd. I der Mitteilungen der Math. Ges. in Hamburg auf S. 298 mitgeteilt habe, nämlich:

$$p^{11} = 20,\quad p^{10}e = 30,\quad p^9e^2 = 45,\quad p^8e^3 = 50,$$
$$p^7e^4 = 40,\quad p^6e^5 = 20,\quad p^5e^6 = 5.$$

Wenn man in anderer Weise als bei Formel 34) die auf ε bezüglichen Glieder ausdrückt und vereinigt, so kann man für die gesuchte Zahl $p^c e^{3n-1-c}$ die folgende Summe erhalten:

35) $$p^c e^{3n-1-c} = \sum[(g+h)_{h+1} + (g+h)_{h+2} + \cdots + (g+h)_g]\cdot T,$$

wo $$T = \frac{2^{c-g-h-2}}{3^{c-g-h-1}}\cdot\frac{(3n-g-h-3)!\,g\cdot h\cdot(g-h)}{(n-g)!\,(n-h)!\,n!}$$

ist, und wo die Summation über alle ganzzahligen Werte von g und h zu erstrecken ist, welche die Bedingungen

$$0 < h < g < n \quad \text{und} \quad g + h \leqq c - 2$$

erfüllen.

Auch für die Bedingung $(0, v, w)\, p^c e^a$, wo $a + c = v + w + 2$ ist, läfst sich aus Formel 29) die Anzahlfunktion gewinnen, wenn man dort der Reihe nach für a die Werte $a,\ a+1,\ \cdots,\ a+c-5$ und gleichzeitig für c die Werte $c-1,\ c-2,\ \cdots$ bis 4 einsetzt, dabei beziehungsweise mit $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3^2}$, $\cdots$ bis $\frac{2^{c-5}}{3^{c-4}}$ multipliziert, und die erhaltenen Produkte addiert.

Bisher haben wir die Anzahl-Funktion $e^a s^b p^c$ des Kegelschnittes nur für den Fall $b = 0$ bestimmt. Die Auffindung der allgemeinen Anzahl-Funktion gelingt uns am besten durch Zurückführung auf diesen besondern Fall, da wir dann die zweite Kegelschnitt-Ausartung δ ganz vermeiden können. Nach Formel 30) ist:

$$s - \left(\tfrac{1}{2}p + e\right) = \tfrac{1}{2}\varepsilon,$$

woraus wir durch Multiplikation mit

$$e^a p^c \left[s^{b-1} + s^{b-2}\left(\tfrac{1}{2}p + e\right) + \cdots \left(\tfrac{1}{2}p + e\right)^{b-1} \right]$$

links $e^a p^c s^b - e^a p^c \left(\tfrac{1}{2}p + e\right)^b$ erhalten. Auf der rechten Seite erscheinen Symbole, die sich auf ε beziehen, und bei denen zu beachten ist, dafs wegen der Doppelgeraden von ε dieses Gebilde doppelt zählt, wenn es als ein der Bedingung s unterworfener Kegelschnitt auftritt. Daher erhalten wir:

36)
$$e^a s^b p^c = e^a \left(\tfrac{1}{2}p + e\right)^b p^c$$
$$+ \tfrac{1}{2}\varepsilon e^a p^c \left[2^{b-1} \cdot s^{b-1} + 2^{b-2} \cdot s^{b-2}\left(\tfrac{1}{2}p + e\right) + \cdots \left(\tfrac{1}{2}p + e\right)^{b-1} \right].$$

Der erste Addende der rechten Seite wird durch die binomische Entwickelung eine Summe von $b + 1$ Addenden, von denen jeder durch Formel 34) ausgedrückt ist. Der zweite auf ε bezügliche Addende wird zunächst zu einer Summe von b Addenden, und nach Ausführung der angedeuteten binomischen Entwickelungen zu einer Summe von $\frac{1}{2}b\,(b+1)$ Addenden, von denen jeder durch Formel 23) ausgedrückt ist. Es ist überflüssig, den so entstehenden, von a, b, c, n abhängigen Ausdruck hinzuschreiben, da es dem Verfasser noch nicht gelang, ihm eine wesentlich einfachere Form zu geben.

Wir berechnen schliefslich aus Formel 36) beispielsweise diejenige Funktion von n, welche ausdrückt, wieviel Kegelschnitte zwei gegebene Strahlen schneiden, vier gegebene Ebenen berühren und ihre Ebene $3n - 7$ gegebene $(n-3)$-dimensionale lineare Räume schneiden lassen. Formel 36) ergiebt zunächst:

$$c^{3n-7}s^2p^4 = \tfrac{1}{4}c^{3n-7}p^6 + c^{3n-6}p^5 + \varepsilon c^{3n-7}p^4 s + \tfrac{1}{4}\varepsilon c^{3n-7}p^5 + \tfrac{1}{2}\varepsilon c^{3n-6}p^4.$$

Für die ersten beiden dieser fünf Addenden erhält man aus Formel 34):

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{24(3n-7)!}{n!\,(n-1)!\,(n-3)!} \quad \text{und} \quad \frac{6(3n-7)!}{n!\,(n-1)!\,(n-3)!}.$$

Für die letzten drei Addenden erhält man aus Formel 23):

$$\frac{60(3n-7)!}{n!\,(n-1)!\,(n-3)!}, \quad \frac{1}{4} \cdot \frac{60\,(3n-7)!}{n!\,(n-1)!\,(n-3)!} \quad \text{und} \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{18\,(3n-7)!}{n!\,(n-1)!\,(n-3)!}.$$

Folglich ergiebt sich

$$c^{3n-7}s^2p^4 = \frac{96\,(3n-7)!}{n!\,(n-1)!\,(n-3)!}$$

als die gesuchte Anzahl-Funktion.

Hamburg, im Oktober 1889.

Bericht über die Sitzungen der Gesellschaft in den Monaten März bis November 1889.

(Erstattet vom Jahrverwalter H. Schubert in Hamburg.)

Hauptversammlung vom 4. März 1889.

Der Jahrverwalter, Herr Dr. Hoppe, erstattet den Jahresbericht über das 199. Gesellschaftsjahr. Nach demselben zählte die Gesellschaft 5 Ehrenmitglieder, 51 hiesige ordentliche Mitglieder und 11 auswärtige Mitglieder.

Zum Adjunkten wird der abgehende Jahrverwalter, Herr Dr. Hoppe, gewählt. Diese Wiederwahl war zugleich eine Äufserung des Dankes, den die Gesellschaft Herrn Dr. Hoppe für seine erfolgreiche Thätigkeit hinsichtlich der Vorbereitungen für die Festschrift schuldet.

An die Hauptversammlung schlofs sich das übliche Festessen, das in gehobenster Stimmung und mit vielen Ausblicken auf das Jubelfest verlief. An demselben beteiligten sich auch unser Hamburger Ehrenmitglied, Herr Senator Stammann, und 8 Gäste.

Sitzung vom 6. April 1889.

Der Jahrverwalter berichtet über die Katalogarbeiten. — Es wird beschlossen, das Grunertsche Archiv nicht mehr zu halten, da es auf der Stadtbibliothek gehalten wird. — Der Vorstand wird beauftragt, dafür Sorge zu tragen, dafs die noch immer auf der Stadtbibliothek fehlenden 17 Bände des Crelleschen Journals endlich angeschafft werden. Die Anschaffung war der Gesellschaft schon im Jahre 1885 zugesichert (vgl. Band I dieser „Mitteilungen", Seite 127). — Nach Verlesung der Einladung des Vereins für Hamburgische Geschichte zu seinem 50jährigen Stiftungsfeste wird beschlossen, dafs zwei Vertreter der Gesellschaft den befreundeten Verein in dessen Festsitzung beglückwünschen und ihm eine Adresse überreichen. — Behufs Vorbereitung einer Versendungsliste für die Festschrift wird

eine Kommission gewählt, die aus den Herren Sinram, Dr. Keferstein und Dr. Bohnert besteht.

Herr Dr. Busche hält den angekündigten Vortrag über drei Beweise des auf quadratische Reste bezüglichen Reciprocitätsgesetzes. Der erste Beweis beruht auf einer Modifikation des Gaufsschen Lemma, der zweite ist eine Abänderung des Eisensteinschen geometrischen Beweises, und der dritte Beweis beruht darauf, dafs, wenn gewisse zwei Funktionen für gleiche Werte der Argumente übereinstimmen, es auch bei ihren ersten Änderungen der Fall ist.

Sitzung vom 11. Mai 1889.

Herr Dr. John Schröder wird als Mitglied aufgenommen. — In dem wissenschaftlichen Teile der Sitzung giebt Herr Sinram, unter Bezugnahme auf die Arbeit des Herrn Obergeometers Stück über die Vermessung des Hamburger Gebietes, eine Vereinfachung der Formel, welche den Inhalt eines Polygons durch die Koordinaten seiner Ecken ausdrückt. Herr Dr. Eichler macht darauf aufmerksam, dafs die Formel am einfachsten durch kombinatorische Multiplikation gewonnen wird.

Herr Dr. Bock giebt das angekündigte Referat über einige neuere planimetrische Konstruktionsmethoden. Im Anschlufs an das für jeden Lehrer empfehlenswerte bekannte Buch von Petersen in Kopenhagen erörtert der Referent namentlich zwei Abbildungs-Prinzipien und erprobt deren Nutzen an interessanten Beispielen: das Multiplikationsprinzip und das Inversionsprinzip. Mit Hilfe des letzteren wurde der Satz bewiesen, dafs ein Kreis, welcher zwei Kreise berührt, jeden Kreis, der durch die beiden Schnittpunkte des letzteren hindurchgeht, unter demselben Winkel schneidet. Hierauf gründete schliefslich der Referent eine rein geometrische Analysis zu der Steinerschen Konstruktion des Malfattischen Problems.

Sitzung vom 22. Juni 1889.

Der Jahrverwalter berichtet über die thätige Unterstützung, welche die Averhof-Stiftung und die Kellinghusen-Stiftung der Festschrift gewährt haben (vgl. Vorrede zur Festschrift, im ersten Teil). Herr Sinram berichtet über die Versendungsliste.

Herr Bau-Inspektor F. Bubendey hält den angekündigten Vortrag über die Geschichte der Gesellschaft. (Vgl. die Abhandlung des Vortragenden im ersten Teile dieser Festschrift.)

Sitzung vom 14. September 1889.

Es wird beschlossen, dafs nicht beim Jubelfest, sondern erst in der Märzsitzung die Wahl des Adjunkten vorzunehmen und der vollständige Jahresbericht zu erstatten sei. — Der Jahrverwalter berichtet über den Fortgang der Arbeiten zum Jubelfest und das Entgegenkommen, welches unsere Bestrebungen auch auswärts gefunden haben, indem die auswärtigen Mathematiker, welche um Beiträge zur Festschrift gebeten sind, fast sämtlich zugesagt haben, so dafs der wissenschaftliche Teil der Festschrift aus 13 Abhandlungen von Mitgliedern und 9 Abhandlungen von nicht-hamburgischen deutschen Mathematikern bestehen werde. Aufserdem habe Herr Bierens de Haan eine kleine Abhandlung über die holländischen Mitglieder unsrer Gesellschaft versprochen, welche in den ersten (geschichtlichen) Teil der Festschrift aufgenommen werden soll. Den wissenschaftlichen Teil der Sitzung eröffnet Herr Dr. Köpcke mit einer Mitteilung über ein Traktorien-Problem. Dasselbe betrifft zwei unter einem Winkel im einen Endpunkte zusammenhängende Stäbe, von denen der eine in seinem andern Endpunkt befestigt ist.

Darauf hält Herr Dr. Wagner den angekündigten Vortrag über die Kurve, welche der geometrische Ort für alle Punkte ist, von denen aus zwei Seiten AB und AC eines Dreiecks unter gleichem Winkel erscheinen. Die Kurve, welche dritten Grades ist und in A einen Doppelpunkt hat, wird hinsichtlich ihrer besonderen Eigenschaften untersucht und auf Grund derselben in bequemer Weise gezeichnet.

Sitzung vom 12. Oktober 1889.

Der Jahrverwalter widmet dem am 7. Oktober verstorbenen ältesten Mitgliede Professor Georg Heinrich Bubendey einen warm empfundenen Nachruf. Bubendey hatte der Gesellschaft seit 1841 angehört und war mehrfach Jahrverwalter gewesen. Er hat nicht allein um die Erleichterung der mathematischen Forschung in Hamburg grofse Verdienste, da er das Crellesche Journal der Stadtbibliothek schenkte, sondern er hat auch noch besondere Verdienste um die Mathematische Gesellschaft, in der er Jahrzehnte hindurch die theoretische Seite der höheren Mathematik hauptsächlich vertrat. Statt des Jubelkranzes, den wir ihm beim Jubelfeste zu überreichen uns vorgenommen hatten, konnten wir ihm nur noch den Totenkranz spenden. Als Vertreter der Gesellschaft beteiligten sich an der Bestattungsfeier der Jahrverwalter und Herr Dr. Wagner. In die Ge-

sellschaft werden Herr Dr. Glinzer und Herr Cand. prob. Mahlke aufgenommen. — Herr Dr. Hoppe berichtet über die letzte Sitzung des Festkomitees. — Die fertigen Bogen des Katalogs werden vorgelegt. — Ein Brief des Herrn Professor Weierstrafs wird verlesen. Derselbe bedauert, wegen seiner Erkrankung in Safsnitz das Versprechen, einen Beitrag zur Festschrift zu liefern, nicht halten zu können, stellt aber in Aussicht, der Gesellschaft zum Jubelfeste selbst eine Abhandlung widmen zu wollen.

Herr Bauinspektor Bubendey berichtet über einzelne besonders interessante Momente in der Gründungsperiode der Gesellschaft. — Herr Oberlehrer Ahlborn hält den angekündigten Vortrag über Kreisteilung. Mit Heranziehung mehrerer Sätze aus der Lehre von den Gleichungen und aus der Zahlentheorie wird das Problem der Kreisteilung und das damit so eng verwandte Problem der Auflösung der Gleichung $x^n = 1$ gelöst, und dann im besondern das Gaufssche Resultat besprochen, dafs die Gleichung $x^n = 1$ nur dann mit Hilfe von quadratischen Gleichungen gelöst werden könne, wenn n gleich $2^m + 1$ und Primzahl sei, was erfordere, dafs m eine Potenz von 2 sei. Hieraus folge, dafs auch nur in diesen Fällen die Einteilung einer Kreisperipherie in n gleiche Teile mit Hilfe von Zirkel und Lineal gelingen könne. Die Anwendung auf die Siebzehn-Teilung des Kreises mufste, der vorgerückten Zeit wegen, auf die nächste Sitzung verschoben werden.

Sitzung vom 9. November 1889.

Herr F. Bauch, Lehrer der Mathematik an der Bieberschen Schule, wird als Mitglied aufgenommen. — Die Einladung des Naturwissenschaftlichen Vereins zu dessen 52. Stiftungsfeste wird verlesen. — Für die Festsitzung am 15. Februar ist der Gesellschaft der Bürgerschaftssaal bereitwilligst zur Verfügung gestellt. Herr Senator Stammann hat sich geneigt erklärt, bei der Festsitzung den Ehrenvorsitz zu übernehmen. — Der Jahrverwalter erbittet sich die Bereitwilligkeit der Gesellschaft, in den nächsten Monaten auch zu einer eventuellen Extraversammlung erscheinen zu wollen.

Herr Oberlehrer Ahlborn hält den angekündigten Vortrag über die Einteilung des Kreises in 17 gleiche Teile mit alleiniger Anwendung von Zirkel und Lineal. Er specialisiert die Resultate seines Vortrags vom 12. Oktober auf den Fall $n = 17$ und gewinnt dadurch eine elegante Konstruktion, welche er nicht allein an der Tafel, sondern auch durch eine sorgfältig angefertigte Reifsbrett-Zeichnung den Anwesenden vor Augen führt.

Herr Kapitän Koldewey überreicht das von ihm verfafste und von der Seewarte herausgegebene Buch „Der Kompafs an Bord“ und knüpft daran einige Bemerkungen über die Theorie des Kompasses und der Deviation, sowie über einige neuere Kompafs-Konstruktionen.

Eingegangene Schriften.

Die Gesellschaft empfing im Austausch mit andern gelehrten Gesellschaften die im Laufe des Jahres erschienenen Hefte von:

1) Atti della Reale Academia dei Lincei zu Rom; 2) Bulletin de la Société mathématique de France; 3) Jornal de Sciencias math. e astronom. von Dr. Teixeira in Coimbra; 4) American Journal of Mathematics (John Hopkins Univer. Baltimore); 5) Leopoldina; 6) Nieuw Archief voor Wiskunde und Wiskundige Opgaven (Amsterdam).

Ferner hat die Gesellschaft der Deutschen Seewarte, dem Realgymnasium in Hamburg und den Mathematischen Vereinen in Berlin und Göttingen für die gefällige Übersendung ihrer Publikationen zu danken.

Für die Übersendung von Abhandlungen oder Werken, die sie selbst verfafst haben, sind wir den folgenden Herren zu Dank verpflichtet: Bruns in Leipzig, Ofterdinger in Ulm, Köpcke in Ottensen, Stück in Hamburg, Lemoine in Paris, Koldewey in Hamburg.

Inhaltsverzeichnis des zweiten Teils.

Seite

Bruns in Leipzig. Note zur Störungstheorie 3
Cantor in Heidelberg. Über einige Konstruktionen von Lionardo de Vinci 8
Günther in München. Die Knotenlinien der Atmo- und Hydrosphäre . . 15
Hurwitz in Königsberg i. Pr. Über die Wurzeln einiger transcendenten Gleichungen 25
Kronecker in Berlin. Über die Dirichletsche Methode der Wertbestimmung der Gaufsschen Reihen 32
Netto in Giefsen. Über den gröfsten gemeinsamen Teiler zweier ganzer Funktionen 36
Reye in Strafsburg i/E. Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurven, übersichtlich dargestellt 43
Sturm in Münster i/W. Über die sogenannten Strahlenkongruenzen ohne Brennfläche 61

Ahlborn in Hamburg. Zum Pentagramma mirificum 69
Bock in Hamburg. Kombinatorische Ableitung einiger Eigenschaften der Θ-Funktionen 74
Busche in Bergedorf. Beweis des quadratischen Reciprocitätsgesetzes in der Theorie der aus den vierten Wurzeln der Einheit gebildeten komplexen Zahlen 80
Eichler in Altona. Die Darstellung der cyklischen Kurven und ihre Bedeutung für die Schwingungstheorie 92
Hoppe in Hamburg. Methode zur Prüfung der homogenen Magnetisierung eines Magnetstabes 105
Järisch in Hamburg. Zur Theorie der linearen partiellen Differentialgleichungen 110
Keferstein in Hamburg. Über den Begriff der Zahl 119
Kiefsling in Hamburg. Zur Erklärung des Sehens mit bewaffnetem Auge 125
Köpcke in Ottensen. Analytische Darstellung einer differentiierbaren Funktion mit Oscillationen in jedem Intervalle 128
Krüfs in Hamburg. Spektralapparat mit automatischer Einstellung der Prismen 153
Lazarus in Hamburg. Die sociale Gesetzgebung und die Mathematik. . 158
Schröder in Hamburg. Über den Zusammenhang der hyperelliptischen σ- und ϑ-Funktionen 162
Schubert in Hamburg. Kegelschnitt-Anzahlen als Funktionen der Raum-Dimension n 172

Jahresbericht, erstattet vom Jahrverwalter Schubert in Hamburg . . . 185

STORAGE AREA